Lösungen Stochastik vermischt I

Ergebnisse:

E1	Ergebnis
	$P(C)=P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(A\cap B)=\frac{1}{3}+\frac{1}{3}-\frac{1}{6}=\frac{2}{6}+\frac{2}{6}-\frac{1}{6}=\frac{3}{6}=\underline{\underline{\frac{1}{2}}}$

E2	Ergebnis
	$P(E)=P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(A\cap B)=\frac{12}{32}+\frac{8}{32}-\frac{3}{32}=\frac{17}{32}=0{,}53125$

E3	Ergebnis
	Anzahl der Zahlenkonbinationen: $n^k=6^4=\underline{\underline{1296}}$ Die Wahrscheinlichkeit mit einem Versuch: $\frac{1}{1296}\approx\underline{\underline{0{,}00077}}$

E4	Ergebnis
	Wahrscheinlichkeit, drei gleiche Buchstaben zu ziehen: $\frac{26}{17576}\approx\underline{\underline{0{,}00148}}$

E5	Ergebnis
	Gewinnwahrscheinlichkeit: $P(A)=\frac{1}{120}\approx\underline{\underline{0{,}0083}}$

E6	Ergebnis
	Die Wahrscheinlichkeit bei 8 Zügen Karo zu ziehen ist etwa 0,000 000 095.

E7	Ergebnis
	Jedes Los muss 3,65 € kosten, damit die Ausgaben gedeckt werden. Bei einem Lospreis von 5 € beträgt der Gewinn 68 €.

Ausführliche Lösungen:

A1	**Aufgabe**	
	Ein Würfel wird einmal geworfen. Es werden zwei Ereignisse festgelegt:	
	A:	Die Augenzahl ist größer als 4.
	B:	Die Augenzahl ist eine ungerade Zahl und größer als 1.
	Ein neues Ereignis wird wie folgt festgelegt:	
	C:	Die Augenzahl ist größer als 4 **oder** Die Augenzahl ist eine ungerade Zahl und größer als 1.
	Das Ereignis C ist eine **Oder – Verknüpfung** aus A und B. Bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeit P (C).	

A1	**Ausführliche Lösung**
	Zuerst bilden wir die Ergebnismengen von A und B. $A = \{5;6\} \quad B = \{3;5\}$ Nach der Summenregel ist nun $P(C) = P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$ zu berechnen. Dazu benötigen wir noch die Ergebnismenge von $A \cap B$. $\quad A \cap B = \{5\}$ Die Wahrscheinlichkeiten der einzelnen Ereignisse sind: $P(A) = \frac{1}{6} + \frac{1}{6} = \frac{2}{6} = \frac{1}{3} \quad P(B) = \frac{1}{6} + \frac{1}{6} = \frac{2}{6} = \frac{1}{3} \quad P(A \cap B) = \frac{1}{6}$ Damit wird die Wahrscheinlichkeit von C: $P(C) = P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) = \frac{1}{3} + \frac{1}{3} - \frac{1}{6} = \frac{2}{6} + \frac{2}{6} - \frac{1}{6} = \frac{3}{6} = \underline{\underline{\frac{1}{2}}}$

A2 Aufgabe

Eine Karte wird aus einem Spiel mit 32 Karten gezogen (Skat).
Welche Wahrscheinlichkeit hat das folgende Ereignis?
E: Die gezogene Karte ist eine Bildkarte oder eine Kreuzkarte.

A2 Ausführliche Lösung

Das Ereignis E ist eine Oder- Verknüpfung aus den Ereignissen
A: Die gesuchte Karte ist eine Bildkarte
B: Die gesuchte Karte ist eine Kreuzkarte
Zuerst bestimmen wir die Anzahl der möglichen Ergebnisse von A und B.
A: Es gibt 12 Bildkarten von insgesamt 32 Karten.
B: Es gibt 8 Kreuzkarten von insgesamt 32 Karten.
Nach der Summenregel ist nun $P(E) = P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$ zu berechnen.
Dazu benötigen wir noch die Anzahl der möglichen Ergebnisse von $A \cap B$.
$A \cap B$: Es gibt 3 Kreuz - Bildkarten (Bube, Dame, König)
Die Wahrscheinlichkeiten der einzelnen Ereignisse sind:

$$P(A) = \frac{12}{32} \quad P(B) = \frac{8}{32} \quad P(A \cap B) = \frac{3}{32}$$

Damit wird die Wahrscheinlichkeit von E:

$$P(E) = P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) = \frac{12}{32} + \frac{8}{32} - \frac{3}{32} = \frac{17}{32} = 0,53125$$

Die Wahrscheinlichkeit dafür, dass die gezogene Karte eine Bild- oder eine Kreuzkarte ist beträgt etwa 0,53.

A3 Aufgabe

Ein Fahrradschloss (Zahlenschloss) besteht aus vier unabhängig voneinander beweglichen Rädern, die jeweils 6 Ziffern (von 1 bis 6)
enthalten. Das Schloss öffnet sich nur bei einer ganz bestimmten Zahlenkombination.
Wie viele Stellungen (Zahlenkombinationen) hat das Fahrradschloss und wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, bei der ersten Einstellung das Schloss zu öffnen?

A3 Ausführliche Lösung

Modellierung mit dem Urnenmodell:
Eine Urne enthält **n = 6** Kugeln mit den Nummern 1 bis 6.
Es wird **k = 4** mal gezogen **mit** Zurücklegen.
Die Anzahl der Zahlenkonbinationen beträgt: $n^k = 6^4 = \underline{\underline{1296}}$
Die Wahrscheinlichkeit mit einem Versuch
die richtige Kombination zu finden ist $\frac{1}{1296} \approx \underline{\underline{0,00077}}$

A4 Aufgabe

Aus den 26 Buchstaben des Alphabets werden nacheinander blind drei Buchstaben mit Zurücklegen entnommen. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit dreimal denselben Buchstaben zu ziehen?

A4 Ausführliche Lösung

Modellierung mit dem Urnenmodell:
Eine Urne enthält **n = 26** Kugeln mit den Buchstaben A bis Z.
Es wird **k = 3** mal gezogen **mit** Zurücklegen.

Die Anzahl der Buchstabenkonbinationen beträgt: $n^k = 26^3 = \underline{\underline{17576}}$

Die Wahrscheinlichkeit bei drei Ziehungen z. B. 3 mal den Buchstaben A zu ziehen ist $\frac{1}{17576}$

3 mal B, bzw. C oder irgend einen anderen Buchstaben zu ziehen hat jeweils die gleiche Wahrscheinlichkeit.
Es gibt mit den 26 Buchstaben des Alphabets insgesamt 26 günstige Fälle.
Damit ist die Wahrscheinlichkeit, drei gleiche Buchstaben zu ziehen:

$$\frac{26}{17576} \approx \underline{\underline{0{,}00148}}$$

A5 Aufgabe

In einer Lostrommel befinden sich 6 Lose mit den Nummern 1 bis 6.
Ein Spieler zieht nacheinander drei Lose. Zieht er in der Reihenfolge die Nummern 2, 4 und 6, so hat er gewonnen.
Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit für einen Gewinn.

A5 Ausführliche Lösung

Zuerst wird die Anzahl der Möglichkeiten berechnet, von diesen gibt es nur eine, die zum Gewinn führt, nämlich die Zahlenfolge 2, 4, 6.
Es handelt sich um eine geordnete Stichprobe ohne Zurücklegen.
Aus **n = 6** Zahlen werden **k = 3** Zahlen gezogen.

Anzahl der Möglichkeiten: $\frac{n!}{(n-k)!} = \frac{6!}{3!} = \frac{6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1}{3 \cdot 2 \cdot 1} = 6 \cdot 5 \cdot 4 = \underline{\underline{120}}$

Gewinnwahrscheinlichkeit: $P(A) = \frac{1}{120} \approx \underline{\underline{0{,}0083}}$

A6 Aufgabe

Aus einem Kartenspiel mit 32 Karten werden 8 Karten gezogen.
Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit dafür, dass dies 8 Karo– Karten sind?

A6 Ausführliche Lösung

Die Wahrscheinlichkeit bei 8 Zügen jeweils Karo zu ziehen ist:
$n = 32; k = 8 \Rightarrow$ Anzahl der Möglichkeiten:

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k! \cdot (n-k)!} = \frac{32!}{8! \cdot 24!} = \frac{32 \cdot 31 \cdot 30 \cdot 29 \cdot 28 \cdot 27 \cdot 26 \cdot 25}{8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1} = 10.518.300$$

$$P(A) = \frac{1}{10.518.300} \approx 0{,}000000095 = 9{,}5 \cdot 10^{-8}$$

A7 Aufgabe

Jedes Los gewinnt !
Bei der Abi - Abschlussfeier muss jeder der 50 Teilnehmer ein Los kaufen.
Der 1. Preis hat einen Wert von 100€, der 2. von 25€ und der 3. von 10€.
Jeder, der keinen dieser Gewinne bekommt, erhält einen Trostpreis in Höhe von 1€. Wie teuer müsste ein Los sein, damit Einnahmen und Ausgaben überein stimmen? Jedes Los wird für 5€ verkauft. Der Erlös geht ans Friedensdorf. Wie groß ist der Erlös?

A7 Ausführliche Lösung

Der Erwartungswert wird berechnet:

x_i	$P(X = x_i)$	$x_i \cdot P(X = x_i)$
100	$\frac{1}{50}$	$\frac{100}{50}$
25	$\frac{1}{50}$	$\frac{25}{50}$
10	$\frac{1}{50}$	$\frac{10}{50}$
1	$\frac{47}{50}$	$\frac{47}{50}$
	Erwartungswert $E(X)$	$\frac{182}{50} = 3{,}64$

E(X) = 3,64 bedeutet, dass jedes Los 3,65€ kosten muss, damit die Ausgaben gedeckt werden.

Bei einem Lospreis von 5 € und 50 verkauften Losen entsteht ein Gewinn von $50 \cdot (5 - 3{,}64) \approx 68\,€$.
Dieser Betrag geht ans Friedensdorf.