Lösungen Stochastik vermischt I

Ergebnisse:

E1	Ergebnis
	$P(C)=P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(A\cap B)=\frac{1}{3}+\frac{1}{3}-\frac{1}{6}=\frac{2}{6}+\frac{2}{6}-\frac{1}{6}=\frac{3}{6}=\underline{\underline{\frac{1}{2}}}$

E2	Ergebnis
	$P(E)=P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(A\cap B)=\frac{12}{32}+\frac{8}{32}-\frac{3}{32}=\frac{17}{32}=0,53125$

E3	Ergebnis
	Anzahl der Zahlenkonbinationen: $n^k=6^4=\underline{\underline{1296}}$
	Die Wahrscheinlichkeit mit einem Versuch: $\frac{1}{1296}\approx\underline{\underline{0,00077}}$

E4	Ergebnis
	Wahrscheinlichkeit, drei gleiche Buchstaben zu ziehen: $\frac{26}{17576}\approx\underline{\underline{0,00148}}$

E5	Ergebnis
	Gewinnwahrscheinlichkeit: $P(A)=\frac{1}{120}\approx\underline{\underline{0,0083}}$

E6	Ergebnis
	Die Wahrscheinlichkeit bei 8 Zügen Karo zu ziehen ist etwa 0,000 000 095.

E7	Ergebnis
	Jedes Los muss 3,65 € kosten, damit die Ausgaben gedeckt werden. Bei einem Lospreis von 5 € beträgt der Gewinn 68 €.

Ausführliche Lösungen:

A1 Ausführliche Lösung

Zuerst bilden wir die Ergebnismengen von A und B.

$A = \{5;6\} \quad B = \{3;5\}$

Nach der Summenregel ist nun $P(C) = P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$ zu berechnen.

Dazu benötigen wir noch die Ergebnismenge von $A \cap B$. $\quad A \cap B = \{5\}$

Die Wahrscheinlichkeiten der einzelnen Ereignisse sind:

$$P(A) = \frac{1}{6} + \frac{1}{6} = \frac{2}{6} = \frac{1}{3} \quad P(B) = \frac{1}{6} + \frac{1}{6} = \frac{2}{6} = \frac{1}{3} \quad P(A \cap B) = \frac{1}{6}$$

Damit wird die Wahrscheinlichkeit von C:

$$P(C) = P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) = \frac{1}{3} + \frac{1}{3} - \frac{1}{6} = \frac{2}{6} + \frac{2}{6} - \frac{1}{6} = \frac{3}{6} = \underline{\underline{\frac{1}{2}}}$$

A2 Ausführliche Lösung

Das Ereignis E ist eine Oder- Verknüpfung aus den Ereignissen
A: Die gesuchte Karte ist eine Bildkarte
B: Die gesuchte Karte ist eine Kreuzkarte
Zuerst bestimmen wir die Anzahl der möglichen Ergebnisse von A und B.
A: Es gibt 12 Bildkarten von insgesamt 32 Karten.
B: Es gibt 8 Kreuzkarten von insgesamt 32 Karten.

Nach der Summenregel ist nun $P(E) = P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$ zu berechnen.

Dazu benötigen wir noch die Anzahl der möglichen Ergebnisse von $A \cap B$.
$A \cap B$: Es gibt 3 Kreuz - Bildkarten (Bube, Dame, König)
Die Wahrscheinlichkeiten der einzelnen Ereignisse sind:

$$P(A) = \frac{12}{32} \quad P(B) = \frac{8}{32} \quad P(A \cap B) = \frac{3}{32}$$

Damit wird die Wahrscheinlichkeit von E:

$$P(E) = P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) = \frac{12}{32} + \frac{8}{32} - \frac{3}{32} = \frac{17}{32} = 0{,}53125$$

Die Wahrscheinlichkeit dafür, dass die gezogene Karte eine Bild- oder eine Kreuzkarte ist beträgt etwa 0,53.

A3 Ausführliche Lösung

Modellierung mit dem Urnenmodell:
Eine Urne enthält **n = 6** Kugeln mit den Nummern 1 bis 6.
Es wird **k = 4** mal gezogen **mit** Zurücklegen.

Die Anzahl der Zahlenkonbinationen beträgt: $n^k = 6^4 = \underline{\underline{1296}}$

Die Wahrscheinlichkeit mit einem Versuch die richtige Kombination zu finden ist $\frac{1}{1296} \approx \underline{\underline{0{,}00077}}$

A4 Ausführliche Lösung

Modellierung mit dem Urnenmodell:
Eine Urne enthält **n = 26** Kugeln mit den Buchstaben A bis Z.
Es wird **k = 3** mal gezogen **mit** Zurücklegen.

Die Anzahl der Buchstabenkonbinationen beträgt: $n^k = 26^3 = \underline{\underline{17576}}$

Die Wahrscheinlichkeit bei drei Ziehungen z. B. 3 mal den Buchstaben A zu ziehen ist $\frac{1}{17576}$

3 mal B, bzw. C oder irgend einen anderen Buchstaben zu ziehen hat jeweils die gleiche Wahrscheinlichkeit.
Es gibt mit den 26 Buchstaben des Alphabets insgesamt 26 günstige Fälle.
Damit ist die Wahrscheinlichkeit, drei gleiche Buchstaben zu ziehen:

$$\frac{26}{17576} \approx \underline{\underline{0,00148}}$$

A5 Ausführliche Lösung

Zuerst wird die Anzahl der Möglichkeiten berechnet, von diesen gibt es nur eine, die zum Gewinn führt, nämlich die Zahlenfolge 2, 4, 6.
Es handelt sich um eine geordnete Stichprobe ohne Zurücklegen.
Aus **n = 6** Zahlen werden **k = 3** Zahlen gezogen.

Anzahl der Möglichkeiten: $\frac{n!}{(n-k)!} = \frac{6!}{3!} = \frac{6\cdot5\cdot4\cdot3\cdot2\cdot1}{3\cdot2\cdot1} = 6\cdot5\cdot4 = \underline{\underline{120}}$

Gewinnwahrscheinlichkeit: $P(A) = \frac{1}{120} \approx \underline{\underline{0,0083}}$

A6 Ausführliche Lösung

Die Wahrscheinlichkeit bei 8 Zügen jeweils Karo zu ziehen ist:
$n = 32; k = 8 \Rightarrow$ Anzahl der Möglichkeiten:

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!\cdot(n-k)!} = \frac{32!}{8!\cdot24!} = \frac{32\cdot31\cdot30\cdot29\cdot28\cdot27\cdot26\cdot25}{8\cdot7\cdot6\cdot5\cdot4\cdot3\cdot2\cdot1} = 10.518.300$$

$$P(A) = \frac{1}{10.518.300} \approx 0,000000095 = 9,5\cdot10^{-8}$$

A7 Ausführliche Lösung

Der Erwartungswert wird berechnet:

x_i	$P(X = x_i)$	$x_i \cdot P(X = x_i)$
100	$\frac{1}{50}$	$\frac{100}{50}$
25	$\frac{1}{50}$	$\frac{25}{50}$
10	$\frac{1}{50}$	$\frac{10}{50}$
1	$\frac{47}{50}$	$\frac{47}{50}$
	Erwartungswert $E(X)$	$\frac{182}{50} = 3,64$

E(X) = 3,64 bedeutet, dass jedes Los 3,65€ kosten muss, damit die Ausgaben gedeckt werden.

Bei einem Lospreis von 5 € und 50 verkauften Losen entsteht ein Gewinn von $50\cdot(5-3,64) = 68$ €.

Dieser Betrag geht ans Friedensdorf.