Lösungen zur Binomialverteilung III

Ausführliche Lösungen:

A1 Ausführliche Lösungen

Kumulierte Binomialverteilung für $n = 100$ und $p = 0{,}5$

k	$P(X \le k)$	k	$P(X \le k)$	k	$P(X \le k)$	k	$P(X \le k)$	k	$P(X \le k)$	k	$P(X \le k)$
32	0,000	38	0,010	44	0,136	50	0,540	56	0,903	62	0,994
33	0,000	39	0,018	45	0,184	51	0,618	57	0,933	63	0,997
34	0,001	40	0,028	46	0,242	52	0,691	58	0,956	64	0,998
35	0,002	41	0,044	47	0,309	53	0,758	59	0,972	65	0,999
36	0,003	42	0,067	48	0,382	54	0,816	60	0,982	66	1,000
37	0,006	43	0,097	49	0,460	55	0,864	61	0,990	67	1,000

A1 A: Genau 52 mal Kopf {0, ...51, **52**, 53, ..., 100}

$$P(A) = P(X = 52) = P(X \le 52) - P(X \le 51) = 0{,}691 - 0{,}618 = \underline{\underline{0{,}073}}$$

Die Wahrscheinlichkeit dafür, genau 52 mal Kopf zu werfen ist 0,073.

A1 B: Mindestens 43 mal Kopf {0, ...,42, **43**, **44**, **45**, ..., **100**}

$$P(B) = P(X \ge 43) = P(X \le 100) - P(X \le 42) = 1 - 0{,}067 = \underline{\underline{0{,}933}}$$

Die Wahrscheinlichkeit dafür, mindestens 43 mal Kopf zu werfen ist 0,933.

A1 C: Mindestens 38 mal und höchstens 56 mal Kopf
{0, ...,37, **38,..., 56**, 57, ..., 100}

$$P(C) = P(38 \le X \le 56) = P(X \le 56) - P(X \le 37) = 0{,}903 - 0{,}006 = \underline{\underline{0{,}897}}$$

Die Wahrscheinlichkeit dafür, mindestens 38 mal und höchstens 56 mal Kopf zu werfen ist 0,897.

A1 D: Weniger als 45 mal Kopf {**0, 1, ..., 44**, 45, 46, ..., 100}

$$P(D) = P(X \le 44) = \underline{\underline{0{,}136}}$$

Die Wahrscheinlichkeit dafür, weniger als 45 mal Kopf zu werfen ist 0,136.

A1 E: Mindestens 40 mal und höchstens 60 mal Kopf
{0, ...,39, **40,..., 60**, 61, ..., 100}

$$P(E) = P(40 \le X \le 60) = P(X \le 60) - P(X \le 39) = 0{,}982 - 0{,}018 = \underline{\underline{0{,}964}}$$

Die Wahrscheinlichkeit dafür, mindestens 40 mal und höchstens 60 mal Kopf zu werfen ist 0,964.

A1 F: Mehr als 47 mal Kopf {0, ...,47, **48**, **49**, **50**, ..., **100**}

$$P(F) = P(X > 47) = P(X \ge 48) = P(X \le 100) - P(X \le 47) = 1 - 0{,}309 = \underline{\underline{0{,}691}}$$

Die Wahrscheinlichkeit dafür, mehr als 47 mal Kopf zu werfen ist 0,691.

A1	G:	Mindestens 45 mal und höchstens 55 mal Kopf {0, ...,44, **45,..., 55**, 56, ..., 100} $P(G) = P(45 \le X \le 55) = P(X \le 55) - P(X \le 44) = 0,864 - 0,136 = \underline{\underline{0,728}}$ Die Wahrscheinlichkeit dafür, mindestens 45 mal und höchstens 55 mal Kopf zu werfen ist 0,728.

A1	H:	Genau 50 mal Kopf {0, ...49, **50**, 51, ..., 100} $P(H) = P(X = 50) = P(X \le 50) - P(X \le 49) = 0,540 - 0,460 = \underline{\underline{0,08}}$ Die Wahrscheinlichkeit dafür, genau 50 mal Kopf zu werfen ist 0,08.

A2	Ausführliche Lösungen	
	A:	In weniger als 60 Haushalten sind zwei Autos vorhanden. {**0, 1, ..., 59**, 60, ..., 100} $P(A) = P(X \le 59) = \underline{\underline{0,972}}$ Die Wahrscheinlichkeit dafür, dass in weniger als 60 Haushalten zwei Autos vorhanden sind, ist 0,972.

A2	B:	In genau 60 Haushalten sind zwei Autos vorhanden {0, ...59, **60**, 61, ..., 100} $P(B) = P(X = 60) = P(X \le 60) - P(X \le 59) = 0,982 - 0,972 = \underline{\underline{0,01}}$ Die Wahrscheinlichkeit dafür, dass in genau 60 Haushalten sind zwei Autos vorhanden sind, ist 0,01.

A2	C:	In mehr als 40 Haushalten sind zwei Autos vorhanden {0, ...,40, **41**, **42**, ..., **100**} $P(C) = P(X > 40) = P(X \ge 41) = P(X \le 100) - P(X \le 40) = 1 - 0,028 = \underline{\underline{0,972}}$ Die Wahrscheinlichkeit dafür, dass in mehr als 40 Haushalten sind zwei Autos vorhanden sind, ist 0,972.

A2	D:	In mindestens 40 und höchstens 60 Haushalten sind zwei Autos vorhanden {0, ...,39, **40,..., 60**, 61, ..., 100} $P(E) = P(40 \le X \le 60) = P(X \le 60) - P(X \le 39) = 0,982 - 0,018 = \underline{\underline{0,964}}$ Die Wahrscheinlichkeit dafür, dass in mindestens 40 und höchstens 60 Haushalten sind zwei Autos vorhanden sind, ist 0,964.

A3	Ausführliche Lösungen	
	a)	Binomialverteilung für $n = 200$ und $p = 0,24$ Erwartungswert: $\mu = n \cdot p = 200 \cdot 0,24 = \underline{\underline{48}}$ Standardabweichung: $\sigma = \sqrt{n \cdot p \cdot (1-p)} = \sqrt{200 \cdot 0,24 \cdot 0,76} \approx \underline{\underline{6,04}}$

A3	b)	Wahrscheinlichkeit der einfachen Sigma- Umgebung.
		Zu bestimmen ist $P(\mu - \sigma \le X \le \mu + \sigma)$ mit $\mu = 48$ und $\sigma \approx 6$ wird $\mu - \sigma \approx 48 - 6 = 42$ und $\mu + \sigma \approx 48 + 6 = 54$ und damit $P(42 \le X \le 54) = P(X \le 54) - P(X \le 41) = 0{,}859 - 0{,}140 = \underline{\underline{0{,}719}}$ Mit einer Wahrscheinlichkeit von etwa 0,719 (71,9%) liegt die Anzahl der Erfolge im Intervall [42 ; 54]. Das entspricht etwa der einfachen Sigma- Umgebung vom Erwartungswert.

A3	b)	Wahrscheinlichkeit der doppelten Sigma- Umgebung.
		Zu bestimmen ist $P(\mu - 2\sigma \le X \le \mu + 2\sigma)$ mit $\mu = 48$ und $\sigma \approx 6$ wird $\mu - 2\sigma \approx 48 - 12 = 36$ und $\mu + 2\sigma \approx 48 + 12 = 60$ und damit $P(36 \le X \le 60) = P(X \le 60) - P(X \le 35) = 0{,}979 - 0{,}017 = \underline{\underline{0{,}962}}$ Mit einer Wahrscheinlichkeit von etwa 0,962 (96,2%) liegt die Anzahl der Erfolge im Intervall [36 ; 60]. Das entspricht etwa der doppelten Sigma- Umgebung vom Erwartungswert.

A3	b)	Wahrscheinlichkeit der dreifachen Sigma- Umgebung.
		Zu bestimmen ist $P(\mu - 3\sigma \le X \le \mu + 3\sigma)$ mit $\mu = 48$ und $\sigma \approx 6$ wird $\mu - 3\sigma \approx 48 - 18 = 30$ und $\mu + 3\sigma \approx 48 + 18 = 66$ und damit $P(30 \le X \le 66) = P(X \le 66) - P(X \le 30) = 0{,}998 - 0{,}001 = \underline{\underline{0{,}997}}$ Mit einer Wahrscheinlichkeit von etwa 0,997 (99,7%) liegt die Anzahl der Erfolge im Intervall [30 ; 66]. Das entspricht etwa der dreifachen Sigma- Umgebung vom Erwartungswert.

A4	Ausführliche Lösung
	Liegt für die Binomialverteilung eine Tabelle mit den kumulierten Wahrscheinlichkeiten vor, lässt sich das Problem durch Einschachtelung lösen. Für die zwei Sigma- Umgebung, (im obigen Beispiel r = 12), war die Umgebungswahrscheinlichkeit etwa 96,2%.

Kumulierte Binomialverteilung für $n = 200$ und $p = 0{,}24$

k	$P(X \le k)$	k	$P(X \le k)$	k	$P(X \le k)$	k	$P(X \le k)$	k	$P(X \le k)$	k	$P(X \le k)$
28	0,000	35	0,017	42	0,182	49	0,603	56	0,918	63	0,994
29	0,001	36	0,026	43	0,230	50	0,665	57	0,940	64	0,996
30	0,001	37	0,038	44	0,284	51	0,722	58	0,957	65	0,998
31	0,002	38	0,055	45	0,344	52	0,774	59	0,969	66	0,998
32	0,004	39	0,077	46	0,407	53	0,819	60	0,979	67	0,999
33	0,007	40	0,106	47	0,473	54	0,859	61	0,986	68	0,999
34	0,011	41	0,140	48	0,539	55	0,892	62	0,990	69	1,000

A4

Für die 90% Wahrscheinlichkeit ist der Umgebungsradius geringer.
Ansatz mit r = 10.

μ	r	$\mu - r \le X \le \mu + r$	$P(X \le \mu + r) - P(X \le \mu - r - 1)$
48	10	$38 \le X \le 58$	$0{,}957 - 0{,}038 = 0{,}919$
48	9	$39 \le X \le 57$	$0{,}940 - 0{,}055 = 0{,}885$

Der gesuchte Radius liegt zwischen den Werten 9 und 10. Da es sich bei der Binomialverteilung um eine diskrete Verteilung handelt, muss man sich für den Radius entscheiden, der der gewünschten Wahrscheinlichkeit am nächsten liegt. In diesem Fall ist das der Radius r = 9. Teilt man diesen Wert durch Sigma, dann lässt sich der Radius als vielfaches von Sigma darstellen.

$$\frac{r}{\sigma} = \frac{9}{6{,}04} \approx 1{,}49 \Rightarrow \underline{\underline{r \approx 1{,}49\sigma}}$$

In einer $1{,}49\sigma$ Umgebung liegen etwa 88,5% aller Erfolge.

A4

Für die 95% Wahrscheinlichkeit wird der Ansatz mit r = 12 versucht.

μ	r	$\mu - r \le X \le \mu + r$	$P(X \le \mu + r) - P(X \le \mu - r - 1)$
48	12	$36 \le X \le 60$	$0{,}979 - 0{,}017 = 0{,}962$
48	11	$37 \le X \le 59$	$0{,}969 - 0{,}026 = 0{,}943$

Der gesuchte Radius liegt zwischen den Werten 11 und 12.
Der Radius r = 11 liegt der gewünschten Wahrscheinlichkeit am nächsten.

$$\frac{r}{\sigma} = \frac{11}{6{,}04} \approx 1{,}82 \Rightarrow \underline{\underline{r \approx 1{,}82\sigma}}$$

In einer $1{,}82\sigma$ Umgebung liegen etwa 94,3% aller Erfolge.

A4

Für die 99% Wahrscheinlichkeit wird der Ansatz mit r = 14 versucht.

μ	r	$\mu - r \le X \le \mu + r$	$P(X \le \mu + r) - P(X \le \mu - r - 1)$
48	14	$34 \le X \le 62$	$0{,}990 - 0{,}007 = 0{,}983$
48	15	$33 \le X \le 63$	$0{,}994 - 0{,}004 = 0{,}99$

Der gesuchte Radius hat den Wert r = 15

$$\frac{r}{\sigma} = \frac{15}{6{,}04} \approx 2{,}48 \Rightarrow \underline{\underline{r \approx 2{,}48\sigma}}$$

In einer $2{,}48\sigma$ Umgebung liegen etwa 99% aller Erfolge.