Lösungen zur Binomialverteilung II

Ausführliche Lösungen:

A1 Ausführliche Lösung

Das Problem kann als 6- stufiger Bernoulli- Versuch betrachtet werden mit n = 6 und p = 0,5. Gesucht ist P(X = k) für k = 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6

$$P(X=k)=\binom{n}{k}\cdot p^k\cdot(1-p)^{n-k}$$

$$P(X=0)=\binom{6}{0}\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^3\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^3=1\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^6=1\cdot\frac{1}{64}=\frac{1}{64}=\underline{\underline{0{,}015625}}$$

$$P(X=1)=\binom{6}{1}\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^3\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^3=6\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^6=6\cdot\frac{1}{64}=\frac{6}{64}=\underline{\underline{0{,}09375}}$$

$$P(X=2)=\binom{6}{2}\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^3\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^3=15\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^6=15\cdot\frac{1}{64}=\frac{15}{64}=\underline{\underline{0{,}234375}}$$

$$P(X=3)=\binom{6}{3}\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^3\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^3=\frac{6\cdot5\cdot4}{3\cdot2\cdot1}\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^6=20\cdot\frac{1}{64}=\underline{\underline{0{,}3125}}$$

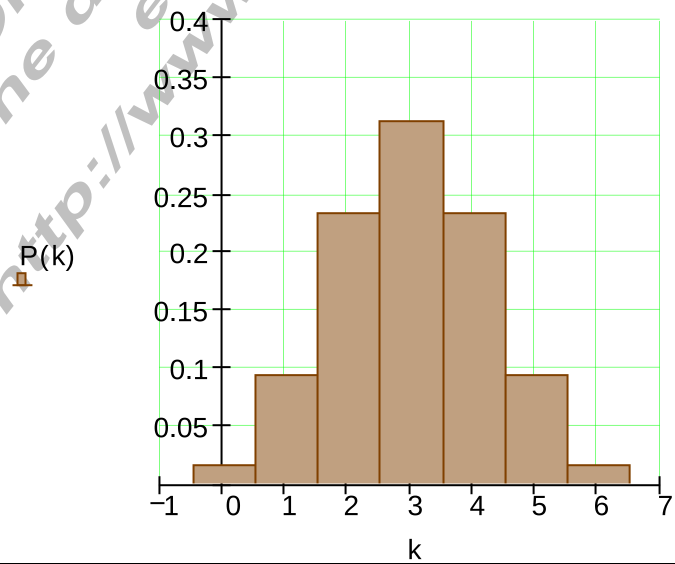
$$P(X=4)=\binom{6}{4}\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^3\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^3=15\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^6=15\cdot\frac{1}{64}=\frac{15}{64}=\underline{\underline{0{,}234375}}$$

$$P(X=5)=\binom{6}{5}\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^3\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^3=6\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^6=6\cdot\frac{1}{64}=\frac{6}{64}=\underline{\underline{0{,}09375}}$$

$$P(X=6)=\binom{6}{6}\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^3\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^3=1\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^6=1\cdot\frac{1}{64}=\frac{1}{64}=\underline{\underline{0{,}015625}}$$

A1 Ausführliche Lösung

Histogramm der Wahrscheinlichkeitsverteilung



A1 Ausführliche Lösung

$P(A) = P(X = 3) = \underline{\underline{0{,}3125}}$

ist die Wahrscheinlichkeit dafür, dass unter den 6 Kindern genau drei Mädchen sind.

$P(B) = P(X \le 3) = P(X = 0) + P(X = 1) + P(X = 2) + P(X = 3)$

$= \frac{1}{64} + \frac{6}{64} + \frac{15}{64} + \frac{20}{64} = \frac{42}{64} = \frac{21}{32} = \underline{\underline{0{,}65625}}$

ist die Wahrscheinlichkeit dafür, dass unter den 6 Kindern höchstens drei Mädchen sind.

$P(C) = P(X \ge 3) = P(X = 3) + P(X = 4) + P(X = 5) + P(X = 6)$

$= \frac{20}{64} + \frac{15}{64} + \frac{6}{64} + \frac{1}{64} = \frac{42}{64} = \frac{21}{32} = \underline{\underline{0{,}65625}}$

ist die Wahrscheinlichkeit dafür, dass unter den 6 Kindern mindestens drei Mädchen sind.

A2 Ausführliche Lösung

Das Problem kann als 5- stufiger Bernoulli- Versuch betrachtet werden mit n = 5 und p = 0,5.

a) Gesucht ist P(X = k) für k = 0, 1, 2, 3, 4, 5

k	$P(X = k)$
0	$\binom{5}{0}\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^{0}\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^{5-0} = 1\cdot1\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^{5} = \frac{1}{2^5} = \frac{1}{32}$
1	$\binom{5}{1}\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^{1}\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^{5-1} = \frac{5}{1}\cdot\left(\frac{1}{2}\right)\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^{4} = 5\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^{5} = 5\cdot\frac{1}{2^5} = \frac{5}{32}$
2	$\binom{5}{2}\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^{2}\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^{5-2} = \frac{5\cdot4}{2\cdot1}\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^{2}\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^{3} = 10\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^{5} = 10\cdot\frac{1}{2^5} = \frac{10}{32}$
3	$\binom{5}{3}\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^{3}\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^{5-3} = \frac{5\cdot4\cdot3}{3\cdot2\cdot1}\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^{3}\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^{2} = 10\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^{5} = 10\cdot\frac{1}{2^5} = \frac{10}{32}$
4	$\binom{5}{4}\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^{4}\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^{5-4} = \frac{5\cdot4\cdot3\cdot2}{4\cdot3\cdot2\cdot1}\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^{4}\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^{1} = 5\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^{5} = 5\cdot\frac{1}{2^5} = \frac{5}{32}$
5	$\binom{5}{5}\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^{5}\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^{5-5} = \frac{5\cdot4\cdot3\cdot2\cdot1}{5\cdot4\cdot3\cdot2\cdot1}\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^{5}\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^{0} = 1\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^{5}\cdot1 = 1\cdot\frac{1}{2^5} = \frac{1}{32}$

A2 Ausführliche Lösung

b)

(1) Höchstens 3 mal Wappen bedeutet:

$$P(X \le 3) = \frac{1}{32} + \frac{5}{32} + \frac{10}{32} + \frac{10}{32} = \frac{26}{32} = \underline{\underline{0{,}8125}}$$

(2) Weniger als 3 mal Wappen bedeutet:

$$P(X < 3) = \frac{1}{32} + \frac{5}{32} + \frac{10}{32} = \frac{16}{32} = \underline{\underline{0{,}5}}$$

(3) Mindestens 1 mal Wappen bedeutet:

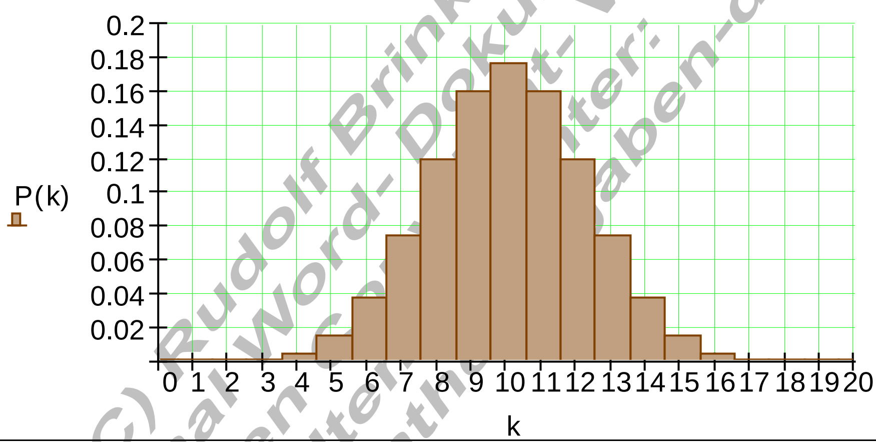
$$P(X \ge 1) = \frac{5}{32} + \frac{10}{32} + \frac{10}{32} + \frac{5}{32} + \frac{1}{32} = \frac{31}{32} = \underline{\underline{0{,}96875}}$$

(4) Mehr als 1 mal Wappen bedeutet:

$$P(X > 1) = \frac{10}{32} + \frac{10}{32} + \frac{5}{32} + \frac{1}{32} = \frac{26}{32} = \underline{\underline{0{,}8125}}$$

A3 Ausführliche Lösung

a) Histogramm der Binomialverteilung für n = 20 und p = 0,5



A3 Ausführliche Lösung

b)

(1) Die Wahrscheinlichkeit P(X = 10) kann aus der Tabelle, bzw. aus dem Histogramm abgelesen werden.
Die Wahrscheinlichkeit für das Ereignis 10 mal Wappen beträgt:

$$P(X = 10) \approx \underline{\underline{0{,}176}}$$

A3 Ausführliche Lösung

b) (2)

Die Wahrscheinlichkeit für das Ereignis E: Höchstens 15 mal Wappen, kann nicht unmittelbar abgelesen werden. Dazu müssen die Tabellenwerte der Wahrscheinlichkeiten aufaddiert werden.

P(X = 0) + P(X = 1) + ... + P(X = 15)

Hat man jedoch eine Tabelle in der die Wahrscheinlichkeiten bereits aufaddiert wurden, also eine kumulierte Tabelle, dann kann man die Wahrscheinlichkeit für E daraus sofort ablesen.

k	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
$P(X=k)$	0	0	0	0,001	0.005	0,015	0,037	0,074	0,12	0,16	0,176
$P(X\le k)$	0	0	0	0,001	0,006	0,021	0,058	0,132	0,252	0,412	0,588
k	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	
$P(X=k)$	0,16	0,12	0,074	0,037	0,015	0,005	0,001	0	0	0	
$P(X\le k)$	0,748	0,868	0,942	0,979	0,994	0,999	1	1	1	1	

Bemerkung: Für k < 3 ist die kumulierte Wahrscheinlichkeit natürlich nicht Null. Ebenso sind die Werte für k < 20 auch nicht 1. Sie unterscheiden sich aber kaum noch von diesen Werten, so dass man in den meisten Fällen für praktische Berechnungen die gerundeten Tabellenwerte verwenden kann.

Höchstens 15 mal bedeutet $P(X\le 15)\approx \underline{\underline{0,994}}$

A3 Ausführliche Lösung

b) (3)

Mindestens 7 mal bedeutet:

$P(X\ge 7)=P(X=20)-P(X\le 6)\approx 1-0,058=\underline{\underline{0,942}}$

A3 Ausführliche Lösung

b) (4)

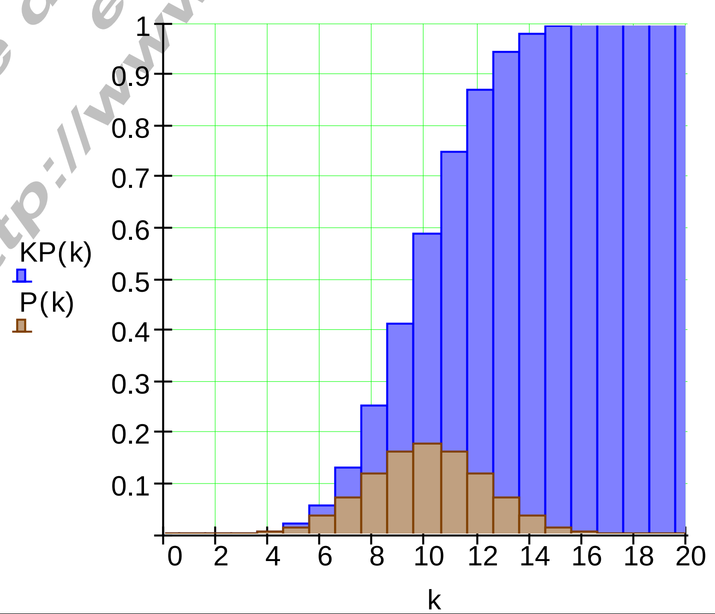
Mindestens 6 mal und höchstens 16 mal bedeutet

$P(6,7,...16)=P(X\le 16)-P(X\le 5)\approx 0,999-0,021=\underline{\underline{0,978}}$

A3 Ausführliche Lösung

c)

Histogramm der kumulierten Wahrscheinlichkeitsverteilung



A4	Ausführliche Lösungen	
	a)	$P(X \geq 21) = P(X = 50) - P(X \leq 20) = 1 - 1 = \underline{\underline{0}}$ Die Wahrscheinlichkeit durch bloßes Raten mehr als 20 Aufgaben richtig zu beantworten ist kleiner als 0,001 (0,1%).

A4	b)	$P(10 \leq k \leq 20) = P(X \leq 20) - P(X \leq 9) = 1 - 0,444 = \underline{\underline{0,565}}$ Die Wahrscheinlichkeit durch bloßes Raten mindestens 10 und höchstens 20 Aufgaben richtig zu beantworten ist 0,565 (56,5%).

A4	c)	$P(X \leq 9) = \underline{\underline{0,444}}$ direkt aus der Tabelle ablesbar. Die Wahrscheinlichkeit durch bloßes Raten weniger als 10 Aufgaben richtig zu beantworten ist 0,444 (44,4%).

A4	d)	$P(X = 15) = P(X \leq 15) - P(X \leq 14) = 0,969 - 0,939 = \underline{\underline{0,03}}$ Die Wahrscheinlichkeit durch bloßes Raten genau 15 Aufgaben richtig zu beantworten ist 0,03 (3%).