

Lösungen zur Binomialverteilung I

Ergebnisse:

E1	<p>Ergebnis</p> <p>Ein Bernoulli-Experiment ist ein Zufallsexperiment, das nur zwei Ergebnisse hat. Die Ergebnisse werden Erfolg (Treffer) oder Misserfolg (kein Treffer) genannt.</p> <p>Die Trefferwahrscheinlichkeit ist die Wahrscheinlichkeit für einen Treffer (p). Eine Bernoullikette entsteht, wenn dasselbe Bernoulli-Experiment mehrmals nacheinander ausgeführt wird.</p> <p>Die Länge einer Bernoullikette gibt an, wie oft das einzelne Experiment nacheinander ausgeführt wird.</p>
E2	<p>Ergebnisse</p> <p>a) Bernoullikette; $n = 3$; Treffer: 6; $p = 1/6$.</p> <p>b) Keine Bernoullikette.</p> <p>c) Keine Bernoullikette.</p> <p>d) Bernoullikette; $n = 4$; Treffer: weiß $p = 3/10$; Treffer: rot $p = 7/10$.</p> <p>e) Keine Bernoullikette.</p> <p>f) Bernoullikette; $n = 8$; Treffer: Zahl 3; $p = 0,25$.</p> <p>g) Bernoullikette; Treffer: 3; $p = 0,25$; Kettenlänge maximal 5.</p>
E3	<p>Ergebnisse</p> $P(A) = P(X = 3) = \frac{8}{81} \approx \underline{\underline{0,0988}} \quad P(B) = P(X \geq 3) = \frac{1}{9} = \underline{\underline{0,1}}$ $P(C) = P(X \leq 1) = \frac{48}{81} \approx \underline{\underline{0,5926}} \quad P(D) = P(X \leq 3) = \frac{80}{81} \approx \underline{\underline{0,9877}}$
E4	<p>Ergebnis</p> $P(A) = P(X = 1) = \underline{\underline{0,4096}}; P(B) = P(X = 0) = \underline{\underline{0,32768}}; P(C) = P(X \geq 2) = \underline{\underline{0,26272}}$
E5	<p>Ergebnis</p> $P(A) = P(X = 2) \approx \underline{\underline{0,3747}} \quad P(B) = P(X \leq 3) \approx \underline{\underline{0,9424}}$
E6	<p>Ergebnis</p> <p>Die Münze muss mindestens 7 mal geworfen werden, um mit einer Sicherheit von mindestens 99% mindestens einmal Kopf zu erhalten.</p>
E7	<p>Ergebnis</p> <p>Man muss mindestens 13 mal würfeln, um mit einer Wahrscheinlichkeit von mindestens 90% mindestens eine 6 zu werfen.</p>

E8	Ergebnisse	
A:	Man wirft genau 10 mal die 6.	$P(A) = P(X = 10) \approx 0,137$
B:	Man wirft mindestens 10 mal die 6.	$P(B) = P(X \geq 10) \approx 0,554$
C:	Man wirft höchstens 10 mal die 6.	$P(C) = P(X \leq 10) \approx 0,583$
D:	Die Anzahl der geworfenen Sechser liegt zwischen 6 und 12 einschließlich.	$P(D) = P(6 \leq X \leq 12) \approx 0,759$
E:	Man wirft mehr als 4 und weniger als 15 Sechser.	$P(E) = P(5 \leq X \leq 14) \approx 0,915$
F:	Die Augenzahl ist in weniger als 25 Fällen ungerade.	$P(F) = P(X \leq 24) \approx 0,078$
G:	Die Augenzahl ist in mehr als 30 Fällen gerade.	$P(G) = P(X \geq 31) \approx 0,449$
H:	Es treten mehr als 25 und weniger als 35 ungerade Augenzahlen auf.	$P(H) = P(26 \leq X \leq 34) \approx 0,754$

(C) Rudolf Brinkmann
Original Word-Dokumente
ohne diesen Copyright-Vermerk
erhalten Sie unter:
<http://www.matheaufgaben-du.de>

Ausführliche Lösungen:

A1	<p>Ausführliche Lösung</p> <p>Ein Bernoulli-Experiment ist ein Zufallsexperiment, das nur zwei Ergebnisse hat.</p> <p>Die Ergebnisse werden Erfolg (Treffer) oder Misserfolg (kein Treffer) genannt. Die Trefferwahrscheinlichkeit ist die Wahrscheinlichkeit für einen Treffer (p). Eine Bernoullikette entsteht, wenn dasselbe Bernoulli-Experiment mehrmals nacheinander ausgeführt wird.</p> <p>Die Länge einer Bernoullikette gibt an, wie oft das einzelne Experiment nacheinander ausgeführt wird.</p> <p>Beispiel: Eine Münze wird 100 mal nacheinander geworfen. Der Münzwurf ist ein Bernoulli-Experiment, es gibt zwei Ergebnisse, Zahl und Kopf. Die Trefferwahrscheinlichkeit ist $p = 0,5$. Da der Münzwurf 100 mal wiederholt wird, spricht man bei diesem Experiment von einer Bernoullikette. Die Länge dieser Bernoullikette beträgt $n = 100$.</p>
A2	<p>Ausführliche Lösungen</p> <p>a) Es handelt sich um eine Bernoullikette der Länge $n = 3$. Als Treffer bezeichnet man das Ereignis 6. Die Trefferwahrscheinlichkeit ist in jeder Stufe gleich $p = 1/6$.</p>
A2	<p>b) Es handelt sich um keine Bernoullikette, da es in jeder Stufe 6 verschiedene Ergebnisse geben kann. $\{ 1; 2; 3; 4; 5; 6 \}$. Für eine Bernoullikette dürften es nur zwei sein.</p>
A2	<p>c) Es handelt sich um keine Bernoullikette, da die Kugeln nicht zurückgelegt werden und sich dadurch die Wahrscheinlichkeit von Stufe zu Stufe ändert. Für eine Bernoullikette muss die Wahrscheinlichkeit für einen Treffer in jeder Stufe gleich sein.</p>
A2	<p>d) Es handelt sich um eine Bernoullikette der Länge $n = 4$. Die Wahrscheinlichkeit für Treffer weiß ist durch das Zurücklegen konstant $p = 3/10$, für Treffer rot $p = 7/10$.</p>
A2	<p>e) Es handelt sich um keine Bernoullikette, da es in jeder Stufe drei Ergebnisse geben kann $\{ 1; 2; 3 \}$. Für eine Bernoullikette darf es nur zwei Ergebnisse pro Stufe geben.</p>
A2	<p>f) Es handelt sich um eine Bernoullikette der Länge $n = 8$. Als Treffer wird die Zahl 3 mit $p = 0,25$ festgelegt. In jeder Stufe bleibt die Wahrscheinlichkeit konstant.</p>
A2	<p>g) Es handelt sich um eine Bernoullikette mit nichtfestgelegter Länge. Als Treffer wird die Zahl 3 mit der Wahrscheinlichkeit $p = 0,25$ festgelegt. Die maximale Kettenlänge beträgt 5.</p>

A3	Ausführliche Lösungen	
	A:	$P(A) = P(X = 3) = \binom{4}{3} \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^3 \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^1 = 4 \cdot \frac{1}{27} \cdot \frac{2}{3} = \frac{8}{81} \approx \underline{\underline{0,0988}}$ <p>Die Wahrscheinlichkeit dafür, dass genau dreimal Stern auftritt, ist 0,0988.</p>
A3	B:	$P(B) = P(X \geq 3) = P(X = 3) + P(X = 4)$ $= \frac{8}{81} + \binom{4}{4} \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^4 \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^0 = \frac{8}{81} + 1 \cdot \frac{1}{81} \cdot 1 = \frac{8}{81} + \frac{1}{81} = \frac{9}{81} = \frac{1}{9} = \underline{\underline{0,1}}$ <p>Die Wahrscheinlichkeit dafür, dass mindestens dreimal Stern auftritt, ist 0,1111....</p>
A3	C:	$P(C) = P(X \leq 1) = P(X = 0) + P(X = 1)$ $= \binom{4}{0} \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^0 \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^4 + \binom{4}{1} \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^1 \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^3$ $= 1 \cdot 1 \cdot \frac{16}{81} + 4 \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{8}{27} = \frac{16}{81} + \frac{32}{81} = \frac{48}{81} \approx \underline{\underline{0,5926}}$ <p>Die Wahrscheinlichkeit dafür, dass höchstens einmal Stern auftritt, ist 0,5926.</p>
A3	D:	$P(D) = P(X \leq 3) = P(X \leq 4) - P(X = 4) = 1 - P(X = 4)$ $= 1 - \binom{4}{4} \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^4 \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^0 = 1 - 1 \cdot \frac{1}{81} \cdot 1 = \frac{81}{81} - \frac{1}{81} = \frac{80}{81} \approx \underline{\underline{0,9877}}$ <p>Die Wahrscheinlichkeit dafür, dass höchstens dreimal Stern auftritt, ist 0,9877.</p>
A4	Ausführliche Lösungen	
	Treffer: Apfelsine ist verdorben, $n = 5$; $p = 20\% \Rightarrow p = \frac{1}{5}$	
A4	A:	$P(A) = P(X = 1) = \binom{5}{1} \cdot \left(\frac{1}{5}\right)^1 \cdot \left(\frac{4}{5}\right)^4 = 5 \cdot \frac{1}{5} \cdot \frac{256}{625} = \frac{1280}{3125} = \frac{256}{625} = \underline{\underline{0,4096}}$ <p>Die Wahrscheinlichkeit dafür, dass genau eine Apfelsine verdorben ist, ist 0,4096.</p>
A4	B:	<p>B: Alle Apfelsinen sind in Ordnung, bedeutet, keine Apfelsine ist verdorben.</p> $P(B) = P(X = 0) = \binom{5}{0} \cdot \left(\frac{1}{5}\right)^0 \cdot \left(\frac{4}{5}\right)^5 = 1 \cdot 1 \cdot \frac{1024}{3125} = \underline{\underline{0,32768}}$ <p>Die Wahrscheinlichkeit dafür, dass alle Apfelsinen in Ordnung sind, ist 0,32768.</p>

A4	C:	$P(C) = P(X \leq 5) - P(X = 1) - P(X = 0)$ $= 1 - \frac{1280}{3125} - \frac{1024}{3125} = \frac{3125 - 1280 - 1024}{3125} = \frac{821}{3125} = \underline{\underline{0,26272}}$ <p>Die Wahrscheinlichkeit dafür, dass mindestens zwei Apfelsinen verdorben sind, ist 0,26272.</p>
----	----	-----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------

A5	Ausführliche Lösungen	
	A:	$P(A) = P(X = 2) = \binom{4}{2} \cdot \left(\frac{49}{100}\right)^2 \cdot \left(\frac{51}{100}\right)^2 = 6 \cdot \left(\frac{49 \cdot 51}{100 \cdot 100}\right)^2$ $= 6 \cdot \frac{6.245.001}{100.000.000} = \frac{37.470.006}{100.000.000} \approx \underline{\underline{0,3747}}$ <p>Die Wahrscheinlichkeit dafür, dass in der Familie genau zwei Mädchen sind, ist 0,3747.</p>

A5	B:	$P(B) = P(X \leq 3) = P(X \leq 4) - P(X = 4) = 1 - P(X = 4) = 1 - \binom{4}{4} \cdot \left(\frac{49}{100}\right)^4 \cdot \left(\frac{51}{100}\right)^0$ $= 1 - 1 \cdot \left(\frac{49}{100}\right)^4 \cdot 1 = 1 - \frac{5.764.801}{100.000.000} = \frac{100.000.000 - 5.764.801}{100.000.000}$ $= \frac{94.235.199}{100.000.000} \approx \underline{\underline{0,9424}}$ <p>Die Wahrscheinlichkeit dafür, dass in der Familie höchstens drei Mädchen sind, ist 0,9424.</p>
----	----	-----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------

A6	Ausführliche Lösung	
	<p>Die Wahrscheinlichkeit für Kopf und Zahl sei gleich ($p = 0,5$). Das Gegenereignis von mindestens einmal Kopf ist keinmal Zahl. Es gilt also $P(X \geq 1) \geq 0,99$ bzw. für das Gegenereignis $P(X = 0) \leq 0,01$</p> $P(X = 0) = \binom{n}{0} \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^0 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{n-0} = 1 \cdot 1 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^n = \left(\frac{1}{2}\right)^n$ $P(X = 0) \leq 0,01 \Leftrightarrow \left(\frac{1}{2}\right)^n \leq 0,01 \mid \text{logarithmieren z. B. mit } \ln$ $\Leftrightarrow n \cdot \ln\left(\frac{1}{2}\right) \leq \ln(0,01) \mid : \ln\left(\frac{1}{2}\right) \text{ (berücksichtigen dass } \ln\left(\frac{1}{2}\right) \text{ negativ ist)}$ $\Leftrightarrow n \geq \frac{\ln(0,01)}{\ln\left(\frac{1}{2}\right)} \approx 6,64$ <p>Die Münze muss mindestens 7 mal geworfen werden, um mit einer Sicherheit von mindestens 99% mindestens einmal Kopf zu erhalten.</p>	

A7	<p>Ausführliche Lösung</p> <p>A: Mindestens eine 6 bei n Würfeln. $E = \{ 1; 2; 3; \dots n \}$ $p = 1/6$ Das Gegenereignis von A lautet: Keine 6 bei n Würfeln.</p> $P(A) = 1 - P(\bar{A}) = 1 - \binom{n}{0} \cdot \left(\frac{1}{6}\right)^0 \cdot \left(\frac{5}{6}\right)^n = 1 - 1 \cdot 1 \cdot \left(\frac{5}{6}\right)^n = 1 - \left(\frac{5}{6}\right)^n$ $P(A) \geq 0,9 \Leftrightarrow 1 - \left(\frac{5}{6}\right)^n \geq 0,9 -1$ $\Leftrightarrow -\left(\frac{5}{6}\right)^n \geq -0,1 \cdot (-1)$ $\Leftrightarrow \left(\frac{5}{6}\right)^n \leq 0,1 \text{logarithmieren}$ $\Leftrightarrow \ln\left(\frac{5}{6}\right)^n \leq \ln(0,1) \text{umformen}$ $\Leftrightarrow n \cdot \ln\left(\frac{5}{6}\right) \leq \ln(0,1) : \ln\left(\frac{5}{6}\right) \quad \ln\left(\frac{5}{6}\right) < 1$ $\Leftrightarrow n \geq \frac{\ln(0,1)}{\ln\left(\frac{5}{6}\right)} \approx 12,6$ <p>Man muss mindestens 13 mal würfeln, um mit einer Wahrscheinlichkeit von mindestens 90% mindestens eine 6 zu werfen.</p>
----	------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------

A8	<p>Ausführliche Lösungen</p> <p>Kumulierte Binomialverteilung für $n = 60$ und $p = \frac{1}{6}$</p> <table border="1" style="width: 100%; text-align: center;"> <thead> <tr> <th>k</th><th>P(X ≤ k)</th><th>k</th><th>P(X ≤ k)</th><th>k</th><th>P(X ≤ k)</th><th>k</th><th>P(X ≤ k)</th><th>k</th><th>P(X ≤ k)</th><th>k</th><th>P(X ≤ k)</th></tr> </thead> <tbody> <tr> <td>0</td><td>0,000</td><td>4</td><td>0,020</td><td>8</td><td>0,312</td><td>12</td><td>0,810</td><td>16</td><td>0,984</td><td>20</td><td>1,000</td></tr> <tr> <td>1</td><td>0,000</td><td>5</td><td>0,051</td><td>9</td><td>0,446</td><td>13</td><td>0,885</td><td>17</td><td>0,993</td><td>21</td><td>1,000</td></tr> <tr> <td>2</td><td>0,001</td><td>6</td><td>0,108</td><td>10</td><td>0,583</td><td>14</td><td>0,935</td><td>18</td><td>0,997</td><td>22</td><td>1,000</td></tr> <tr> <td>3</td><td>0,006</td><td>7</td><td>0,196</td><td>11</td><td>0,708</td><td>15</td><td>0,966</td><td>19</td><td>0,999</td><td>23</td><td>1,000</td></tr> </tbody> </table>	k	P(X ≤ k)	k	P(X ≤ k)	k	P(X ≤ k)	k	P(X ≤ k)	k	P(X ≤ k)	k	P(X ≤ k)	0	0,000	4	0,020	8	0,312	12	0,810	16	0,984	20	1,000	1	0,000	5	0,051	9	0,446	13	0,885	17	0,993	21	1,000	2	0,001	6	0,108	10	0,583	14	0,935	18	0,997	22	1,000	3	0,006	7	0,196	11	0,708	15	0,966	19	0,999	23	1,000
k	P(X ≤ k)	k	P(X ≤ k)	k	P(X ≤ k)	k	P(X ≤ k)	k	P(X ≤ k)	k	P(X ≤ k)																																																		
0	0,000	4	0,020	8	0,312	12	0,810	16	0,984	20	1,000																																																		
1	0,000	5	0,051	9	0,446	13	0,885	17	0,993	21	1,000																																																		
2	0,001	6	0,108	10	0,583	14	0,935	18	0,997	22	1,000																																																		
3	0,006	7	0,196	11	0,708	15	0,966	19	0,999	23	1,000																																																		

A8	<p>A: Man wirft genau 10 mal die 6. $P(A) = P(X = 10) = P(X \leq 10) - P(X \leq 9) = 0,583 - 0,446 = 0,137$</p>
----	----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------

A8	<p>B: Man wirft mindestens 10 mal die 6. $P(B) = P(X \geq 10) = 1 - P(X \leq 9) = 1 - 0,446 = 0,554$</p>
----	---------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------

A8	<p>C: Man wirft höchstens 10 mal die 6. $P(C) = P(X \leq 10) = 0,583$ aus der Tabelle abgelesen</p>
----	----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------

A8	<p>D: Die Anzahl der geworfenen Sechser liegt zwischen 6 und 12 einschließlich. $P(D) = P(6 \leq X \leq 12) = P(X \leq 12) - P(X \leq 5) = 0,810 - 0,051 = 0,759$</p>
----	----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------

A8	E:	Man wirft mehr als 4 und weniger als 15 Sechser. $P(E) = P(5 \leq X \leq 14) = P(X \leq 14) - P(X \leq 4) = 0,935 - 0,020 = 0,915$
A8	F:	Die Augenzahl ist in weniger als 25 Fällen ungerade. $P(F) = P(X \leq 24) = 0,078$ aus der Tabelle abgelesen
A8	G:	Die Augenzahl ist in mehr als 30 Fällen gerade. $P(G) = P(X \geq 31) = 1 - P(X \leq 30) = 1 - 0,551 = 0,449$
A8	H:	Es treten mehr als 25 und weniger als 35 ungerade Augenzahlen auf. $P(H) = P(26 \leq X \leq 34) = P(X \leq 34) - P(X \leq 25) = 0,877 - 0,123 = 0,754$

(C) Rudolf Brinkmann
Original Word- Dokumente
ohne diesen Copyright- Vermerk
erhalten Sie unter:
<http://www.matheaufgaben-du.de>