Lösungen Stichproben und Zählstrategien III

Ausführliche Lösungen:

A1	Ausführliche Lösungen
	Die Urne enthält insgesamt 14 Buchstaben: $1\cdot A \quad 4\cdot E \quad 5\cdot N \quad 1\cdot O$ und $3\cdot T$

A1	Ausführliche Lösungen	
	a)	A bedeutet $EE \vee NN \vee TT \Rightarrow P(A) = P(EE) + P(NN) + P(TT)$ $P(A) = \frac{\binom{4}{2}}{\binom{14}{2}} + \frac{\binom{5}{2}}{\binom{14}{2}} + \frac{\binom{3}{2}}{\binom{14}{2}} = \underline{\underline{\frac{19}{91} \approx 0{,}209}}$ Die Wahrscheinlichkeit dafür, dass auf beiden Karten die Buchstaben gleich sind ist 0,209. B bedeutet $NN \vee TT \vee NT \Rightarrow P(B) = P(NN) + P(TT) + P(NT)$ $P(B) = \frac{\binom{5}{2}}{\binom{14}{2}} + \frac{\binom{3}{2}}{\binom{14}{2}} + \frac{\binom{5}{1}\cdot\binom{3}{1}}{\binom{14}{2}} = \underline{\underline{\frac{28}{91} = \frac{4}{13} \approx 0{,}307}}$ Die Wahrscheinlichkeit dafür, dass auf beiden Karten die Buchstaben Konsonanten sind ist 0,307. $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$ mit $A \cap B = NN \vee TT$ $P(A \cap B) = \frac{\binom{5}{2}}{\binom{14}{2}} + \frac{\binom{3}{2}}{\binom{14}{2}} = \frac{13}{91} \Rightarrow P(A \cup B) = \frac{19}{91} + \frac{28}{91} - \frac{13}{91} = \underline{\underline{\frac{34}{91} \approx 0{,}374}}$ Die Wahrscheinlichkeit dafür, dass auf beiden Karten die Buchstaben gleich oder Konsonanten sind ist 0,374. $P_B(A) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} = \frac{13}{91} : \frac{28}{91} = \underline{\underline{\frac{13}{28} \approx 0{,}464}}$ Wenn man weiß, dass die Buchstaben auf beiden Karten Konsonanten sind, dann ist die Wahrscheinlichkeit dafür, das es sich um gleiche Buchstaben handelt 0,464.

A1	Ausführliche Lösungen	
	b)	5 Karten angeordnet bilden das Wort TANNE $P(\text{TANNE}) = \frac{3}{14} \cdot \frac{1}{13} \cdot \frac{5}{12} \cdot \frac{4}{11} \cdot \frac{4}{10} = \underline{\underline{\frac{1}{1001} \approx 0,001}}$ Die Wahrscheinlichkeit dafür, dass das Wort **TANNE** entsteht, ist etwa 0,001.

A1	Ausführliche Lösungen	
	c)	5 Karten mit einem Griff. Benötigt werden: $TT \wedge A \wedge N \wedge E$ $P(\text{TANTE}) = \frac{\binom{3}{2} \cdot \binom{1}{1} \cdot \binom{5}{1} \cdot \binom{4}{1}}{\binom{14}{5}} = \underline{\underline{\frac{30}{1001} \approx 0,03}}$ Die Wahrscheinlichkeit dafür, dass das Wort **TANTE** legen lässt, ist etwa 0,03.

A1	Ausführliche Lösungen
d)	Unter den 14 Buchstaben gibt es 6 Vokale und 8 Konsonanten. Die Werte der Zufallsvariablen X sind:

	1 Vokal	2 Vokale	3 Vokale ohne EEE	EEE	kein Vokal
$X = x_i$	1	7	21	28	0

Deren Wahrscheinlichkeit ist:

$$P(X = x_1) = \frac{\binom{6}{1}\cdot\binom{8}{2}}{\binom{14}{3}} = \frac{42}{91} \text{ für 1 Vokal und 2 Konsonanten}$$

$$P(X = x_2) = \frac{\binom{6}{2}\cdot\binom{8}{1}}{\binom{14}{3}} = \frac{30}{91} \text{ für 2 Vokale und 1 Konsonanten}$$

$$P(X = x_4) = \frac{\binom{4}{3}}{\binom{14}{3}} = \frac{1}{91} \text{ für EEE}$$

$$P(X = x_3) = \frac{\binom{6}{3}}{\binom{14}{3}} - \frac{1}{91} = \frac{4}{91} \text{ für 3 Vokale ohne EEE}$$

$$P(X = x_5) = \frac{\binom{8}{3}}{\binom{14}{3}} = \frac{14}{91} \text{ für 3 Konsonanten}$$

Wahrscheinlichkeiten der Zufallsvariablen und Berechnung des Erwartungswerts:

$X = x_i$	0	1	7	21	28
$P(X = x_i)$	$\frac{14}{91}$	$\frac{42}{91}$	$\frac{30}{91}$	$\frac{4}{91}$	$\frac{1}{91}$

$$E(X) = \sum_i x_i \cdot P(X = x_i) = 0\cdot\frac{14}{91} + 1\cdot\frac{42}{91} + 7\cdot\frac{30}{91} + 21\cdot\frac{4}{91} + 28\cdot\frac{1}{91} = \frac{364}{91} = \underline{\underline{4}}$$

Bei einem Einsatz von 4 € ist das Spiel fair.

A1	Ausführliche Lösungen		
	e)	(1):	6 Vokale und 8 Konsonanten befinden sich in der Urne. $$P(VV \vee KK) = P(VV) + P(KK) = \frac{\binom{6}{2}}{\binom{14}{2}} + \frac{\binom{8}{2}}{\binom{14}{2}} = \frac{\binom{6}{2} + \binom{8}{2}}{\binom{14}{2}}$$

A1	Ausführliche Lösungen		
	e)	(2):	Werden x Vokale dazu getan, dann gilt für die Anzahl der Vokale: 8 + x Mit $P(VV \vee KK) = 0{,}5$ gilt: $$P(VV \vee KK) = \frac{\binom{6}{2} + \binom{8+x}{2}}{\binom{14+x}{2}} = \frac{\frac{6\cdot 5}{2\cdot 1} + \frac{(8+x)\cdot(7+x)}{2\cdot 1}}{\frac{(14+x)\cdot(13+x)}{2\cdot 1}}$$ $$= \frac{30 + (8+x)\cdot(7+x)}{(14+x)\cdot(13+x)} = 0{,}5$$ $$\Leftrightarrow x^2 + 3x - 10 = 0 \Leftrightarrow \underline{\underline{x_1 = -5 \wedge x_2 = 2}}$$ Es müssen 2 Karten mit Konsonanten dazugegeben werden. Das gleiche Ergebnis (P = 0,5) würde man erhalten, wenn man 5 Konsonanten entfernt.