Lösungen Stichproben und Zählstrategien II

Ausführliche Lösungen:

A1	Ausführliche Lösungen
	Modell: Geordnete Stichprobe mit Zurücklegen. Zwei Farben stehen für jeden der 8 Steine zur Verfügung . (8 mal ziehen mit Zurücklegen) Die Anzahl der Möglichkeiten aller Farbkombinationen ist $2^8 = 256$

A1	A:	Alle 8 Steine haben dieselbe Farbe. Das bedeutet, entweder sind alle 8 Steine schwarz oder weiß. Die Anzahl der Möglichkeiten für A ist: 2 Damit ist $P(A) = \frac{2}{256} = \frac{1}{128} \approx 0{,}00781$ die Wahrscheinlichkeit dafür, dass alle Steine die gleiche Farbe haben.

A1	B:	Nur ein Stein ist weiß. Da dieser Stein an jeder der insgesamt 8 Stellen liegen kann, gibt es dafür 8 Möglichkeiten. Die Anzahl der Möglichkeiten für B ist: 8 Damit ist $P(B) = \frac{8}{256} = \frac{1}{32} = 0{,}03125$ die Wahrscheinlichkeit dafür, dass von den 8 Steinen nur einer weiß ist.

A1	C:	Der erste und der letzte Stein haben dieselbe Farbe. Für den ersten und letzten Stein gibt es 2 Möglichkeiten. Entweder beide weiß oder beide schwarz. Für die restlichen 6 Steine gibt es 2^6 Möglichkeiten. Die Anzahl der Möglichkeiten für C ist: $2 \cdot 2^6 = 2^7 = 128$ Damit ist $P(C) = \frac{128}{256} = \frac{1}{2} = 0{,}5$ die Wahrscheinlichkeit dafür, dass der 1. und der letzte Stein dieselbe Farbe hat.

A2	Ausführliche Lösungen
	Modell: Ungeordnete Stichprobe ohne Zurücklegen oder Ziehen mit einem Griff. Die Anzahl der Möglichkeiten 3 Gummibärchen aus einer Tüte mit insgesamt 10 Gummibärchen zu ziehen ist: $\binom{10}{3} = \frac{10 \cdot 9 \cdot 8}{3 \cdot 2 \cdot 1} = 120$

A2	A:	Genau ein grünes Gummibärchen wird gezogen. Die Anzahl der Möglichkeiten 1 grünes Gummibärchen von insgesamt 2 grünen zu ziehen und 2 Gummibärchen aus den insgesamt 8 andersfarbigen zu ziehen ist: $\binom{2}{1}\cdot\binom{8}{2}=2\cdot\frac{8\cdot 7}{2\cdot 1}=56$ Das ist die Anzahl der Möglichkeiten für das Eintreten von A. Damit ist $P(A)=\frac{\binom{2}{1}\cdot\binom{8}{2}}{\binom{10}{3}}=\frac{56}{120}=\frac{7}{15}\approx 0,467$ die Wahrscheinlichkeit dafür, genau ein grünes Gummibärchen zu ziehen.

A3	Ausführliche Lösungen	
	A:	Die Jongliernummer steht an 3. Stelle. xxJxx Bei der Auslosung kann die Jongliernummer an jeder beliebigen Stelle vorkommen. Modell: Urne mit 5 Kugeln nummeriert von 1 bis 5. Die Zahlen geben die Stelle an, an der die Jongliernummer im Programm steht. Einmaliges Ziehen bestimmt die Stelle im Programm, an der die Jongliernummer kommt. Damit ist $P(A)=\frac{1}{5}=0,2$ die Wahrscheinlichkeit dafür, dass die Jongliernummer an 3. Stelle kommt. Mit der gleichen Wahrscheinlichkeit käme sie an einer beliebigen anderen Stelle vor.

A3	B:	Die Jongliernummer steht nicht am Schluss. Das bedeutet, sie kann an 1., 2., 3. oder 4. Stelle stehen. Nach dem Additionssatz für Wahrscheinlichkeiten gilt: Damit ist $P(B)=\frac{1}{5}+\frac{1}{5}+\frac{1}{5}+\frac{1}{5}=\frac{4}{5}=0,8$ die Wahrscheinlichkeit dafür, dass die Jongliernummer nicht an letzter Stelle steht.

A4 Ausführliche Lösungen

Modell: Ungeordnete Stichprobe ohne Zurücklegen.

n = 10 Glühlampen, davon sind 2 defekt. 3 Glühlampen werden zufällig entnommen.
Die Anzahl der Möglichkeiten aus einer Packung mit 10 Glühlampen zufällig 3 auszuwählen ist:

$$\binom{10}{3} = \frac{10\cdot 9\cdot 8}{3\cdot 2\cdot 1} = 120$$

A4 A: Alle 3 Glühlampen sind in Ordnung.
Die Anzahl der Möglichkeiten aus 8 heilen Glühlampen 3 auszuwählen ist 3 aus 8.

Damit ist die Anzahl der Möglichkeiten für A : $\binom{8}{3} = 56$

Damit ist $P(A) = \frac{56}{120} = \frac{7}{15} \approx 0,4\overline{6}$
die Wahrscheinlichkeit dafür, drei heile Glühlampen auszuwählen.

A4 B: Genau eine Glühlampe ist defekt.
Von den 8 heilen Glühlampen werden 2 und von den 2 defekten Glühlampen wird eine gezogen.

Die Anzahl der Möglichkeiten für B ist : $\binom{8}{2}\cdot\binom{2}{1} = \frac{8\cdot 7}{2\cdot 1}\cdot 2 = 56$

Damit ist $P(B) = \frac{56}{120} = \frac{7}{15} \approx 0,4\overline{6}$
die Wahrscheinlichkeit dafür, dass von den drei ausgewählten Glühlampen eine defekt ist.

A4 C: Genau zwei Glühlampen sind defekt.
Von 8 heilen Glühlampen wird eine und von den 2 defekten Glühlampen werden 2 gezogen.

Die Anzahl der Möglichkeiten für C ist : $\binom{8}{1}\cdot\binom{2}{2} = 8\cdot 1 = 8$

Damit ist $P(C) = \frac{8}{120} = \frac{1}{15} \approx 0,0\overline{6}$
die Wahrscheinlichkeit dafür, dass von den drei ausgewählten Glühlampen zwei defekt ist.

A5 Ausführliche Lösungen

Modell: Ziehen mit Zurücklegen.
Die Anzahl der Möglichkeiten 8 Personen auf 12 Monate zu verteilen ist 12^8.
(Ziehen mit Zurücklegen aus einer Urne mit 12 unterschiedlichen Kugeln)

A5	A:	Von 8 Personen haben mindestens 2 Personen im selben Monat Geburtstag. Das Gegenereignis von A ist, alle 8 Personen haben in verschiedenen Monaten Geburtstag. Nun werden die 8 Personen so auf die 12 Monate verteilt, das es keine Dopplungen gibt. Damit ist die Anzahl der Möglichkeiten für $\overline{A}$: $12\cdot11\cdot10\cdot9\cdot8\cdot7\cdot6\cdot5$ Damit ist $P\left(\overline{A}\right)=\frac{12\cdot11\cdot10\cdot9\cdot8\cdot7\cdot6\cdot5}{12^8}\approx0{,}0464$ die Wahrscheinlichkeit dafür, das alle 8 Personen in verschiedenen Monaten Geburtstag haben. $P(A)=1-P\left(\overline{A}\right)=1-\frac{12\cdot11\cdot10\cdot9\cdot8\cdot7\cdot6\cdot5}{12^8}\approx0{,}954$ ist die Wahrscheinlichkeit dafür, dass von 8 Personen mindestens 2 im selben Monat Geburtstag haben.

A6	Ausführliche Lösungen
	Modell: Ungeordnete Stichprobe ohne Zurücklegen oder Ziehen mit einem Griff. Die Anzahl der Möglichkeiten 3 Kugeln aus einer Urne mit insgesamt 15 Kugeln zu ziehen ist: $\binom{15}{3}=\frac{15\cdot14\cdot13}{3\cdot2\cdot1}=455$

A6	A:	Genau zwei grüne Kugeln werden gezogen. Die Anzahl der Möglichkeiten 2 grüne Kugeln von insgesamt 4 grünen zu ziehen und eine andersfarbige aus den insgesamt 11 andersfarbigen zu ziehen ist: $\binom{4}{2}\cdot\binom{11}{1}=\frac{4\cdot3}{2\cdot1}\cdot11=66$ Das ist die Anzahl der Möglichkeiten für das Eintreten von A. Damit ist $P(A)=\frac{\binom{4}{2}\cdot\binom{11}{1}}{\binom{15}{3}}=\frac{66}{455}\approx0{,}145$ die Wahrscheinlichkeit dafür, genau zwei grüne Kugeln zu ziehen.

A6 B: Keine grüne Kugel wird gezogen.

Die Anzahl der Möglichkeiten 0 grüne Kugeln von insgesamt 4 grünen zu ziehen und 3 andersfarbige aus den insgesamt 11 andersfarbigen zu ziehen ist:

$$\binom{4}{0}\cdot\binom{11}{3}=1\cdot\frac{11\cdot 10\cdot 9}{3\cdot 2\cdot 1}=165$$

Das ist die Anzahl der Möglichkeiten für das Eintreten von B. Damit ist

$$P(B)=\frac{\binom{4}{0}\cdot\binom{11}{3}}{\binom{15}{3}}=\frac{165}{455}\approx 0{,}363$$

die Wahrscheinlichkeit dafür, keine grüne Kugel zu ziehen.

A7 Ausführliche Lösungen

8 Personen nehmen an dem Spiel teil. Nach jeder Runde scheidet eine aus.
Nach der ersten Runde gibt es 8 Möglichkeiten, nach der 2. Runde 7 Möglichkeiten
usw. das jemand ausscheidet.
Damit ist die Anzahl aller Möglichkeiten:
$8\cdot 7\cdot 6\cdot 5\cdot 4\cdot 3\cdot 2\cdot 1=8!=40.320$

A7 A: Lars bleibt als letzter übrig.
xxxxxxxL Die Anzahl der Möglichkeiten 7 Personen auf 7 Plätze zu verteilen und Lars auf den letzten ist 7!
Damit ist die Anzahl der Möglichkeiten für A : $7!\cdot 1$

Damit ist $P(A)=\frac{7!\cdot 1}{8!}=\frac{1}{8}=0{,}125$

die Wahrscheinlichkeit dafür, dass Lars als letzter übrig bleibt.

A7 B: Anja und Vanessa bestreiten die letzte Runde.
xxxxxxAV oder xxxxxxVA
Die Anzahl der Möglichkeiten 6 Personen auf 6 Plätze und 2 Personen auf 2 Plätze zu verteilen ist 6! mal 2!
Die Anzahl der Möglichkeiten für B ist: $6!\cdot 2!$

Damit ist $P(B)=\frac{6!\cdot 2!}{8!}=\frac{2}{8\cdot 7}=\frac{1}{28}\approx 0{,}0357$

die Wahrscheinlichkeit dafür, dass Anja und Vanessa die letzte Runde bestreiten.

A8	Ausführliche Lösungen
	10 Fragen mit je 3 möglichen Antworten. Die Anzahl der Möglichkeiten bei 10 Fragen jeweils eine von drei möglichen Antworten anzukreuzen ist 3^{10}. (Urne mit 3 verschiedenen Kugeln, 10 mal Ziehen mit Zurücklegen)

A8	A:	Alle Antworten sind falsch. Bei jeder der 10 Fragen gibt es 2 Möglichkeiten falsch anzukreuzen. Die Anzahl der Möglichkeiten für A ist: 2^{10} Damit ist $P(A) = \frac{2^{10}}{3^{10}} = \left(\frac{2}{3}\right)^{10} \approx 0{,}0173$ die Wahrscheinlichkeit dafür, alle Antworten falsch anzukreuzen.

A8	B:	Die ersten 5 Fragen sind richtig, die letzten 5 Fragen sind falsch angekreuzt. Für die ersten 5 Fragen gibt es jeweils eine, für die zweiten 5 Fragen jeweils 2 Möglichkeiten anzukreuzen. Die Anzahl der Möglichkeiten für B ist: $1^5 \cdot 2^5$ Damit ist $P(B) = \frac{1^5 \cdot 2^5}{3^{10}} \approx 0{,}000.542$ die Wahrscheinlichkeit dafür, die ersten 5 Fragen richtig angekreuzt zu haben.

A8	C:	Genau die Hälfte der Fragen sind richtig angekreuzt. Um die 5 richtig beantworteten Fragen auf 10 Fragen zu verteilen, gibt es $\binom{10}{5}$ Möglichkeiten. Jede einzelne hat die Wahrscheinlichkeit von B Damit ist $P(C) = \binom{10}{5} \cdot \frac{1^5 \cdot 2^5}{3^{10}} = 252 \cdot \frac{2^5}{3^{10}} \approx 0{,}137$ die Wahrscheinlichkeit dafür, genau die Hälfte der Fragen richtig zu beantworten.

A8	D:	4 Antworten sind richtig, 6 sind falsch. Die Anzahl der Möglichkeiten 4 Fragen auf 10 zu verteilen ist $\binom{10}{4} = 210$ Bei jeder der 6 falsch angekreuzten Fragen gibt es 2 Möglichkeiten. Das sind 2^6 Möglichkeiten. Die Anzahl der Möglichkeiten für D ist: $\binom{10}{4} \cdot 2^6 = 210 \cdot 2^6$ Damit ist $P(D) = \frac{210 \cdot 2^6}{3^{10}} \approx 0{,}228$ die Wahrscheinlichkeit dafür, 4 Fragen richtig angekreuzt zu haben.

A9	Ausführliche Lösungen
	ANANAS: Die Anzahl der Möglichkeiten 6 Buchstaben anzuordnen ist 6!

A9	A:	Es entsteht wieder das Wort ANANAS. Anzahl der Möglichkeiten für A: $3\cdot 2\cdot 1$ für N: $2\cdot 1$ für S: 1 Die Anzahl der Möglichkeiten für A ist: $3\cdot 2\cdot 1\cdot 2\cdot 1\cdot 1 = 12$ Damit ist $P(A) = \frac{12}{6!} = \frac{1}{60} = 0{,}01\overline{6}$ die Wahrscheinlichkeit dafür, dass nach dem Schütteln wieder das Wort ANANAS entsteht.

A9	B:	Die Buchstabenkombination beginnt mit AAA. AAAxxx Anzahl der Möglichkeiten für A: $3\cdot 2\cdot 1$ für x: $3\cdot 2\cdot 1$ Die Anzahl der Möglichkeiten für B ist: $3\cdot 2\cdot 1\cdot 3\cdot 2\cdot 1 = 36$ Damit ist $P(B) = \frac{36}{6!} = \frac{1}{20} = 0{,}05$ die Wahrscheinlichkeit dafür, dass nach dem Schütteln AAA die Anfangsbuchstaben bilden.

A9	C:	Es entsteht ein Wort mit dreifachem A direkt hintereinander. AAAxxx oder xAAAxx oder xxAAAx oder xxxAAA $P(C) = 4\cdot P(B) = 4\cdot\frac{1}{20} = \frac{1}{54} = 0{,}2$ Ist die Wahrscheinlichkeit dafür, dass nach dem Schütteln ein Wort mit dreifachem A hintereinander entsteht.