Lösungen Stichproben und Zählstrategien I

Ausführliche Lösungen:

A1	Ausführliche Lösungen
	Modell: Ziehen mit Zurücklegen. Die Anzahl aller Möglichkeiten: Für jede der 4 Stellen gibt es 10 mögliche Ziffern (0 bis 9). Damit lassen sich 10.000 Zahlen darstellen.

A1	A:	Alle Ziffern sind ungerade. { 1 ; 3 ; 5 ; 7 ; 9 } Die Anzahl der Möglichkeiten für A ist 5^4. Damit ist $P(A) = \frac{5^4}{10^4} = \frac{1}{16} = 0,0625$ die Wahrscheinlichkeit dafür, dass alle Ziffern ungerade sind.

A1	B:	Nur die Zahlen 0 und 1 kommen vor. { 0 ; 1 } Die Anzahl der Möglichkeiten für B ist 2^4. Damit ist $P(B) = \frac{2^4}{10^4} = \frac{1}{625} = 0,0016$ die Wahrscheinlichkeit dafür, dass nur die Ziffern 0 und 1 vorkommen.

A1	C:	Es kommen nur Spiegelzahlen vor. [xy|yx] Die erste und die zweite Zahl ist frei wählbar, daraus ergeben sich die beiden anderen. Die Anzahl der Möglichkeiten für C ist 10^2. Damit ist $P(C) = \frac{10^2}{10^4} = \frac{1}{100} = 0,01$ die Wahrscheinlichkeit dafür, dass die angezeigte Zahl eine Spiegelzahl ist.

A2	Ausführliche Lösung
	Modell: Geordnete Stichprobe ohne Zurücklegen. 6 rote und 4 weiße Kugeln ergibt n = 10 Kugeln. Es wird k = 5 mal gezogen ohne Zurücklegen. Damit ist die Anzahl aller Möglichkeiten $\frac{n!}{(n-k)!} = \frac{10!}{5!} = 30.240$

A2	A:	Nur rote Kugeln werden gezogen. Die Anzahl der Möglichkeiten für A ist: $\frac{6!}{1!} = 720$ damit ist $P(A) = \frac{720}{30.240} = \frac{1}{42} \approx 0,0238$ die Wahrscheinlichkeit dafür, dass nur rote Kugeln gezogen werden.

A2	B:	Man zieht zuerst alle weißen, dann eine rote Kugel. Die Anzahl der Möglichkeiten für B ist: $\frac{4!}{0!}\cdot\frac{6!}{5!} = 4!\cdot 6 = 144$ damit ist $P(B) = \frac{144}{30.240} = \frac{1}{210} \approx 0{,}00476$ die Wahrscheinlichkeit dafür, zuerst alle weißen und dann eine rote Kugel zu ziehen.

A2	C:	Die erste Kugel ist weiß. (bedeutet, die 2., 3., 4. und 5. Kugel ist beliebig) Die Anzahl der Möglichkeiten für C ist: $4\cdot 9\cdot 8\cdot 7\cdot 6 = 12.096$ damit ist $P(C) = \frac{12.096}{30.240} = \frac{2}{5} = 0{,}4$ die Wahrscheinlichkeit dafür, im ersten Zug die weiße Kugel zu ziehen.

A2	D:	Man zieht abwechselnd weiß und rot. (wrwrw) oder (rwrwr) Die Anzahl der Möglichkeiten für D ist: $4\cdot 6\cdot 3\cdot 5\cdot 2 + 6\cdot 4\cdot 5\cdot 3\cdot 4 = 2160$ damit ist $P(D) = \frac{2160}{30.240} = \frac{1}{14} \approx 0{,}0714$ die Wahrscheinlichkeit dafür, abwechselnd weiße und rote Kugeln zu ziehen.

A3	Ausführliche Lösung
	Modell: Ungeordnete Stichprobe ohne Zurücklegen oder Ziehen mit einem Griff. Die durch 5 teilbaren Zahlen sind: 5, 10, 15, 20, 25 Die Anzahl der Möglichkeiten aus 25 unterschiedlichen Kugeln 4 zu ziehen ist: $\binom{25}{4} = \frac{25\cdot 24\cdot 23\cdot 22}{4\cdot 3\cdot 2\cdot 1} = 25\cdot 23\cdot 22 = 12.650$ Das ist die Anzahl aller Möglichkeiten.

A3	A:	Alle Zahlen sind durch 5 teilbar.
		Die Anzahl der durch 5 teilbaren Zahlen ist 5.
		Die Anzahl der Möglichkeiten daraus 4 auszuwählen ist:
		$\binom{5}{4} = \frac{5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2}{4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1} = 5$
		Das ist die Anzahl der Möglichkeiten für das Eintreten von A. Damit ist
		$P(A) = \frac{\binom{5}{4}}{\binom{25}{4}} = \frac{5}{12650} = \frac{1}{2530} \approx 0{,}000.395$
		die Wahrscheinlichkeit dafür 4 Zahlen zu ziehen, die durch 5 teilbar sind.

A3	B:	Alle Zahlen sind gerade.
		Die geraden Zahlen sind: 2, 4, 6, 8, 10, 12, 14, 16, 18, 20, 22, 24
		Die Anzahl der geraden Zahlen ist 12.
		Die Anzahl der Möglichkeiten daraus 4 auszuwählen ist:
		$\binom{12}{4} = \frac{12 \cdot 11 \cdot 10 \cdot 9}{4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1} = 495$
		Das ist die Anzahl der Möglichkeiten für das Eintreten von B. Damit ist
		$P(B) = \frac{\binom{12}{4}}{\binom{25}{4}} = \frac{495}{12650} = \frac{99}{2530} \approx 0{,}0391$
		die Wahrscheinlichkeit dafür 4 gerade Zahlen zu ziehen.

A3	C:	Die Summe der 4 Zahlen ist kleiner als 12. 1+2+3+4=10<12 1+2+3+5=11<12 Es gibt für das Ereignis C nur 2 Möglichkeiten. Damit ist $P(C)=\frac{2}{\binom{25}{4}}=\frac{2}{12650}=\frac{1}{6325}\approx 0{,}000.158$ die Wahrscheinlichkeit dafür, 4 Zahlen zu ziehen, deren Summe kleiner als 12 ist.

A3	D:	Das Produkt der 4 Zahlen ist 12. $1\cdot 2\cdot 3\cdot 4=24>12\Rightarrow$ Es gibt keine Möglichkeit als Produkt 12 zu erhalten. $P(D)=0$ ist die Wahrscheinlichkeit dafür, 4 Zahlen zu ziehen, deren Produkt 12 ist.

A4	Ausführliche Lösung
	Modell: Anordnung von k Elementen. Die Anzahl der Möglichkeiten 4 Personen auf 4 Plätze zu verteilen ist 4!

A4	A:	Sven sitzt zwischen zwei Freunden. Er hat zwei Möglichkeiten: xSxx oder xxSx (Platz 2 oder Platz 3) Die drei Freunde haben 3! Möglichkeiten Damit ist die Anzahl der Möglichkeiten für A $2\cdot 3!=12$ Damit ist $P(A)=\frac{12}{24}=\frac{1}{2}=0{,}5$ die Wahrscheinlichkeit dafür, dass Sven zwischen zwei Freunden sitzt.

A4	B:	Sven und Kai sitzen außen. SxxK oder KxxS Sven und Kai haben 2 Möglichkeiten, die beiden Freunde ebenfalls. Damit ist die Anzahl der Möglichkeiten für B $2\cdot 2=4$ Damit ist $P(B)=\frac{4}{24}=\frac{1}{6}=0{,}1\overline{6}$ die Wahrscheinlichkeit dafür, dass Sven und Kai außen sitzen.

A4 C: Sven und Kai sitzen nebeneinander.
SKxx KSxx xSKx xKSx xxSK xxKS das sind 6 Möglichkeiten.
Für die beiden anderen gibt es 2 Möglichkeiten.

Damit ist die Anzahl der Möglichkeiten für C $6 \cdot 2 = 12$

Damit ist $P(C) = \frac{12}{24} = \frac{1}{2} = 0{,}5$
die Wahrscheinlichkeit dafür, dass Sven und Kai nebeneinander sitzen.

A5 Ausführliche Lösung

Modell: Ungeordnete Stichprobe ohne Zurücklegen
oder Ziehen mit einem Griff.

Die Anzahl der Möglichkeiten 6 Zahlen von insgesamt 49 Zahlen zu anzukreuzen ist:

$$\binom{49}{6} = \frac{49 \cdot 48 \cdot 47 \cdot 46 \cdot 45 \cdot 44}{6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1} = 13.983.816$$

A5 A: 6 richtige im Lotto

Die Anzahl der Möglichkeiten 6 Zahlen von insgesamt 6 Gewinnzahlen anzukreuzen und 0 Zahlen von 43 Nicht- Gewinnzahlen ist:

$$\binom{6}{6} \cdot \binom{43}{0} = 1 \cdot 1 = 1$$

Das ist die Anzahl der Möglichkeiten für das Eintreten von A. Damit ist

$$P(A) = \frac{\binom{6}{6} \cdot \binom{43}{0}}{\binom{49}{6}} = \frac{1}{13.983.816} \approx 0{,}000.000.072$$

die Wahrscheinlichkeit dafür, dass 6 Gewinnzahlen angekreuzt wurden (6 richtige).

A5	B:	5 richtige im Lotto Die Anzahl der Möglichkeiten 5 Zahlen von insgesamt 6 Gewinnzahlen anzukreuzen und 1 Zahl von 43 Nicht- Gewinnzahlen ist: $\binom{6}{5}\cdot\binom{43}{1} = 6\cdot 43 = 258$ Das ist die Anzahl der Möglichkeiten für das Eintreten von B. Damit ist $P(B) = \frac{\binom{6}{5}\cdot\binom{43}{1}}{\binom{49}{6}} = \frac{258}{13.983.816} \approx 0{,}000.0185$ die Wahrscheinlichkeit dafür, dass 5 Gewinnzahlen angekreuzt wurden (5 richtige).

A5	C:	4 richtige im Lotto Die Anzahl der Möglichkeiten 4 Zahlen von insgesamt 6 Gewinnzahlen anzukreuzen und 2 Zahl von 43 Nicht- Gewinnzahlen ist: $\binom{6}{4}\cdot\binom{43}{2} = \frac{6\cdot 5\cdot 4\cdot 3}{4\cdot 3\cdot 2\cdot 1}\cdot\frac{43\cdot 42}{2\cdot 1} = 13545$ Das ist die Anzahl der Möglichkeiten für das Eintreten von C. Damit ist $P(C) = \frac{\binom{6}{4}\cdot\binom{43}{2}}{\binom{49}{6}} = \frac{13545}{13.983.816} \approx 0{,}000.969$ die Wahrscheinlichkeit dafür, dass 4 Gewinnzahlen angekreuzt wurden (4 richtige).

A5	D:	3 richtige im Lotto Die Anzahl der Möglichkeiten 3 Zahlen von insgesamt 6 Gewinnzahlen anzukreuzen und 3 Zahl von 43 Nicht- Gewinnzahlen ist: $\binom{6}{3} \cdot \binom{43}{3} = \frac{6 \cdot 5 \cdot 4}{3 \cdot 2 \cdot 1} \cdot \frac{43 \cdot 42 \cdot 41}{3 \cdot 2 \cdot 1} = 246.820$ Das ist die Anzahl der Möglichkeiten für das Eintreten von D. Damit ist $P(D) = \frac{\binom{6}{3} \cdot \binom{43}{3}}{\binom{49}{6}} = \frac{246.820}{13.983.816} \approx 0{,}0177$ die Wahrscheinlichkeit dafür, dass 3 Gewinnzahlen angekreuzt wurden (3 richtige).

A6	Ausführliche Lösung
	Modell: Geordnete Stichprobe mit Zurücklegen. Die Farbauswahl ist zufällig, das bedeutet, jede Farbe ist gleichwahrscheinlich. Für jede Perle stehen 3 Farben zur Verfügung. Damit ist die Anzahl aller Möglichkeiten $3^6 = 729$

A6	A:	Es kommt keine rote Perle vor. Die Anzahl der Möglichkeiten nur zwei Farben zu ziehen ist $2^6 = 64$ Die Anzahl der Möglichkeiten für A ist: $2^6 = 64$ Damit ist $P(A) = \frac{64}{729} \approx 0{,}0878$ die Wahrscheinlichkeit dafür, dass keine Perle rot ist.

A6	B:	Die ersten drei Perlen sind grün. Damit können die letzten 3 beliebig gewählt werden. Also <u>eine</u> Möglichkeit für ggg und 3^3 Möglichkeiten für die anderen drei. Die Anzahl der Möglichkeiten für B ist: $1 \cdot 3^3 = 27$ Damit ist $P(B) = \frac{27}{729} = \frac{1}{27} \approx 0{,}0370$ die Wahrscheinlichkeit dafür, dass die ersten drei Perlen grün sind.

A6	C:	Die Perlen sind abwechselnd rot und grün. Dafür gibt es zwei Möglichkeiten: rgrgrg oder grgrgr Die Anzahl der Möglichkeiten für C ist: 2 Damit ist $P(C) = \frac{2}{729} \approx 0{,}00274$ die Wahrscheinlichkeit dafür, dass die Perlen abwechselnd rot und grün sind.

A7	Ausführliche Lösung
	Modell: Geordnete Stichprobe ohne Zurücklegen. Die Anzahl aller Möglichkeiten ist $10 \cdot 9 \cdot 8 = 720$

A7	A:	Anja (1. Preis), Inge (2. Preis), Karin (3. Preis). Die Anzahl der Möglichkeiten für A ist: 1 Damit ist $P(A) = \frac{1}{720} \approx 0{,}00139$ die Wahrscheinlichkeit dafür, dass Anja den 1.Preis, Inge den 2. Preis und Karin den 3. Preis bekommt.

A7	B:	Anja, Inge und Karin gewinnen je einen Preis. Die Anzahl der Möglichkeiten für B ist: $3! = 6$ Damit ist $P(B) = \frac{6}{720} = \frac{1}{120} \approx 0{,}00833$ die Wahrscheinlichkeit dafür, dass Anja , Inge und Karin je einen Preis gewinnen.

A7	C:	Anja gewinnt keinen Preis. Die Anzahl der Möglichkeiten für C ist: $9 \cdot 8 \cdot 7$ Damit ist $P(C) = \frac{9 \cdot 8 \cdot 7}{720} = \frac{7}{10} = 0{,}7$ die Wahrscheinlichkeit dafür, dass Anja keinen Preis gewinnt.

A7	D:	Keines der drei Mädchen gewinnt einen Preis. Die Anzahl der Möglichkeiten für D ist: $7 \cdot 6 \cdot 5 = 210$ Damit ist $P(D) = \frac{210}{720} = \frac{7}{24} = 0{,}293$ die Wahrscheinlichkeit dafür, dass keins der drei Mädchen einen Preis gewinnt.

A8	Ausführliche Lösung
	Modell: Ungeordnete Stichprobe ohne Zurücklegen oder Ziehen mit einem Griff. Die Anzahl der Möglichkeiten 5 Zettel aus insgesamt 25 Zetteln zu ziehen ist: $\binom{25}{5} = \frac{25 \cdot 24 \cdot 23 \cdot 22 \cdot 21}{5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1} = 53.130$

A8	A:	5 Zettel gehen an die Mädchen (0 Zettel an die Jungen) Die Anzahl der Möglichkeiten 5 Zettel aus insgesamt 13 Zetteln mit Mädchennamen zu ziehen und 0 Zettel aus insgesamt 12 Zetteln mit Jungennamen zu ziehen ist: $\binom{13}{5}\cdot\binom{12}{0}=\frac{13\cdot12\cdot11\cdot10\cdot9}{5\cdot4\cdot3\cdot2\cdot1}\cdot1=1287$ Das ist die Anzahl der Möglichkeiten für das Eintreten von A. Damit ist $P(A)=\frac{\binom{13}{5}\cdot\binom{12}{0}}{\binom{25}{5}}=\frac{1287}{53130}\approx0{,}0242$ die Wahrscheinlichkeit dafür, dass alle 5 Freikarten an die Mädchen gehen.

A8	B:	4 Zettel gehen an die Mädchen (1 Zettel an die Jungen) Die Anzahl der Möglichkeiten 4 Zettel aus insgesamt 13 Zetteln mit Mädchennamen zu ziehen und 1 Zettel aus insgesamt 12 Zetteln mit Jungennamen zu ziehen ist: $\binom{13}{4}\cdot\binom{12}{1}=\frac{13\cdot12\cdot11\cdot10}{4\cdot3\cdot2\cdot1}\cdot12=8580$ Das ist die Anzahl der Möglichkeiten für das Eintreten von B. Damit ist $P(A)=\frac{\binom{13}{4}\cdot\binom{12}{1}}{\binom{25}{5}}=\frac{8580}{53130}\approx0{,}161$ die Wahrscheinlichkeit dafür, dass 4 Freikarten an die Mädchen und 1 Freikarte an die Jungen gehen.

A8	C:	3 Zettel gehen an die Mädchen (2 Zettel an die Jungen) Die Anzahl der Möglichkeiten 3 Zettel aus insgesamt 13 Zetteln mit Mädchennamen zu ziehen und 2 Zettel aus insgesamt 12 Zetteln mit Jungennamen zu ziehen ist: $\binom{13}{3}\cdot\binom{12}{2}=\frac{13\cdot 12\cdot 11}{3\cdot 2\cdot 1}\cdot\frac{12\cdot 11}{2\cdot 1}=18867$ Das ist die Anzahl der Möglichkeiten für das Eintreten von C. Damit ist $P(C)=\frac{\binom{13}{3}\cdot\binom{12}{2}}{\binom{25}{5}}=\frac{18876}{53130}\approx 0{,}355$ die Wahrscheinlichkeit dafür, dass 3 Freikarten an die Mädchen und 2 Freikarte an die Jungen gehen.

A8	D:	2 Zettel gehen an die Mädchen (3 Zettel an die Jungen) Die Anzahl der Möglichkeiten 2 Zettel aus insgesamt 13 Zetteln mit Mädchennamen zu ziehen und 3 Zettel aus insgesamt 12 Zetteln mit Jungennamen zu ziehen ist: $\binom{13}{2}\cdot\binom{12}{3}=\frac{13\cdot 12}{2\cdot 1}\cdot\frac{12\cdot 11\cdot 10}{3\cdot 2\cdot 1}=17160$ Das ist die Anzahl der Möglichkeiten für das Eintreten von D. Damit ist $P(D)=\frac{\binom{13}{2}\cdot\binom{12}{3}}{\binom{25}{5}}=\frac{17160}{53130}\approx 0{,}323$ die Wahrscheinlichkeit dafür, dass 2 Freikarten an die Mädchen und 3 Freikarte an die Jungen gehen.

A8	E:	1 Zettel geht an die Mädchen (4 Zettel an die Jungen) Die Anzahl der Möglichkeiten 1 Zettel aus insgesamt 13 Zetteln mit Mädchennamen zu ziehen und 4 Zettel aus insgesamt 12 Zetteln mit Jungennamen zu ziehen ist: $\binom{13}{1}\cdot\binom{12}{4}=13\cdot\frac{12\cdot11\cdot10\cdot9}{4\cdot3\cdot2\cdot1}=6435$ Das ist die Anzahl der Möglichkeiten für das Eintreten von E. Damit ist $P(E)=\frac{\binom{13}{1}\cdot\binom{12}{4}}{\binom{25}{5}}=\frac{6435}{53130}\approx 0{,}121$ die Wahrscheinlichkeit dafür, dass 1 Freikarte an die Mädchen und 4 Freikarte an die Jungen gehen.

A8	F:	0 Zettel gehen an die Mädchen (5 Zettel an die Jungen) Die Anzahl der Möglichkeiten 0 Zettel aus insgesamt 13 Zetteln mit Mädchennamen zu ziehen und 5 Zettel aus insgesamt 12 Zetteln mit Jungennamen zu ziehen ist: $\binom{13}{0}\cdot\binom{12}{5}=1\cdot\frac{12\cdot11\cdot10\cdot9\cdot8}{5\cdot4\cdot3\cdot2\cdot1}=792$ Das ist die Anzahl der Möglichkeiten für das Eintreten von F. Damit ist $P(F)=\frac{\binom{13}{0}\cdot\binom{12}{5}}{\binom{25}{5}}=\frac{792}{53130}\approx 0{,}0149$ die Wahrscheinlichkeit dafür, dass 0 Freikarten an die Mädchen und 5 Freikarte an die Jungen gehen.

A9	Ausführliche Lösung
	Modell: Ungeordnete Stichprobe ohne Zurücklegen oder Ziehen mit einem Griff. 10 mögliche Themen, 3 werden abgefragt, Prüfling lernt für 6. Anzahl der Möglichkeiten aus 10 Themen 3 auszuwählen ist: $\binom{10}{3}=\frac{10\cdot9\cdot8}{3\cdot2\cdot1}=120$

A9	A:	Der Prüfling hat sich auf keins der drei ausgewählten Themen vorbereitet. Aus den 4 Themen, auf die der Prüfling sich nicht vorbereitet hat, werden 3 ausgewählt. Die Anzahl der Möglichkeiten für A ist: $\binom{4}{3} = 4$ Damit ist $P(A) = \frac{4}{120} = \frac{1}{30} = 0{,}0\overline{3}$ die Wahrscheinlichkeit dafür, dass der Prüfling sich auf kein Thema vorbereitet hat.

A9	B:	Der Prüfling hat sich auf eins der drei ausgewählten Themen vorbereitet. Aus den 4 Themen, auf die der Prüfling sich nicht vorbereitet hat, werden 2 ausgewählt, aus den 6 Themen auf die er sich vorbereitet hat wird 1 Thema ausgewählt. Die Anzahl der Möglichkeiten für B ist: $\binom{4}{2} \cdot \binom{6}{1} = \frac{4 \cdot 3}{2 \cdot 1} \cdot \frac{6}{1} = 36$ Damit ist $P(B) = \frac{36}{120} = \frac{3}{10} = 0{,}3$ die Wahrscheinlichkeit dafür, dass der Prüfling sich auf ein Thema vorbereitet hat.

A9	C:	Der Prüfling hat sich auf zwei der drei ausgewählten Themen vorbereitet. Aus den 4 Themen, auf die der Prüfling sich nicht vorbereitet hat, wird 1 ausgewählt, aus den 6 Themen auf die er sich vorbereitet hat werden 2 Thema ausgewählt. Die Anzahl der Möglichkeiten für C ist: $\binom{4}{1} \cdot \binom{6}{2} = \frac{4}{1} \cdot \frac{6 \cdot 5}{2 \cdot 1} = 60$ Damit ist $P(C) = \frac{60}{120} = \frac{1}{2} = 0{,}5$ die Wahrscheinlichkeit dafür, dass der Prüfling sich auf zwei Themen vorbereitet hat.

A9	D:	Der Prüfling hat sich auf alle drei der drei ausgewählten Themen vorbereitet. Aus den 4 Themen, auf die der Prüfling sich nicht vorbereitet hat, wird 0 ausgewählt, aus den 6 Themen auf die er sich vorbereitet hat werden 3 Thema ausgewählt. Die Anzahl der Möglichkeiten für D ist: $\binom{4}{0} \cdot \binom{6}{3} = 1 \cdot \frac{6 \cdot 5 \cdot 4}{3 \cdot 2 \cdot 1} = 20$ Damit ist $P(C) = \frac{20}{120} = \frac{1}{6} \approx 0{,}1\overline{6}$ die Wahrscheinlichkeit dafür, dass der Prüfling sich auf alle 3 Themen vorbereitet hat.