Lösungen Bedingte Wahrscheinlichkeit II

Ausführliche Lösungen:

A1 Ausführliche Lösung

a)
A: Zuschauer ist $\leq$ 25 Jahre alt
$\overline{A}$: Zuschauer ist $>$ 25 Jahre alt
B: Zuschauer hat eine positive Meinung von der Sendung
$\overline{B}$: Zuschauer hat eine negative Meinung von der Sendung

30% der Zuschauer sind $\leq$ 25 Jahre alt $\Rightarrow P(A)=0,3$

70% der Zuschauer sind $>$ 25 Jahre alt $\Rightarrow P(\overline{A})=0,7$

Von den Zuschauern $\leq$ 25 hatten 50% eine positive Meinung.
$\Rightarrow P(A\cap B)=0,5\cdot 0,3=0,15$

Von den Zuschauern $\leq$ 25 hatten 50% eine negative Meinung.
$\Rightarrow P(A\cap \overline{B})=0,5\cdot 0,3=0,15$

Von den Zuschauern $>$ 25 hatten 80% eine positive Meinung.
$\Rightarrow P(\overline{A}\cap B)=0,8\cdot 0,7=0,56$

Die restlichen Werte der 4 – Feldtafel lassen sich aus den bisher bekannten Werten berechnen:

$P(B)=0,15+0,56=0,71$

$P(\overline{B})=1-0,71=0,29$

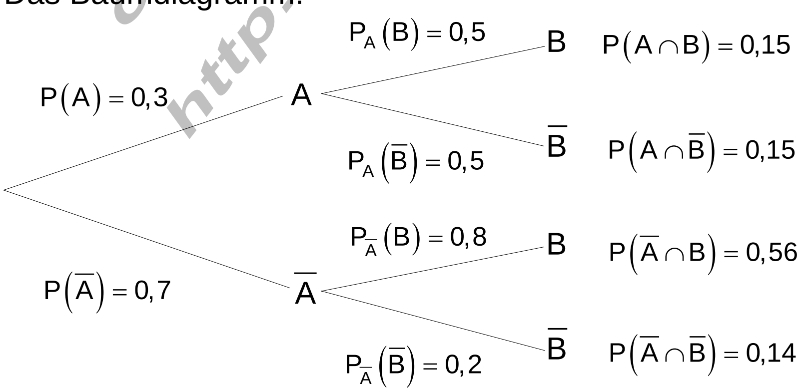
$P(\overline{A}\cap \overline{B})=0,29-0,15=0,14$

Die 4 – Feldtafel:

	B (Meinung positiv)	$\overline{B}$ (Meinung negativ)	
$A(\leq 25)$	0,15	0,15	0,3
$\overline{A}(>25)$	0,56	0,14	0,7
	0,71	0,29	1

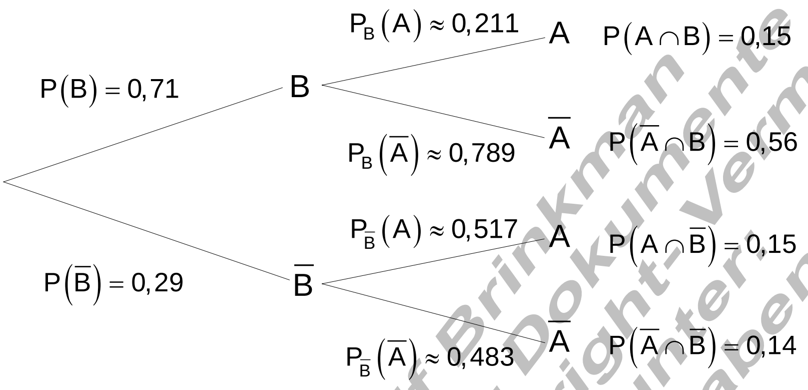
A1 Ausführliche Lösung

b) Das Baumdiagramm:



A1	Ausführliche Lösung	
	b)	Berechnung aller für den Baum relevanten Wahrscheinlichkeiten. $P_A(B)=\frac{P(A\cap B)}{P(A)}=\frac{0,15}{0,3}=0,5$ $\quad P_A(\overline{B})=\frac{P(A\cap\overline{B})}{P(A)}=\frac{0,15}{0,3}=0,5$ $P_{\overline{A}}(B)=\frac{P(\overline{A}\cap B)}{P(\overline{A})}=\frac{0,56}{0,7}=0,8$ $\quad P_{\overline{A}}(\overline{B})=\frac{P(\overline{A}\cap\overline{B})}{P(\overline{A})}=\frac{0,14}{0,7}=0,2$

A1	Ausführliche Lösung	
	b)	Der inverse Baum:



A1	Ausführliche Lösung	
	b)	Berechnung aller für den Baum relevanten Wahrscheinlichkeiten. $P_B(A)=\frac{P(A\cap B)}{P(B)}=\frac{0,15}{0,71}\approx 0,211$ $\quad P_B(\overline{A})=\frac{P(\overline{A}\cap B)}{P(B)}=\frac{0,56}{0,71}\approx 0,789$ $P_{\overline{B}}(A)=\frac{P(A\cap\overline{B})}{P(\overline{B})}=\frac{0,15}{0,29}\approx 0,517$ $\quad P_{\overline{B}}(\overline{A})=\frac{P(\overline{A}\cap\overline{B})}{P(\overline{B})}=\frac{0,14}{0,29}\approx 0,483$

A1	Ausführliche Lösung		
	c)	$P_B(\overline{A})\approx 0,789$	Von allen Zuschauern, von den man weiß, das sie eine positive Meinung über die Sendung hatten, waren 78,9% älter als 25 Jahre.

A1	Ausführliche Lösung		
	d)	$P_{\overline{A}}(\overline{B})=0,2$	Von allen Zuschauern, von den man weiß, das sie älter als 25 sind, hatten 20% eine negative Meinung über die Sendung.

A1 Ausführliche Lösung

e) B ist unabhängig von A, falls gilt: $P_B(A) = P(A)$

$$\left.\begin{array}{l} P_B(A) \approx 0{,}211 \\ P(A) = 0{,}3 \end{array}\right. \Rightarrow P_B(A) \neq P(A) \Rightarrow \text{keine Unabhängigkeit}$$

Das Ereignis B ist abhängig vom Ereignis A.
Das bedeutet, die positive Meinung über die Fernsehsendung ist vom Alter der Zuschauer abhängig.

A2 Ausführliche Lösung

a) K: Die getestete Person ist krank
$\overline{K}$: Die getestete Person ist gesund
T: Das Testergebnis ist positiv (Person wurde als krank getestet)
$\overline{T}$: Das Testergebnis ist negativ (Person wurde als gesund getestet)

1% der Menschen sind krank $\Rightarrow P(K) = 0{,}01$

99% der Menschen sind gesund $\Rightarrow P(\overline{K}) = 0{,}99$

Der Test zeigt die Krankheit bei den tatsächlich erkrankten zu 98% korrekt an
$\Rightarrow P(K \cap T) = 0{,}98 \cdot 0{,}01 = 0{,}0098$

Der Test zeigt auch 3% der gesunden als krank an
$\Rightarrow P(\overline{K} \cap T) = 0{,}03 \cdot 0{,}99 = 0{,}0297$

Die restlichen Werte der 4 – Feldtafel lassen sich aus den bisher bekannten Werten berechnen:

$P(T) = 0{,}0098 + 0{,}0297 = 0{,}0395$

$P(K \cap \overline{T}) = 0{,}01 - 0{,}0098 = 0{,}0002$

$P(\overline{K} \cap \overline{T}) = 0{,}99 - 0{,}0297 = 0{,}9603$

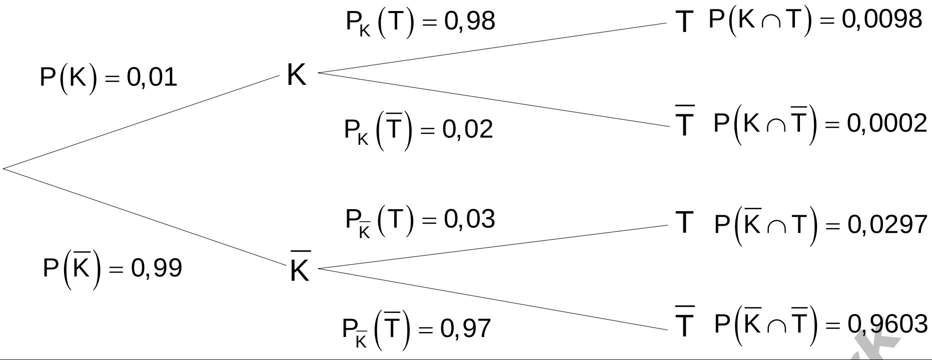
$P(\overline{T}) = 1 - 0{,}0395 = 0{,}9605$

Die 4 – Feldtafel:

	T (positiv)	$\overline{T}$ (negativ)	
K (krank)	0,0098	0,0002	0,01
$\overline{K}$ (gesund)	0,0297	0,9603	0,99
	0,0395	0,9605	1

A2 Ausführliche Lösung

b) Baumdiagramm:



A2 Ausführliche Lösung

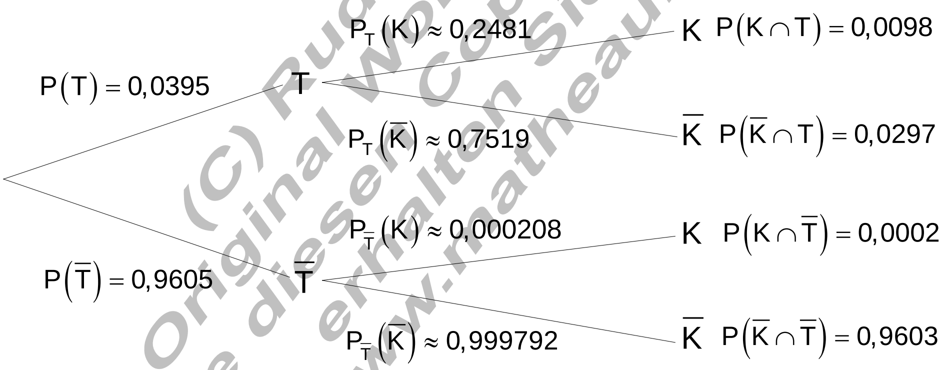
b) Berechnung aller für den Baum relevanten Wahrscheinlichkeiten.

$$P_K(T) = \frac{P(K \cap T)}{P(K)} = \frac{0{,}0098}{0{,}01} = 0{,}98 \qquad P_K(\overline{T}) = \frac{P(K \cap \overline{T})}{P(K)} = \frac{0{,}0002}{0{,}01} = 0{,}02$$

$$P_{\overline{K}}(T) = \frac{P(\overline{K} \cap T)}{P(\overline{K})} = \frac{0{,}0297}{0{,}99} = 0{,}03 \qquad P_{\overline{K}}(\overline{T}) = \frac{P(\overline{K} \cap \overline{T})}{P(\overline{K})} = \frac{0{,}9603}{0{,}99} = 0{,}97$$

A2 Ausführliche Lösung

b) Der inverse Baum:



A2	Ausführliche Lösung
b)	Berechnung aller für den Baum relevanten Wahrscheinlichkeiten. $P_T(K) = \frac{P(K \cap T)}{P(T)} = \frac{0{,}0098}{0{,}0395} \approx 0{,}2481$ $P_T(\overline{K}) = \frac{P(\overline{K} \cap T)}{P(T)} = \frac{0{,}0297}{0{,}0395} \approx 0{,}7519$ $P_{\overline{T}}(K) = \frac{P(K \cap \overline{T})}{P(\overline{T})} = \frac{0{,}0002}{0{,}9605} \approx 0{,}000208$ $P_{\overline{T}}(\overline{K}) = \frac{P(\overline{K} \cap \overline{T})}{P(\overline{T})} = \frac{0{,}9603}{0{,}9605} \approx 0{,}999792$

A2	Ausführliche Lösung	
c)	$P(T) = 0{,}0395$	Bei einer zufällig ausgewählten Person zeigt der Test mit einer Wahrscheinlichkeit von 0,0395 ein positives Ergebnis an.

A2	Ausführliche Lösung	
d)	$P_T(K) \approx 0{,}2481$	Eine Person, von der man weiß, dass sie positiv getestet wurde, ist mit einer Wahrscheinlichkeit von 0,2481 auch tatsächlich krank Kommentar: Das Ergebnis von ca. 25% ist nicht zufriedenstellend. Nur 25% aller positiv getesteten sind tatsächlich erkrankt. Das bedeutet, dass ca. 75% der positiv getesteten gesund sind. Es wäre wünschenswert, dass der Test verbessert wird.

A2	Ausführliche Lösung	
e)	$P_{\overline{T}}(\overline{K}) \approx 0{,}999792$	Eine Person, von der man weiß, dass sie negativ getestet wurde, ist mit einer Wahrscheinlichkeit von 0,999792 auch tatsächlich gesund. Kommentar: In diesem Fall ist das Ergebnis von ca. 99,98% sehr zufriedenstellend. Nur ca. 0,02% der als negativ getesteten Personen sind tatsächlich krank.

A3 Ausführliche Lösung

a)

A: Die Person ist männlich

$\overline{A}$: Die Person ist weiblich

B: Die Person ist Raucher

$\overline{B}$: Die Person ist Nichtraucher

Die 4 – Feldtafel:

	B (Raucher)	$\overline{B}$ (Nichtraucher)	
A (männlich)	$\frac{82}{674}$	$\frac{211}{674}$	$\frac{293}{674}$
$\overline{A}$ (weiblich)	$\frac{131}{674}$	$\frac{250}{674}$	$\frac{381}{674}$
	$\frac{213}{674}$	$\frac{461}{674}$	$\frac{674}{674}=1$

A3 Ausführliche Lösung

b)

$$P\left(\overline{A}\cap\overline{B}\right)=\frac{250}{674}\approx 0{,}371$$

Eine zufällig ausgewählte Person ist mit einer Wahrscheinlichkeit von 0,371 weiblich <u>und</u> raucht nicht.

A3 Ausführliche Lösung

c)

$$P_{\overline{A}}\left(\overline{B}\right)=\frac{P\left(\overline{A}\cap\overline{B}\right)}{P\left(\overline{A}\right)}=\frac{\frac{250}{674}}{\frac{381}{674}}=\frac{250}{381}\approx 0{,}656$$

Eine Person, von der man weiß, das sie weiblich ist, ist mit einer Wahrscheinlichkeit von 0,656 Nichtraucherin.

A3 Ausführliche Lösung

d) Wenn gilt: $P_A(B)\neq P(B)\Rightarrow$ A hängt von B ab.

$$P_A(B)=\frac{P(A\cap B)}{P(A)}=\frac{\frac{82}{674}}{\frac{293}{674}}=\frac{82}{293}\approx 0{,}28 \qquad \Rightarrow \quad P_A(B)\neq P(B)$$

$$P(B)=\frac{213}{674}\approx 0{,}316$$

Die Ereignisse A: „Mann“ und B: „Raucher“ sind voneinander abhängig.