Lösungen Bedingte Wahrscheinlichkeit II

Ausführliche Lösungen:

A1	**Aufgabe**	
	Es soll die Beliebtheit einer Fernsehsendung überprüft werden. Eine Blitzumfrage hatte folgendes Ergebnis: 30% der Zuschauer, die die Sendung gesehen hatten, waren 25 Jahre und jünger. Von diesen hatten 50% und von den übrigen Zuschauern (über 25 Jahre) hatten 80% eine positive Meinung.	
	a)	Stellen Sie den Sachzusammenhang in einer 4 – Feldtafel da. Verwenden Sie die Ereignisse (mit ihren Gegenereignissen): A: Der Zuschauer ist 25 Jahre alt und jünger. B: Der Zuschauer hat eine positive Meinung über die Sendung.
	b)	Zeichnen Sie das Baumdiagramm und den inversen Baum. Bestimmen Sie alle Pfadwahrscheinlichkeiten.
	c)	Wie viel % der Zuschauer, von denen man weiß, dass sie eine positive Meinung über die Sendung hatten, waren älter als 25 Jahre?
	d)	Wie viel % der Zuschauer, von denen man weiß, dass sie älter als 25 Jahre sind, hatten keine positive Meinung über die Sendung?
	e)	Überprüfen Sie durch Rechnung ob das Ereignis B unabhängig vom Ereignis A ist.

A1 **Ausführliche Lösung**

a) A: Zuschauer ist $\leq$ 25 Jahre alt

$\overline{A}$: Zuschauer ist $>$ 25 Jahre alt

B: Zuschauer hat eine positive Meinung von der Sendung

$\overline{B}$: Zuschauer hat eine negative Meinung von der Sendung

30% der Zuschauer sind $\leq$ 25 Jahre alt $\Rightarrow P(A) = 0{,}3$

70% der Zuschauer sind $>$ 25 Jahre alt $\Rightarrow P(\overline{A}) = 0{,}7$

Von den Zuschauern $\leq$ 25 hatten 50% eine positive Meinung.

$\Rightarrow P(A \cap B) = 0{,}5 \cdot 0{,}3 = 0{,}15$

Von den Zuschauern $\leq$ 25 hatten 50% eine negative Meinung.

$\Rightarrow P(A \cap \overline{B}) = 0{,}5 \cdot 0{,}3 = 0{,}15$

Von den Zuschauern $>$ 25 hatten 80% eine positive Meinung.

$\Rightarrow P(\overline{A} \cap B) = 0{,}8 \cdot 0{,}7 = 0{,}56$

Die restlichen Werte der 4 – Feldtafel lassen sich aus den bisher bekannten Werten berechnen:

$P(B) = 0{,}15 + 0{,}56 = 0{,}71$

$P(\overline{B}) = 1 - 0{,}71 = 0{,}29$

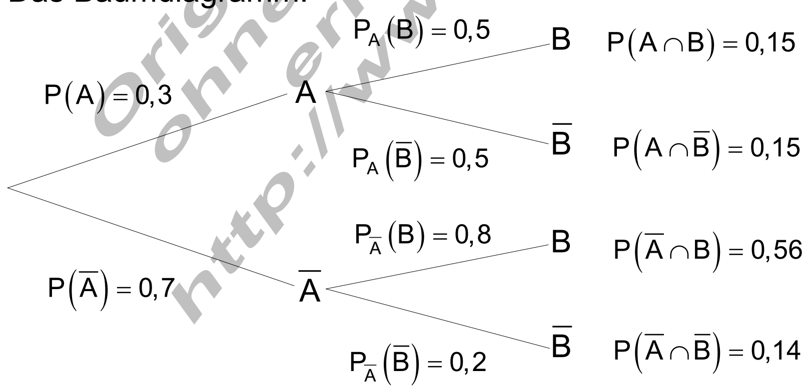
$P(\overline{A} \cap \overline{B}) = 0{,}29 - 0{,}15 = 0{,}14$

Die 4 – Feldtafel:

	B (Meinung positiv)	$\overline{B}$ (Meinung negativ)	
$A(\leq 25)$	0,15	0,15	0,3
$\overline{A}(> 25)$	0,56	0,14	0,7
	0,71	0,29	1

A1 **Ausführliche Lösung**

b) Das Baumdiagramm:

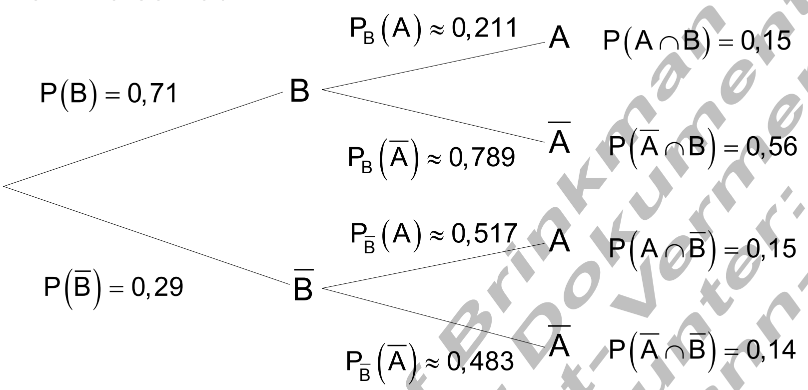


A1	**Ausführliche Lösung**
	b) Berechnung aller für den Baum relevanten Wahrscheinlichkeiten.

$$P_A(B)=\frac{P(A\cap B)}{P(A)}=\frac{0,15}{0,3}=0,5 \qquad P_A(\overline{B})=\frac{P(A\cap \overline{B})}{P(A)}=\frac{0,15}{0,3}=0,5$$

$$P_{\overline{A}}(B)=\frac{P(\overline{A}\cap B)}{P(\overline{A})}=\frac{0,56}{0,7}=0,8 \qquad P_{\overline{A}}(\overline{B})=\frac{P(\overline{A}\cap \overline{B})}{P(\overline{A})}=\frac{0,14}{0,7}=0,2$$

A1	**Ausführliche Lösung**
	b) Der inverse Baum:



A1	**Ausführliche Lösung**
	b) Berechnung aller für den Baum relevanten Wahrscheinlichkeiten.

$$P_B(A)=\frac{P(A\cap B)}{P(B)}=\frac{0,15}{0,71}\approx 0,211 \qquad P_B(\overline{A})=\frac{P(\overline{A}\cap B)}{P(B)}=\frac{0,56}{0,71}\approx 0,789$$

$$P_{\overline{B}}(A)=\frac{P(A\cap \overline{B})}{P(\overline{B})}=\frac{0,15}{0,29}\approx 0,517 \qquad P_{\overline{B}}(\overline{A})=\frac{P(\overline{A}\cap \overline{B})}{P(\overline{B})}=\frac{0,14}{0,29}\approx 0,483$$

A1	**Ausführliche Lösung**	
	c) $P_B(\overline{A})\approx 0,789$	Von allen Zuschauern, von den man weiß, das sie eine positive Meinung über die Sendung hatten, waren 78,9% älter als 25 Jahre.

A1	**Ausführliche Lösung**	
	d) $P_{\overline{A}}(\overline{B})=0,2$	Von allen Zuschauern, von den man weiß, das sie älter als 25 sind, hatten 20% eine negative Meinung über die Sendung.

A1	**Ausführliche Lösung**	
	e)	B ist unabhängig von A, falls gilt: $P_B(A) = P(A)$ $P_B(A) \approx 0{,}211$ $P(A) = 0{,}3$ $\Rightarrow P_B(A) \neq P(A) \Rightarrow$ keine Unabhängigkeit Das Ereignis B ist abhängig vom Ereignis A. Das bedeutet, die positive Meinung über die Fernsehsendung ist vom Alter der Zuschauer abhängig.

A2	**Aufgabe**	
	In einem Land der Dritten Welt leiden 1% der Menschen an einer bestimmten Infektionskrankheit. Ein Test zeigt die Krankheit bei den tatsächlich erkrankten zu 98% korrekt an. Leider zeigt der Test auch 3% der Gesunden als erkrankt an.	
	a)	Stellen Sie den Sachzusammenhang in einer 4 – Feldtafel da. Verwenden Sie die Ereignisse (mit ihren Gegenereignissen): K: Die getestete Person ist krank. T: Testergebnis ist positiv (Person wurde als krank getestet).
	b)	Zeichnen Sie das Baumdiagramm und den inversen Baum. Bestimmen Sie alle Pfadwahrscheinlichkeiten.
	c)	Mit welcher Wahrscheinlichkeit zeigt der Test bei einer zufällig ausgewählten Person ein positives Ergebnis?
	d)	Mit welcher Wahrscheinlichkeit ist eine als positiv getestete Person auch tatsächlich krank? Kommentieren Sie das Ergebnis.
	e)	Mit welcher Wahrscheinlichkeit ist eine als negativ getestete Person gesund? Kommentieren Sie das Ergebnis.

A2 Ausführliche Lösung

a)

K: Die getestete Person ist krank

$\overline{K}$: Die getestete Person ist gesund

T: Das Testergebnis ist positiv (Person wurde als krank getestet)

$\overline{T}$: Das Testergebnis ist negativ (Person wurde als gesund getestet)

1% der Menschen sind krank $\Rightarrow P(K) = 0{,}01$

99% der Menschen sind gesund $\Rightarrow P(\overline{K}) = 0{,}99$

Der Test zeigt die Krankheit bei den tatsächlich erkrankten zu 98% korrekt an

$\Rightarrow P(K \cap T) = 0{,}98 \cdot 0{,}01 = 0{,}0098$

Der Test zeigt auch 3% der gesunden als krank an

$\Rightarrow P(\overline{K} \cap T) = 0{,}03 \cdot 0{,}99 = 0{,}0297$

Die restlichen Werte der 4 – Feldtafel lassen sich aus den bisher bekannten Werten berechnen:

$P(T) = 0{,}0098 + 0{,}0297 = 0{,}0395$

$P(K \cap \overline{T}) = 0{,}01 - 0{,}0098 = 0{,}0002$

$P(\overline{K} \cap \overline{T}) = 0{,}99 - 0{,}0297 = 0{,}9603$

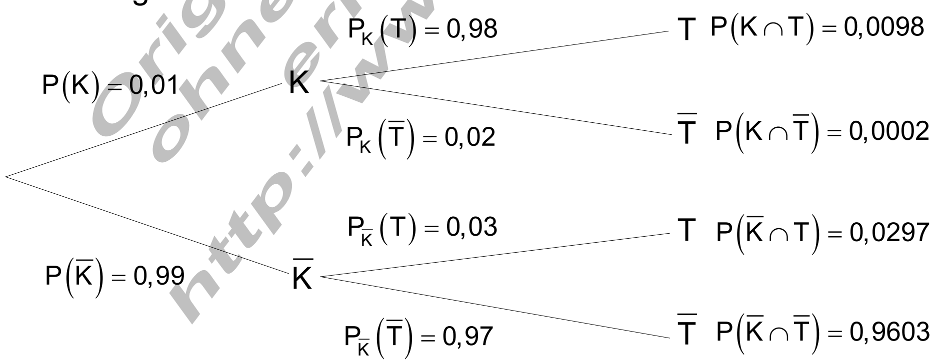
$P(\overline{T}) = 1 - 0{,}0395 = 0{,}9605$

Die 4 – Feldtafel:

	T (positiv)	$\overline{T}$ (negativ)	
K (krank)	0,0098	0,0002	0,01
$\overline{K}$ (gesund)	0,0297	0,9603	0,99
	0,0395	0,9605	1

A2 Ausführliche Lösung

b) Baumdiagramm:



A2 Ausführliche Lösung

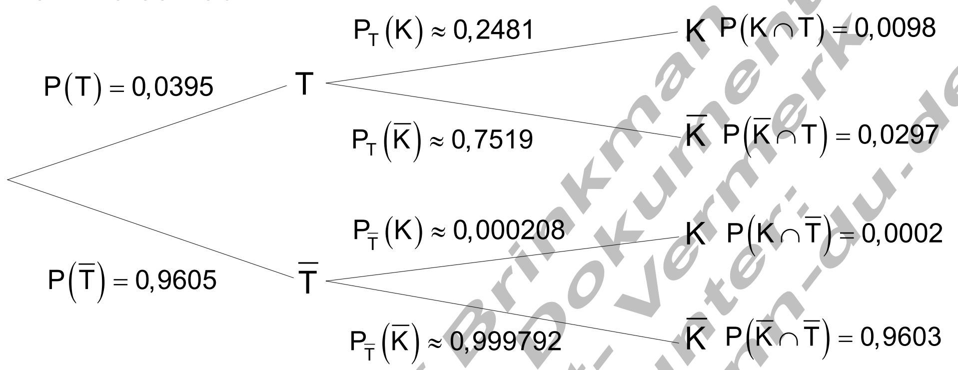
b) Berechnung aller für den Baum relevanten Wahrscheinlichkeiten.

$$P_K(T) = \frac{P(K \cap T)}{P(K)} = \frac{0{,}0098}{0{,}01} = 0{,}98 \qquad P_K(\overline{T}) = \frac{P(K \cap \overline{T})}{P(K)} = \frac{0{,}0002}{0{,}01} = 0{,}02$$

$$P_{\overline{K}}(T) = \frac{P(\overline{K} \cap T)}{P(\overline{K})} = \frac{0{,}0297}{0{,}99} = 0{,}03 \qquad P_{\overline{K}}(\overline{T}) = \frac{P(\overline{K} \cap \overline{T})}{P(\overline{K})} = \frac{0{,}9603}{0{,}99} = 0{,}97$$

A2 Ausführliche Lösung

b) Der inverse Baum:



A2 Ausführliche Lösung

b) Berechnung aller für den Baum relevanten Wahrscheinlichkeiten.

$$P_T(K) = \frac{P(K \cap T)}{P(T)} = \frac{0{,}0098}{0{,}0395} \approx 0{,}2481$$

$$P_T(\overline{K}) = \frac{P(\overline{K} \cap T)}{P(T)} = \frac{0{,}0297}{0{,}0395} \approx 0{,}7519$$

$$P_{\overline{T}}(K) = \frac{P(K \cap \overline{T})}{P(\overline{T})} = \frac{0{,}0002}{0{,}9605} \approx 0{,}000208$$

$$P_{\overline{T}}(\overline{K}) = \frac{P(\overline{K} \cap \overline{T})}{P(\overline{T})} = \frac{0{,}9603}{0{,}9605} \approx 0{,}999792$$

A2 Ausführliche Lösung

c) $P(T) = 0{,}0395$

Bei einer zufällig ausgewählten Person zeigt der Test mit einer Wahrscheinlichkeit von 0,0395 ein positives Ergebnis an.

A2	**Ausführliche Lösung**		
	d)	$P_T(K) \approx 0,2481$	Eine Person, von der man weiß, dass sie positiv getestet wurde, ist mit einer Wahrscheinlichkeit von 0,2481 auch tatsächlich krank Kommentar: Das Ergebnis von ca. 25% ist nicht zufriedenstellend. Nur 25% aller positiv getesteten sind tatsächlich erkrankt. Das bedeutet, dass ca. 75% der positiv getesteten gesund sind. Es wäre wünschenswert, dass der Test verbessert wird.

A2	**Ausführliche Lösung**		
	e)	$P_{\overline{T}}(\overline{K}) \approx 0,999792$	Eine Person, von der man weiß, dass sie negativ getestet wurde, ist mit einer Wahrscheinlichkeit von 0,999792 auch tatsächlich gesund. Kommentar: In diesem Fall ist das Ergebnis von ca. 99,98% sehr zufriedenstellend. Nur ca. 0,02% der als negativ getesteten Personen sind tatsächlich krank.

A3	**Aufgabe**	
	An einem Berufskolleg werden alle 674 Schüler/innen befragt ob sie rauchen oder nicht rauchen. Das Ergebnis der Befragung sieht wie folgt aus: 82 der insgesamt 293 Schüler (männlich) gaben an zu rauchen. 250 Schülerinnen gaben an, nicht zu rauchen.	
	a)	Stellen Sie den Sachzusammenhang in einer 4 – Feldtafel da. Verwenden Sie die Ereignisse (mit ihren Gegenereignissen): A: Die Person ist männlich. B: Die Person ist Raucher
	b)	Mit welcher Wahrscheinlichkeit ist eine zufällig ausgewählte Person weiblich und Nichtraucherin?
	c)	Der Schulleiter sieht eine Schülerin im Aufenthaltsraum. Mit welcher Wahrscheinlichkeit ist diese Schülerin Nichtraucherin?
	d)	Untersuchen Sie, ob das Ereignis „männlich“ und das Ereignis „Raucher“ voneinander abhängige Ereignisse sind.

A3	**Ausführliche Lösung**
	a)

A: Die Person ist männlich

$\overline{A}$: Die Person ist weiblich

B: Die Person ist Raucher

$\overline{B}$: Die Person ist Nichtraucher

Die 4 – Feldtafel:

	B (Raucher)	$\overline{B}$ (Nichtraucher)	
A (männlich)	$\frac{82}{674}$	$\frac{211}{674}$	$\frac{293}{674}$
$\overline{A}$ (weiblich)	$\frac{131}{674}$	$\frac{250}{674}$	$\frac{381}{674}$
	$\frac{213}{674}$	$\frac{461}{674}$	$\frac{674}{674}=1$

A3	**Ausführliche Lösung**	
b)	$P\left(\overline{A}\cap\overline{B}\right)=\frac{250}{674}\approx 0{,}371$	Eine zufällig ausgewählte Person ist mit einer Wahrscheinlichkeit von 0,371 weiblich <u>und</u> raucht nicht.

A3	**Ausführliche Lösung**	
c)	$P_{\overline{A}}\left(\overline{B}\right)=\frac{P\left(\overline{A}\cap\overline{B}\right)}{P\left(\overline{A}\right)}=\frac{\frac{250}{674}}{\frac{381}{674}}=\frac{250}{381}\approx 0{,}656$	Eine Person, von der man weiß, das sie weiblich ist, ist mit einer Wahrscheinlichkeit von 0,656 Nichtraucherin.

A3	**Ausführliche Lösung**
d)	Wenn gilt: $P_A(B)\neq P(B)\Rightarrow$ A hängt von B ab.

$$P_A(B)=\frac{P(A\cap B)}{P(A)}=\frac{\frac{82}{674}}{\frac{293}{674}}=\frac{82}{293}\approx 0{,}28 \qquad \Rightarrow \quad P_A(B)\neq P(B)$$

$$P(B)=\frac{213}{674}\approx 0{,}316$$

Die Ereignisse A: „Mann“ und B: „Raucher“ sind voneinander abhängig.