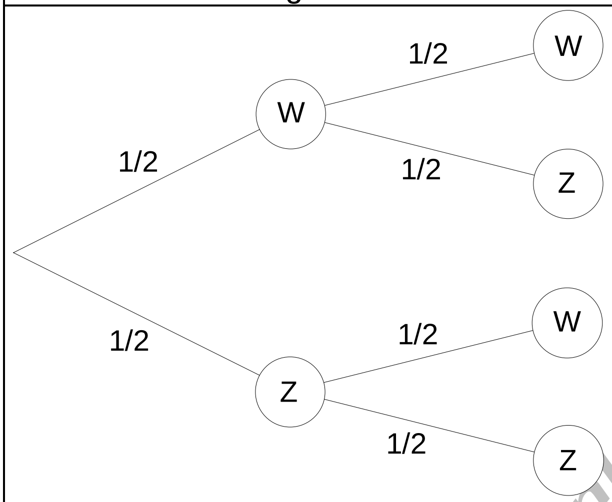
Lösungen Mehrstufige Zufallsversuche I

Ausführliche Lösungen:

A1	Ausführliche Lösung



$P(WW) = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{4} = 0{,}25$

$P(WZ) = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{4} = 0{,}25$

$P(ZW) = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{4} = 0{,}25$

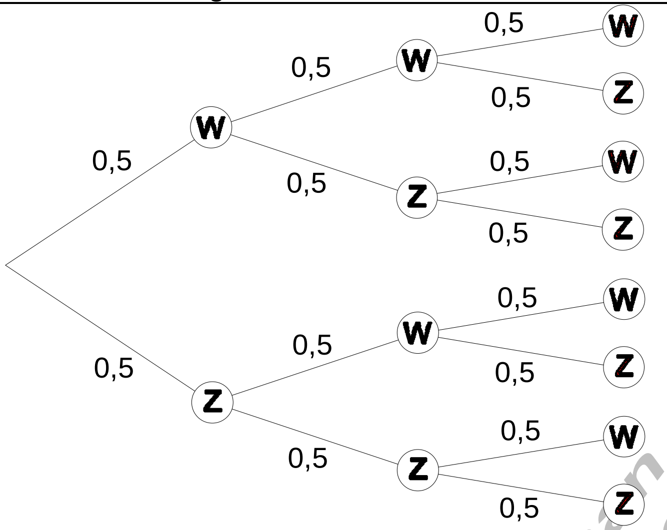
$P(ZZ) = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{4} = 0{,}25$

A1	Ausführliche Lösung
a)	A: Genau einmal Wappen. $P(A) = P(\{WZ\}) + P(\{ZW\}) = 0{,}25 + 0{,}25 = \underline{\underline{0{,}5}}$

A1	Ausführliche Lösung
b)	B: Mindestens einmal Wappen. $P(B) = P(\{WW;WZ;ZW\}) = P(\{WW\}) + P(\{WZ\}) + P(\{ZW\}) = 3 \cdot 0{,}25 = \underline{\underline{0{,}75}}$ Oder mit dem Gegenereignis $\overline{B}$: Keinmal Wappen: $P(B) = 1 - P(\overline{B}) = 1 - P(\{ZZ\}) = 1 - 0{,}25 = \underline{\underline{0{,}75}}$

A1	Ausführliche Lösung
c)	C: Höchstens einmal Wappen. $P(C) = P(\{WZ;ZW;ZZ\}) = P(\{WZ\}) + P(\{ZW\}) + P(\{ZZ\}) = 3 \cdot 0{,}25 = \underline{\underline{0{,}75}}$ Oder mit dem Gegenereignis $\overline{C}$: Zweimal Wappen: $P(C) = 1 - P(\overline{C}) = 1 - P(\{WW\}) = 1 - 0{,}25 = \underline{\underline{0{,}75}}$

A2 Ausführliche Lösung



$P(WWW) = 0,5^3 = 0,125$

$P(WWZ) = 0,5^3 = 0,125$

$P(WZW) = 0,5^3 = 0,125$

$P(WZZ) = 0,5^3 = 0,125$

$P(ZWW) = 0,5^3 = 0,125$

$P(ZWZ) = 0,5^3 = 0,125$

$P(ZZW) = 0,5^3 = 0,125$

$P(ZZZ) = 0,5^3 = 0,125$

A2 Ausführliche Lösung

a) A: Mehr als zweimal Wappen.

$P(A) = P(\{WWW\}) = \frac{1}{8} = 0,125$

A2 Ausführliche Lösung

b) B: Höchstens zweimal Wappen.
Höchstens zweimal Wappen bedeutet keinmal, einmal oder zweimal Wappen. Das Gegenereignis von B lautet: Dreimal Wappen.

$P(B) = 1 - P(\overline{B}) = 1 - P(\{WWW\}) = 1 - \frac{1}{8} = \frac{7}{8} = 0,875$

A2 Ausführliche Lösung

c) C: Mindestens einmal Zahl.
Mindestens einmal Zahl bedeutet einmal, zweimal oder dreimal Zahl. Das Gegenereignis von C lautet: Keinmal Zahl, das ist aber dreimal Wappen.

$P(C) = 1 - P(\overline{C}) = 1 - P(\{WWW\}) = 1 - \frac{1}{8} = \frac{7}{8} = 0,875$

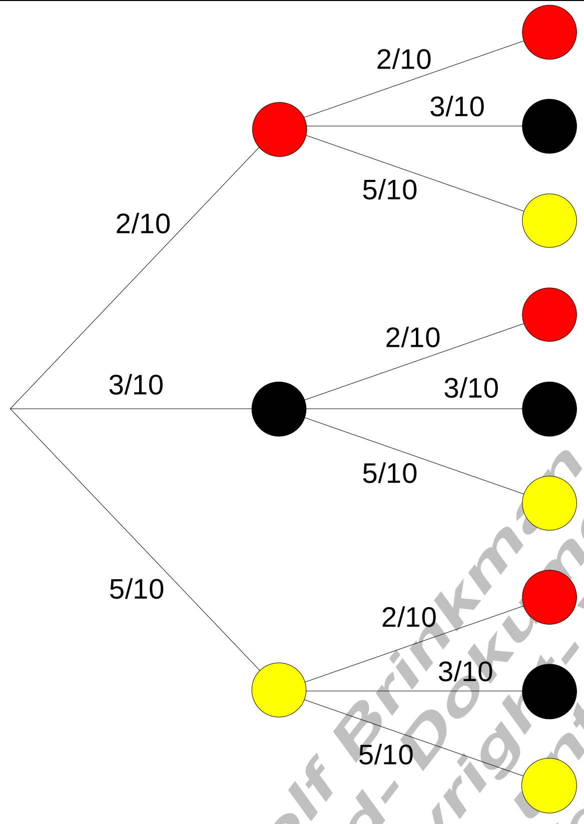
A2 Ausführliche Lösung

d) D: Genau einmal Wappen.

$P(D) = P(\{WZZ; ZWZ; ZZW\})$

$= P(\{WZZ\}) + P(\{ZWZ\}) + P(\{ZZW\}) = 3 \cdot 0,125 = 0,375$

A3 Ausführliche Lösung



$P(rr)=\frac{2}{10}\cdot\frac{2}{10}=\frac{4}{100}$

$P(rs)=\frac{2}{10}\cdot\frac{3}{10}=\frac{6}{100}$

$P(rg)=\frac{2}{10}\cdot\frac{5}{10}=\frac{10}{100}$

$P(sr)=\frac{3}{10}\cdot\frac{2}{10}=\frac{6}{100}$

$P(ss)=\frac{3}{10}\cdot\frac{3}{10}=\frac{9}{100}$

$P(sg)=\frac{3}{10}\cdot\frac{5}{10}=\frac{15}{100}$

$P(gr)=\frac{5}{10}\cdot\frac{2}{10}=\frac{10}{100}$

$P(gs)=\frac{5}{10}\cdot\frac{3}{10}=\frac{15}{100}$

$P(gg)=\frac{5}{10}\cdot\frac{5}{10}=\frac{25}{100}$

e_i	rr	rs	rg	sr	ss	sg	gr	gs	gg
P	$\frac{4}{100}$	$\frac{6}{100}$	$\frac{10}{100}$	$\frac{6}{100}$	$\frac{9}{100}$	$\frac{15}{100}$	$\frac{10}{100}$	$\frac{15}{100}$	$\frac{25}{100}$

A3 Ausführliche Lösung

a) A: Beide Kugeln sind gleichfarbig.

$$P(A)=P(\{rr\})+P(\{ss\})+P(\{gg\})=\frac{4}{100}+\frac{9}{100}+\frac{25}{100}=\frac{38}{100}=\underline{\underline{0,38}}$$

A3 Ausführliche Lösung

b) B: Die erste Kugel ist rot, und die zweite ist schwarz.

$$P(B)=P(\{rs\})=\frac{6}{100}=\underline{\underline{0,06}}$$

A3 Ausführliche Lösung

c) C: Die zweite Kugel ist rot oder schwarz.

$$P(C)=P(\{rr\})+P(\{rs\})+P(\{sr\})+P(\{ss\})+P(\{gr\})+P(\{gs\})$$

$$=\frac{4}{100}+\frac{6}{100}+\frac{6}{100}+\frac{9}{100}+\frac{10}{100}+\frac{15}{100}=\frac{50}{100}=\underline{\underline{0,5}}$$

A3 Ausführliche Lösung

d) Wie lautet das Gegenereignis von C und mit welcher Wahrscheinlichkeit tritt es auf?

$\overline{C}$: Die zweite Kugel ist schwarz

$$P\left(\overline{C}\right) = 1 - P(C) = 1 - 0{,}5 = \underline{\underline{0{,}5}}$$

A4 Ausführliche Lösung

Es handelt sich um einen vierstufigen Zufallsversuch (vier Fragen).
Die Wahrscheinlichkeit für eine richtige Antwort ist 1/3 , die für eine falsche 2/3.

$$P(3\text{ Fragen richtig}) = P(\{rrrr\}) + P(\{rrrf\}) + P(\{rrfr\}) + P(\{rfrr\}) + P(\{frrr\})$$

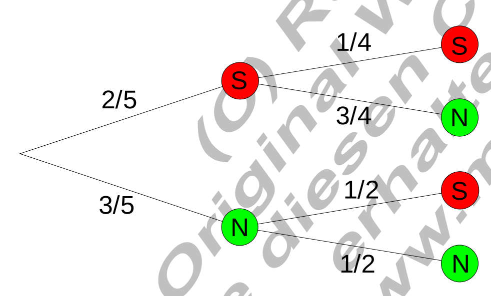
$$P(\{rrrr\}) = \frac{1}{3}\cdot\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{3} = \left(\frac{1}{3}\right)^4$$

$$P(\{rrrf\}) = P(\{rrfr\}) = P(\{rfrr\}) = P(\{frrr\}) = \left(\frac{1}{3}\right)^3\cdot\frac{2}{3}$$

$$P(3\text{ Fragen richtig}) = 4\cdot\left(\frac{1}{3}\right)^3\cdot\frac{2}{3} + \left(\frac{1}{3}\right)^4 = \frac{8}{3^4} + \frac{1}{3^4} = \frac{9}{3^4} = \frac{1}{9} \approx \underline{\underline{0{,}11}}$$

A5 Ausführliche Lösungen

Modell: In einer Urne befinden sich 3 grüne Kugeln (keine Schmuggler N) und 2 rote Kugeln (Schmuggler S).
Es wird zweimal eine Kugel gezogen ohne zurücklegen.



$$P(SS) = \frac{2}{5}\cdot\frac{1}{4} = \frac{2}{20} = \frac{1}{10} = 0{,}1$$

$$P(SN) = \frac{2}{5}\cdot\frac{3}{4} = \frac{6}{20} = \frac{3}{10} = 0{,}3$$

$$P(NS) = \frac{3}{5}\cdot\frac{1}{2} = \frac{3}{10} = 0{,}3$$

$$P(NN) = \frac{3}{5}\cdot\frac{1}{2} = \frac{3}{10} = 0{,}3$$

a) Mit welcher Wahrscheinlichkeit erwischt der Zollbeamte keinen Schmuggler?
P (NN) = 0,3.

b) Mit welcher Wahrscheinlichkeit erwischt der Zollbeamte mindestens einen der beiden Schmuggler?
P(mind. einen S) = P(SS) + P(SN) + P(NS) = 0,1 + 0,3 + 0,3 = 0,7.

A6 Ausführliche Lösung

Urnenmodell: 20 rote Kugeln (Klasse 1) und 20 grüne Kugeln (Klasse 2).
Sechsmal ziehen ohne zurücklegen.

$$P = P(\{rrrrrr\}) + P(\{gggggg\})$$

$P(\{rrrrrr\}) = P(\{gggggg\})$ Wahrscheinlichkeiten für beide Klassen gleich

$P(\{rrrrrr\}) = \frac{20\cdot19\cdot18\cdot17\cdot16\cdot15}{40\cdot39\cdot38\cdot37\cdot36\cdot35}$ Ziehen ohne zurücklegen

$$P = P(\{rrrrrr\}) + P(\{gggggg\}) = 2\cdot\frac{20\cdot19\cdot18\cdot17\cdot16\cdot15}{40\cdot39\cdot38\cdot37\cdot36\cdot35} = \underline{\underline{0{,}02}}$$

A7 Ausführliche Lösung

A: Wenigstens eine Spielfolge mit dreimal grün bei n Spielfolgen.

$P(\{g\}) = \frac{1}{4}$ einmal grün pro Spiel

$\Rightarrow P(\{ggg\}) = \frac{1}{4}\cdot\frac{1}{4}\cdot\frac{1}{4} = \frac{1}{64}$ dreimal grün bei einer Spielfolge

Das Gegenereignis von A lautet:

$\overline{A}$: Keine Spielfolge mit dreimal grün bei n Spielfolgen.

$P(\{\overline{ggg}\}) = 1 - P(\{ggg\}) = 1 - \frac{1}{64} = \frac{63}{64}$ keine dreimal grün bei einer Spielfolge.

$$P(\overline{A}) = \left(\frac{63}{64}\right)^n \Rightarrow P(A) = 1 - P(\overline{A}) = 1 - \left(\frac{63}{64}\right)^n$$

$$P(A) > 0{,}6 \Leftrightarrow 1 - \left(\frac{63}{64}\right)^n > 0{,}6 \mid -1$$

$$\Leftrightarrow -\left(\frac{63}{64}\right)^n > -0{,}4 \mid :(-1)$$

$$\Leftrightarrow \left(\frac{63}{64}\right)^n < 0{,}4 \mid \ln$$

$$\Leftrightarrow n\cdot\underbrace{\ln\left(\frac{63}{64}\right)}_{<1} < \ln(0{,}4) \mid :\ln\left(\frac{63}{64}\right)$$

$$\Leftrightarrow n > \frac{\ln(0{,}4)}{\ln\left(\frac{63}{64}\right)} \approx \underline{\underline{58{,}18}}$$

Es muss mindestens 59 mal gespielt werden um wenigstens eine Spielfolge mit dreimal grün zu erhalten.