Lösungen Streumaße I

Ergebnisse:

E1	Ergebnis
	Der Modalwert ändert sich nicht, denn er ist der Merkmalswert, der am häufigsten vorkommt. Der Mittelwert wird größer. Der Median kann sich geringfügig ändern. Quartil 1 bleibt gleich, Quartil 2 kann sich geringfügig ändern.

E2	Ergebnisse	
	a)	Teil A: $s = 0{,}72$; Teil B: $s = 1{,}718$
	b)	Die Preise für Teil B schwanken stärker.

E3	Ergebnis
	Varianz 1,735 ; Standardabweichung 1,317

E4	Ergebnisse			
	a)	Kurs A	$\bar{x} = 2{,}75$; $s = 1{,}042$	Kurs A hat höheres Niveau. Die Streuung in beiden Kursen ist ähnlich. Kurs B hat einiges aufzuarbeiten.
		Kurs B	$\bar{x} = 3{,}5$; $s = 1{,}198$	
	b)	Siehe ausführliche Lösungen.		
	c)	Note (x_i): 1 ; 1,5 ; 2 ; 2,5 ; 3 ; 3,5 ; 4 ; 4,5 ; 5 ; 5,5 Kurs A (n_i): 2 ; 2 ; 6 ; 3 ; 1 ; 2 ; 3 ; 2 ; 1 ; 0	$\Rightarrow \bar{x} = 2{,}75$; $s = 1{,}165$	
	d)	Note (x_i): 1 ; 1,5 ; 2 ; 2,5 ; 3 ; 3,5 ; 4 ; 4,5 ; 5 ; 5,5 Kurs A (n_i): 0 ; 2 ; 0 ; 3 ; 2 ; 9 ; 2 ; 3 ; 0 ; 2	$\Rightarrow \bar{x} = 3{,}5$; $s = 1$	
	e)	Siehe ausführliche Lösungen.		

E5	Ergebnis
	$\bar{x} = 22{,}167$; $s = 19{,}209$ Auf Grund der großen Streuung ist der Mittelwert zur Lagerdisposition nicht geeignet.

E6	Ergebnisse	
	a)	$\bar{x} = 15077{,}692$; $x_{Med} = 15257$; $Q_A = 6373{,}50$; $s = 4015{,}668$
	b)	Siehe ausführliche Lösungen.
	c)	Mittelwert und Standardabweichung erhöhen sich. Median und Quartilsabstand ändern sich nicht.

Ausführliche Lösungen:

A1 Ausführliche Lösung

Der Modalwert ändert sich nicht, denn er ist der Merkmalswert, der am häufigsten vorkommt.
Der Mittelwert wird größer.
Der Median kann sich geringfügig ändern.
Quartil 1 bleibt gleich, Quartil 2 kann sich geringfügig ändern.

1 2 3 4 $\underbrace{5\ 6}_{Q_1=5,5}$ 7 8 9 $\underbrace{10\ 11}_{x_{Med}=10,5}$ 12 13 14 $\underbrace{15\ 16}_{Q_3=15,5}$ 17 18 19 20

1 2 3 4 $\underbrace{5\ 6}_{Q_1=5,5}$ 7 8 9 10 $\underbrace{11}_{x_{Med}=11}$ 12 13 14 15 $\underbrace{16\ 17}_{Q_3=16,5}$ 18 19 20 50

A2 Ausführliche Lösung

a)

Teil A

i	x_i	$\bar{x}$	$(x_i-\bar{x})^2$
1	4,00	4,217	0,047
2	4,10	4,217	0,014
3	5,40	4,217	1,399
4	4,90	4,217	0,466
5	3,50	4,217	0,514
6	3,40	4,217	0,667
	25,30		3,107

Teil B

i	x_i	$\bar{x}$	$(x_i-\bar{x})^2$
1	11,00	11,717	0,514
2	11,90	11,717	0,033
3	14,90	11,717	10,131
4	10,00	11,717	2,948
5	12,60	11,717	0,780
6	9,90	11,717	3,301
	70,30		17,707

Teil A: $n=6 \quad \bar{x}=\frac{1}{6}\sum_{i=1}^{6} x_i=\frac{25,3}{6}=4,217$

$$s^2=\frac{1}{6}\sum_{i=1}^{6}(x_i-\bar{x})^2=\frac{3,107}{6}=0,518 \quad \Rightarrow \quad s=\sqrt{s^2}=\underline{\underline{0,72}}$$

Teil B: $n=6 \quad \bar{x}=\frac{1}{6}\sum_{i=1}^{6} x_i=\frac{70,30}{6}=11,717$

$$s^2=\frac{1}{6}\sum_{i=1}^{6}(x_i-\bar{x})^2=\frac{17,707}{6}=2,951 \quad \Rightarrow \quad s=\sqrt{s^2}=\underline{\underline{1,718}}$$

b) Die Preise für Teil B schwanken stärker.

A3 Ausführliche Lösung

i	x_i	h_i	$x_i \cdot h_i$	$\bar{x}$	$(x_i-\bar{x})^2 \cdot h_i$
1	0	0,200	0,000	1,625	0,528
2	1	0,325	0,325	1,625	0,127
3	2	0,250	0,500	1,625	0,035
4	3	0,150	0,450	1,625	0,284
5	4	0,050	0,200	1,625	0,282
6	6	0,025	0,150	1,625	0,479
		1,000	1,625		1,735

$$\bar{x} = \sum_{i=1}^{6} x_i \cdot h_i = \underline{\underline{1,625}}$$

$$s^2 = \sum_{i=1}^{6} (x_i - \bar{x})^2 \cdot h_i = \underline{\underline{1,735}}$$

$$s = \sqrt{s^2} = \underline{\underline{1,317}}$$

A4 Ausführliche Lösung

a)

Kurs A

i	x_i	n_i	$x_i \cdot n_i$	$\bar{x}$	$(x_i-\bar{x})^2 \cdot n_i$
1	1	2	2,0	2,75	6,125
2	1,5	2	3,0	2,75	3,125
3	2	4	8,0	2,75	2,250
4	2,5	3	7,5	2,75	0,188
5	3	4	12,0	2,75	0,250
6	3,5	2	7,0	2,75	1,125
7	4	3	12,0	2,75	4,688
8	4,5	2	9,0	2,75	6,125
9	5	0	0,0	2,75	0,000
10	5,5	0	0,0	2,75	0,000
		22	60,5		23,876

$$n = \sum_{i=1}^{10} n_i = 22$$

$$\bar{x} = \frac{1}{22} \sum_{i=1}^{10} x_i \cdot n_i = \frac{60,5}{22} = \underline{\underline{2,75}}$$

$$s^2 = \frac{1}{22} \sum_{i=1}^{10} (x_i - \bar{x})^2 \cdot n_i = \frac{23,876}{22} = 1,085$$

$$s = \sqrt{s^2} = \sqrt{1,085} = \underline{\underline{1,042}}$$

Kurs B

i	x_i	n_i	$x_i \cdot n_i$	$\bar{x}$	$(x_i-\bar{x})^2 \cdot n_i$
1	1	1	1,0	3,50	6,250
2	1,5	1	1,5	3,50	4,000
3	2	2	4,0	3,50	4,500
4	2,5	2	5,0	3,50	2,000
5	3	3	9,0	3,50	0,750
6	3,5	4	14,0	3,50	0,000
7	4	4	16,0	3,50	1,000
8	4,5	2	9,0	3,50	2,000
9	5	2	10,0	3,50	4,500
10	5,5	2	11,0	3,50	8,000
		23	80,5		33,000

$$n = \sum_{i=1}^{10} n_i = 23$$

$$\bar{x} = \frac{1}{23} \sum_{i=1}^{10} x_i \cdot n_i = \frac{80,5}{23} = \underline{\underline{3,5}}$$

$$s^2 = \frac{1}{23} \sum_{i=1}^{10} (x_i - \bar{x})^2 \cdot n_i = \frac{33}{23} = 1,435$$

$$s = \sqrt{s^2} = \sqrt{1,435} = \underline{\underline{1,198}}$$

Kurs A hat höheres Niveau. Die Streuung in beiden Kursen ist ähnlich.
Kurs B hat einiges aufzuarbeiten.

A4	Ausführliche Lösung
b)	Der Quartilsabstand ist das bessere Maß, die Spannweite ist zu sehr von Ausreißern abhängig.

A4	Ausführliche Lösung
c)	Aus der Nähe des Mittelwertes werden Häufigkeiten nach außen gebracht. Das muss aber so geschehen, dass der Mittelwert gleich bleibt.

Kurs A (mit größerer Standardabweichung)

i	x_i	n_i	$x_i \cdot n_i$	$\bar{x}$	$(x_i-\bar{x})^2 \cdot n_i$
1	1	2	2,0	2,75	6,125
2	1,5	2	3,0	2,75	3,125
3	2	6	12,0	2,75	3,375
4	2,5	3	7,5	2,75	0,188
5	3	1	3,0	2,75	0,063
6	3,5	2	7,0	2,75	1,125
7	4	3	12,0	2,75	4,688
8	4,5	2	9,0	2,75	6,125
9	5	1	5,0	2,75	5,063
10	5,5	0	0,0	2,75	0,000
		22	60,5		29,877

Note (x_i)	1	1,5	2	2,5	3	3,5	4	4,5	5	5,5
Kurs A (n_i)	2	2	6	3	1	2	3	2	1	0

$$n = \sum_{i=1}^{10} n_i = 22$$

$$\bar{x} = \frac{1}{22}\sum_{i=1}^{10} x_i \cdot n_i = \frac{60,5}{22} = \underline{\underline{2,75}}$$

$$s^2 = \frac{1}{22}\sum_{i=1}^{10}(x_i-\bar{x})^2 \cdot n_i = \frac{29,877}{22} = 1,358$$

$$s = \sqrt{s^2} = \sqrt{1,358} = \underline{\underline{1,165}}$$

A4	Ausführliche Lösung
d)	

i	x_i	n_i	$x_i \cdot n_i$	$\bar{x}$	$(x_i-\bar{x})^2 \cdot n_i$
1	1	0	0,0	3,50	0,000
2	1,5	2	3,0	3,50	8,000
3	2	0	0,0	3,50	0,000
4	2,5	3	7,5	3,50	3,000
5	3	2	6,0	3,50	0,500
6	3,5	9	31,5	3,50	0,000
7	4	2	8,0	3,50	0,500
8	4,5	3	13,5	3,50	3,000
9	5	0	0,0	3,50	0,000
10	5,5	2	11,0	3,50	8,000
		23	80,5		23,000

$$n = \sum_{i=1}^{10} n_i = 23$$

$$\bar{x} = \frac{1}{23}\sum_{i=1}^{10} x_i \cdot n_i = \frac{80,5}{23} = \underline{\underline{3,5}}$$

$$s^2 = \frac{1}{23}\sum_{i=1}^{10}(x_i-\bar{x})^2 \cdot n_i = \frac{23}{23} = 1,000$$

$$s = \sqrt{s^2} = \sqrt{1,000} = \underline{\underline{1,000}}$$

A4 Ausführliche Lösung

e) Eine große Standardabweichung bedeutet:
Das Leistungsniveau des Kurses ist sehr unterschiedlich.
Die Ursache könnte ein hohes Anspruchsniveau sein.
Eine kleine Streuung bedeutet:
Homogenes Leistungsniveau.
Die Ursache könnte ein geringes Anspruchsniveau sein.
In beiden Fällen ist ein Blick auf den Mittelwert zu werfen, um den herum die Streuung stattfindet.

A5 Ausführliche Lösung

i	x_i	$\bar{x}$	$(x_i - \bar{x})^2$
1	2	22,167	406,708
2	0	22,167	491,367
3	4	22,167	330,040
4	12	22,167	103,368
5	24	22,167	3,360
6	54	22,167	1013,340
7	43	22,167	434,014
8	35	22,167	164,686
9	48	22,167	667,344
10	35	22,167	164,686
11	8	22,167	200,704
12	1	22,167	448,042
	266		4427,668

$n = 12$

$$\bar{x} = \frac{1}{12}\sum_{i=1}^{12} x_i = \frac{266}{12} = \underline{\underline{22,167}}$$

$$s^2 = \frac{1}{12}\sum_{1=1}^{12}\left(x_i - \bar{x}\right)^2 = \frac{4427,668}{12} = \underline{\underline{368,972}}$$

$$s = \sqrt{s^2} = \sqrt{368,972} = \underline{\underline{19,209}}$$

Auf Grund der großen Streuung ist der Mittelwert zur Lagerdisposition nicht geeignet.
Die Standardabweichung bestätigt die große Streuung.
Die Lagerhaltung sollte den Verkaufszahlen angepasst werden.
In den Wintermonaten geringer Vorrat, im Frühjahr eine entsprechende Lageraufstockung.

A6 Ausführliche Lösung

a)

Mittelwert: $\bar{x} = \frac{1}{13}\sum_{i=1}^{13} x_i = \frac{196010}{13} = \underline{\underline{15077,692}}$

Geordnete Liste:

9999 10999 11100 11432 11700 14980 15257 15365 15400 17234 18045 19999 24500

$x_{Med} = x_7 = \underline{\underline{15257}}$

$Q_1 = (x_3 + x_4)/2 = (11100 + 11432)/2 = \underline{\underline{11266}}$

$Q_3 = (x_{10} + x_{11})/2 = (17234 + 18045)/2 = \underline{\underline{17639,50}}$

$Q_A = Q_3 - Q_1 = 17639,50 - 11266 = \underline{\underline{6373,50}}$

i	x_i	$\bar{x}$	$(x_i - \bar{x})^2$
1	15400	15077,692	103882,447
2	18045	15077,692	8804916,767
3	24500	15077,692	88779888,047
4	9999	15077,692	25793112,431
5	19999	15077,692	24219272,431
6	11100	15077,692	15822033,647
7	15257	15077,692	32151,359
8	10999	15077,692	16635728,431
9	15365	15077,692	82545,887
10	17234	15077,692	4649664,191
11	14980	15077,692	9543,727
12	11700	15077,692	11408803,247
13	11432	15077,692	13291070,159
	196010		209632612,771

$\bar{x} = \frac{1}{13}\sum_{i=1}^{13} x_i = \frac{196010}{13} = \underline{\underline{15077,692}}$

$s^2 = \frac{1}{13}\sum_{i=1}^{13}(x_i - \bar{x})^2$

$= \frac{209632612,771}{13} = 16125585,598$

$s = \sqrt{16125585,598} = \underline{\underline{4015,668}}$

A6 Ausführliche Lösung

b) Der Mittelwert der Preise gibt an, wie viel ein Fahrzeug kosten würde, wenn man die Summe aller Listenpreise gleichmäßig auf alle Fahrzeuge verteilt.
Der Median ist der Listenpreis, der genau in der Mitte der sortierten Preisliste liegt.
Die Standardabweichung ist das Maß für die Streuung der einzelnen Listenpreise um den Mittelwert.
Der Quartilsabstand zeigt, in welchem Bereich die zentralen 50% der Listenpreise liegen. Bei der Berechnung wird die Reihenfolge und die Anzahl der Listenpreise berücksichtigt.

A6 Ausführliche Lösung

c) Eine Preiserhöhung des teuersten Fahrzeugs wirkt sich wie folgt aus:
Mittelwert und Standardabweichung erhöhen sich.
Median und Quartilsabstand ändern sich nicht (sind gegen Ausreißer resistent).