

Lösungen Mittelwert, Median I

Ergebnisse:

E1	Ergebnis
	$x_{\text{Med}} = 68,5$; $\bar{x} \approx 69,1$
E2	Ergebnisse
	a) $x_{\text{Med}} = 20$; $x_{\text{Mod}} = 15$; $\bar{x} = 27,1925$ 52,4% bekommen mindestens 20 €, das sind etwa 63 Schüler.
	b) Etwa 25,8% der überprüften Schüler bekommen weniger als 10 €. Im Durchschnitt bekommen sie 5,40 €.
	c) Taschengeldsumme 1312,50 €. Prozentualer Anteil etwa 40,22%.
E3	Ergebnisse
	a) Siehe ausführliche Lösung.
	b) $x_{\text{Med}} = 5$; $\bar{x} \approx 4,87$
	c) Mittlere Abweichung vom Median etwa 1,7. Mittlere Abweichung vom Durchschnitt etwa 1,59.
E4	Ergebnis
	Insgesamt kamen 2001 1599 Jugendliche zwischen 18 und 25 Jahren im Verkehr um. Bezogen auf je 100000 sind das 24,6 (Mittelwert).
E5	Ergebnisse
	a) Nach 4 Jahren erhält der Besitzer nur noch 30% des Kaufpreises.
	b) Der durchschnittliche Wertverlust beträgt 17,5% pro Jahr.
E6	Ergebnis
	Der Standort des Tanklagers befindet sich 92 km von A entfernt, das bedeutet 2 km hinter C. Gesamtlänge aller Rohrleitungen beträgt 272 km.

Ausführliche Lösung:

A1	Ausführliche Lösung	
	<u>Stängel - Blatt - Diagramm</u>	
	5	2 3 7 8 8 9
	6	0 2 3 3 4 4 5 5 8 8 9 9
	7	0 1 1 2 3 4 7
	8	0 0 1 2 4 8
	9	0
	Anzahl der Merkmalsausprägungen: $n = 32$	
	Median :	$x_{\text{Med}} = \frac{1}{2}(x_{\frac{n}{2}} + x_{\frac{n}{2}+1}) = \frac{1}{2}(x_{16} + x_{17}) = \frac{1}{2}(68 + 69) = \underline{\underline{68,5}}$
	arithmetisches Mittel:	$\bar{x} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i = \frac{1}{32} \cdot 2210 \approx \underline{\underline{69,1}}$
Arithmetisches Mittel und Median liegen nahe beieinander. Einen Modalwert gibt es nicht, wie man leicht aus dem Diagramm ablesen kann. Es gibt mehrere Merkmalsausprägungen mit der Häufigkeit 2 aber keine die darüber liegt.		

A2	Ausführliche Lösung							
	a)	Klasse x_i	$0 \leq x < 5$	$5 \leq x < 10$	$10 \leq x < 20$	$20 \leq x < 30$	$30 \leq x < 50$	$50 \leq x < 75$
		rel. H. (%) h_i	10,8	15	21,8	15,8	19,1	17,5
		Klassenmitte m_i	2,5	7,5	15	25	40	62,5
		x_i	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6
	Gerechnet wird mit den Klassenmitten, Klassenzahl $n = 6$ (gerade)							
	$\Rightarrow x_{\text{Med}} = \frac{1}{2}(x_{\frac{n}{2}} + x_{\frac{n}{2}+1}) = \frac{1}{2}(x_3 + x_4) = \frac{1}{2}(15 + 25) = \underline{\underline{20}}$							
	Der Modalwert ist die Klasse mit der größten Häufigkeit: $x_{\text{Mod}} = 15$ (Klassenmitte)							
	Mittelwert: Es gibt $k = 6$ Klassen, gerechnet wird mit den Klassenmitten m_i							
	$\bar{x} = \sum_{i=1}^k m_i \cdot h_i$ $= 2,5 \cdot 0,108 + 7,5 \cdot 0,15 + 15 \cdot 0,218 + 25 \cdot 0,158 + 40 \cdot 0,191 + 62,5 \cdot 0,175 = \underline{\underline{27,1925}}$							
Mindestens 20 € bedeutet: $20 \leq x < 75$								
Summe der relativen Häufigkeiten für dieses Intervall: $15,8 + 19,1 + 17,5 = 52,4$								
52,4% bekommen mindestens 20 €, das sind $n_{>20} = 0,524 \cdot 120 \approx \underline{\underline{63}}$ Schüler.								
(Ungenauigkeit stammt durch Rundungsfehler bei der rel. Häufigkeit)								

A2	Ausführliche Lösung b) Ärmstes Viertel bedeutet die unteren 25%. Das entspricht etwa den ersten beiden Klassen ($10,8 + 15 = 25,8$) $25,8 \triangleq 100\% \Rightarrow 10,8 \triangleq \frac{100\% \cdot 10,8}{25,8} \approx 41,86\% \quad 0 \leq x < 5$ $\Rightarrow 15 \triangleq \frac{100\% \cdot 15}{25,8} \approx 58,14\% \quad 5 \leq x < 10$ Mittelwert: $\bar{x}_{25\%} = 0,4186 \cdot 2,5 + 0,5814 \cdot 7,5 \approx 5,4$ Etwa 25,8% der überprüften Schüler (≈ 31 Schüler) bekommen weniger als 10 € Diese 31 Schüler bekommen im Durchschnitt <u>5,40 €</u>
----	---

E2	Ergebnis c) Gesamtausgaben = Durchschnittswert · Schülerzahl $\text{Gesamtausgabe} = \bar{x} \cdot 120 = 27,1925 \text{ €} \cdot 120 = \underline{\underline{3263,10 \text{ €}}}$ Schüler mit mindestens 50 €: $50 \leq x < 75$ 17,5% aller Schüler gehören zu dieser Klasse mit der Klassenmitte 62,5 Taschengeldsumme: $= 0,175 \cdot 120 \cdot 62,5 \text{ €} = \underline{\underline{1312,50 \text{ €}}}$ prozentualer Anteil: $p = \frac{100 \cdot W}{G} = \frac{100 \cdot 1312,50 \text{ €}}{3263,10 \text{ €}} \approx \underline{\underline{40,22\%}}$
----	--

A3	Ausführliche Lösung a) <div style="text-align: center;"> <p>Anzahl der Kunden an der Kasse</p> <table border="1" style="margin: 10px auto;"> <caption>Data for Bar Chart: Anzahl der Kunden an der Kasse</caption> <thead> <tr> <th>Anzahl der Kunden</th> <th>abs. Häufigkeit</th> </tr> </thead> <tbody> <tr><td>0</td><td>1</td></tr> <tr><td>2</td><td>3</td></tr> <tr><td>3</td><td>4</td></tr> <tr><td>4</td><td>5</td></tr> <tr><td>5</td><td>8</td></tr> <tr><td>6</td><td>3</td></tr> <tr><td>7</td><td>2</td></tr> <tr><td>9</td><td>4</td></tr> </tbody> </table> </div>	Anzahl der Kunden	abs. Häufigkeit	0	1	2	3	3	4	4	5	5	8	6	3	7	2	9	4
Anzahl der Kunden	abs. Häufigkeit																		
0	1																		
2	3																		
3	4																		
4	5																		
5	8																		
6	3																		
7	2																		
9	4																		

A3	Ausführliche Lösung
b)	<p>Median:</p> <p>0 2 2 2 3 3 3 3 4 4 4 4 4 5 5</p> <p>5 5 5 5 5 5 6 6 6 7 7 9 9 9 9</p> <p>$\Rightarrow x_{\text{Med}} = 5$</p> <p>Mittelwert: $\bar{x} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^j x_i \cdot n_i$ mit $j = 8$ Merkmalsausprägungen x_i</p> <p>($n_i =$ abs. Häufigkeit von x_i)</p> <p>$\bar{x} = \frac{1}{30} (0 \cdot 1 + 2 \cdot 3 + 3 \cdot 4 + 4 \cdot 5 + 5 \cdot 8 + 6 \cdot 3 + 7 \cdot 2 + 9 \cdot 4) = \frac{146}{30} \approx \underline{\underline{4,87}}$</p> <p>Im Durchschnitt standen in jedem Zeitabschnitt 5 Personen an der Kasse, das entspricht dem Median $x_{\text{Med}} = 5$</p>

A3	Ausführliche Lösung																																								
c)	<table border="1"> <thead> <tr> <th>Pers. a. d. Kasse x_i</th> <th>0</th> <th>2</th> <th>3</th> <th>4</th> <th>5</th> <th>6</th> <th>7</th> <th>9</th> <th>Σ</th> </tr> </thead> <tbody> <tr> <td>abs. Häufigkeit n_i</td> <td>1</td> <td>3</td> <td>4</td> <td>5</td> <td>8</td> <td>3</td> <td>2</td> <td>4</td> <td>30</td> </tr> <tr> <td>Abw. v. $x_{\text{Med}} = 5$</td> <td>1·5</td> <td>3·3</td> <td>4·2</td> <td>5·1</td> <td>8·0</td> <td>3·1</td> <td>2·2</td> <td>4·4</td> <td>50</td> </tr> <tr> <td>Abw. v. $\bar{x} = 4,87$</td> <td>1·4,87</td> <td>3·2,87</td> <td>4·1,87</td> <td>5·0,87</td> <td>8·0,13</td> <td>3·1,13</td> <td>2·2,13</td> <td>4·4,13</td> <td>47,65</td> </tr> </tbody> </table> <p>Mittlere Abweichung vom Median $x_{\text{Med}} = 5$: $\frac{50}{30} \approx \underline{\underline{1,6}}$</p> <p>Mittlere Abweichung vom Durchschnitt: $\bar{x} = 4,87$: $\frac{47,65}{30} \approx \underline{\underline{1,59}}$</p>	Pers. a. d. Kasse x_i	0	2	3	4	5	6	7	9	Σ	abs. Häufigkeit n_i	1	3	4	5	8	3	2	4	30	Abw. v. $x_{\text{Med}} = 5$	1·5	3·3	4·2	5·1	8·0	3·1	2·2	4·4	50	Abw. v. $\bar{x} = 4,87$	1·4,87	3·2,87	4·1,87	5·0,87	8·0,13	3·1,13	2·2,13	4·4,13	47,65
Pers. a. d. Kasse x_i	0	2	3	4	5	6	7	9	Σ																																
abs. Häufigkeit n_i	1	3	4	5	8	3	2	4	30																																
Abw. v. $x_{\text{Med}} = 5$	1·5	3·3	4·2	5·1	8·0	3·1	2·2	4·4	50																																
Abw. v. $\bar{x} = 4,87$	1·4,87	3·2,87	4·1,87	5·0,87	8·0,13	3·1,13	2·2,13	4·4,13	47,65																																

A4	Ausführliche Lösung
Wir rechnen rückwärts:	
<p>Auf 100000 kommen 24,6</p> <p>Auf 6500000 kommen ?</p>	Dreisatz
<p>Auf 100000 kommen 24,6</p> <p>Auf 1 kommt : 100000</p> <p>Auf 6500000 kommen · 6500000</p>	<hr/> $\frac{24,6 \cdot 6500000}{100000} = 1599$
<p>Insgesamt kamen 2001</p> <p>1599 Jugendliche zwischen 18 und 25 Jahren im Verkehr um.</p> <p>Bezogen auf je 100000 sind das $\frac{1599}{65} = 24,6$ (das ist ein Mittelwert)</p>	

A5	Ausführliche Lösung														
	a)	Kaufpreis = 100% Nach 4 Jahren: $100\% - 25\% - 20\% - 15\% - 10\% = \underline{\underline{30\%}}$ Nach 4 Jahren erhält der Besitzer nur noch 30% des Kaufpreises.													
b)	<table border="1"> <tr> <td>Jahr</td> <td>1</td> <td>2</td> <td>3</td> <td>4</td> </tr> <tr> <td>Wertverlust</td> <td>25%</td> <td>20%</td> <td>15%</td> <td>10%</td> </tr> </table>					Jahr	1	2	3	4	Wertverlust	25%	20%	15%	10%
	Jahr	1	2	3	4										
Wertverlust	25%	20%	15%	10%											
		Mittelwert: $\bar{x} = \frac{25\% + 20\% + 15\% + 10\%}{4} = \underline{\underline{17,5\%}}$													
Der durchschnittliche Wertverlust beträgt 17,5% pro Jahr.															

A6	Ausführliche Lösung				
Entfernungen		Abstandsquadrate			
		x^2	=	x^2	
Entfernung zu A in km	x	$(x - 50)^2$	=	$x^2 - 100x + 2500$	
Entfernung zu B in km	x - 50	$(90 - x)^2$	=	$x^2 - 180x + 8100$	
Entfernung zu C in km	90 - x	$(150 - x)^2$	=	$x^2 - 300x + 22500$	
Entfernung zu D in km	150 - x	$(170 - x)^2$	=	$x^2 - 340x + 28900$	
Entfernung zu E in km	170 - x				
		$S(x)$	=	$5x^2 - 920x + 62000$	
$S(x)$ stellt eine nach oben geöffnete Parabel dar.					
Das Minimum liegt im Scheitel. Scheitelpunktform: $S(x) = 5(x - x_s)^2 + y_s$					
Lösung durch quadratische Ergänzung:					
$S(x) = 5[x^2 - 184x + 12400] = 5[x^2 - 184x + 92^2 - 92^2 + 12400]$					
$= 5[(x - 92)^2 + 3936] \Rightarrow x_s = 92$					
Der Standort des Tanklagers befindet sich 92 km von A entfernt, das bedeutet 2 km hinter C.					
Gesamtlänge der Rohre:					
x - A		=	92 km		
x - B	=	$ 92 \text{ km} - 50 \text{ km} $	=	42 km	
x - C	=	$ 90 \text{ km} - 92 \text{ km} $	=	2 km	
x - D	=	$ 150 \text{ km} - 92 \text{ km} $	=	58 km	
x - E	=	$ 170 \text{ km} - 92 \text{ km} $	=	78 km	
	Summe:		=	<u>272 km</u>	
Gesamtlänge aller Rohrleitungen: <u>272 km</u>					