Lösungen Differenzial- und Integralrechnung zur Vorbereitung einer Klassenarbeit III

Ergebnisse

E1	Ergebnisse	
	a)	Zu Beginn der Aufzeichnungen (1900) betrug die Fördermenge 6000 Tonnen/Jahr.
	b)	Im Jahr 1996 wurde die Förderung eingestellt.
	c)	Im Jahr 1971 war die jährliche Fördermenge mit 26743 t/a maximal.
	d)	Im Jahr 1946 war der Fördermengenzuwachs am größten.
	e)	In den 96 Jahren wurden insgesamt 1.628.333 t Bodenschätze abgebaut.
	f)	Durchschnittlich wurden jährlich 16.962 Tonnen Bodenschätze gefördert.

E2	Ergebnisse	
	a)	Verlaufsbeschreibung siehe ausführliche Lösung.
	b)	Die Funktionsgleichung der Dosierung lautet: $f(x) = 1 + e \cdot x \cdot e^{-\frac{1}{4}x}$
	c)	Die Abnahme der Dosierung ist nach x = 8 Stunden am stärksten.
	d)	In 24 Stunden wird eine Medikamentenmenge von ca. 67 mg verabreicht.

E3	Ergebnisse	
	a)	Das Gefriergut erwärmt sich maximal bis auf 20 ^{0}C.
	b)	Nach etwa 22,385 Minuten stellt sich eine Temperatur von 0 ^{0}C ein.
	c)	Zu Beginn des Auftauvorgangs ist die Temperaturzunahme am größten.
	d)	Die durchschnittliche Temperatur (30. – 90. min) beträgt etwa 11,437 ^{0}C.

E4	Ergebnis
	Der gesuchte Flächeninhalt beträgt etwa 1,185 FE.

E5	Ergebnisse	
	a)	Zeichnung siehe ausführliche Lösung.
	b)	Hochpunkt: $HP\left(1 \mid 2e^{-1} \approx 0,736\right)$
	c)	Wendepunkt: $WP\left(2 \mid 4e^{-2} \approx 0,541\right)$
	d)	Wendetangente: $t(x) = -2 \cdot e^{-2} \cdot x + 8 \cdot e^{-2} \approx -0,271 \cdot x + 1,083$
	e)	Integral: $\int_0^\infty f(x)\,dx = \int_0^\infty 2x \cdot e^{-x}\,dx = 2$

E6	Ergebnisse	
	a)	Funktionsgleichung: $f(x) = \frac{1}{10}x^4 - \frac{12}{5}x^2 + 8$
	b)	$P_y(0 \mid 8); P_{x1}\left(\sqrt{20} \mid 0\right); P_{x2}\left(-\sqrt{20} \mid 0\right); P_{x3}(2 \mid 0); P_{x4}(-2 \mid 0)$
	c)	$P_{max}(0 \mid 8); P_{min1/2}\left(\pm\sqrt{12} \approx \pm 3,46 \mid -6,4\right); P_{w1}(2 \mid 0); P_{w2}(-2 \mid 0)$
	d)	Graph siehe ausführliche Lösung.
	e)	$\int_{-2}^{2}\left(\frac{1}{10}x^4 - \frac{12}{5}x^2 + 8\right)dx = \frac{512}{25} \approx 20,48$

Ausführliche Lösungen:

A1	Ausführliche Lösung	
	a)	$f(x)=6e^{\frac{1}{25}x}-\frac{1}{16}x\cdot e^{\frac{1}{25}x}=\left(6-\frac{1}{16}x\right)e^{\frac{1}{25}x}$ Förderung zu Beginn der Aufzeichnungen: $f(0)=\left(6-\frac{1}{16}\cdot 0\right)e^{\frac{1}{25}\cdot 0}=6$ Zu Beginn der Aufzeichnungen (1900) betrug die Fördermenge 6000 Tonnen/Jahr.

A1	Ausführliche Lösung	
	b)	$f(x)=\left(6-\frac{1}{16}x\right)e^{\frac{1}{25}x}$ Förderungsende wird durch die Nullstelle bestimmt. $f(x)=0\Leftrightarrow\left(6-\frac{1}{16}x\right)e^{\frac{1}{25}x}=0\Leftrightarrow 6-\frac{1}{16}x=0\Leftrightarrow x=96$ Im Jahr 1996 wurde die Förderung eingestellt.

A1	Ausführliche Lösung	
	c)	$f(x)=\left(6-\frac{1}{16}x\right)e^{\frac{1}{25}x}$ Maximale Förderung ist der Hochpunkt. $f'(x)=u'v+uv'$ mit $u=6-\frac{1}{16}x\Rightarrow u'=-\frac{1}{16}$ und $v=e^{\frac{1}{25}x}\Rightarrow v'=\frac{1}{25}e^{\frac{1}{25}x}$ $f'(x)=-\frac{1}{16}e^{\frac{1}{25}x}+\left(6-\frac{1}{16}x\right)\cdot\frac{1}{25}e^{\frac{1}{25}x}=\left(\frac{71}{400}-\frac{1}{400}x\right)e^{\frac{1}{25}x}$ $f'(x)=0\Leftrightarrow\frac{71}{400}-\frac{1}{400}x=0\Leftrightarrow x=71$ $f(71)=\left(6-\frac{1}{16}\cdot 71\right)e^{\frac{71}{25}}\approx 26{,}743$ Im Jahr 1971 war die jährliche Fördermenge maximal. Sie betrug etwa 26743 Tonnen pro Jahr.

A1 Ausführliche Lösung

d) Der Fördermengenzuwachs wird durch die Steigung des Graphen beschrieben.
Der Wendepunkt gibt die maximale Steigung an.

$$f(x)=\left(6-\frac{1}{16}x\right)e^{\frac{1}{25}x} \Rightarrow f'(x)=\left(\frac{71}{400}-\frac{1}{400}x\right)e^{\frac{1}{25}x}=\frac{1}{400}(71-x)e^{\frac{1}{25}x}$$

$$f''(x)=\frac{1}{400}(u'v+uv')$$

mit $u=71-x \Rightarrow u'=-1$ und $v=e^{\frac{1}{25}x} \Rightarrow v'=\frac{1}{25}e^{\frac{1}{25}x}$

$$f''(x)=\frac{1}{400}\left[-1\cdot e^{\frac{1}{25}x}+(71-x)\cdot\frac{1}{25}e^{\frac{1}{25}x}\right]=\frac{1}{10000}\cdot e^{\frac{1}{25}x}(46-x)$$

$$f''(x)=0 \Leftrightarrow 46-x=0 \Leftrightarrow x=46$$

Im Jahr 1946 war der Fördermengenzuwachs am größten.

A1 Ausführliche Lösung

e) $$f(x)=\left(6-\frac{1}{16}x\right)e^{\frac{1}{25}x}$$

Die gesamte Fördermenge bis zur Fördereinstellung im Jahr 1996 wird durch die Fläche unter dem Graphen dargestellt.

$$M=\int_0^{96} f(x)\,dx=\int_0^{96} e^{\frac{1}{25}x}\cdot\left(6-\frac{1}{16}x\right)dx$$ lösbar durch partielle Integration.

$$\int u'\cdot v\,dx=u\cdot v-\int u\cdot v'\,dx$$

$$u'=e^{\frac{1}{25}x} \Rightarrow u=\int e^{\frac{1}{25}x}\,dx=25\cdot e^{\frac{1}{25}x}$$

$$v=6-\frac{1}{16}x \Rightarrow v'=-\frac{1}{16}$$

$$\int f(x)\,dx=25\cdot e^{\frac{1}{25}x}\left(6-\frac{1}{16}x\right)-\int 25\cdot e^{\frac{1}{25}x}\left(-\frac{1}{16}\right)dx$$

$$=\left(150-\frac{25}{16}x\right)e^{\frac{1}{25}x}+\frac{25}{16}\int e^{\frac{1}{25}x}\,dx$$

$$=\left(150-\frac{25}{16}x\right)e^{\frac{1}{25}x}+\frac{625}{16}\cdot e^{\frac{1}{25}x}=\frac{25}{16}(121-x)\cdot e^{\frac{1}{25}x}$$

$$M=\int_0^{96} f(x)\,dx=\frac{25}{16}\left[(121-96)\cdot e^{\frac{96}{25}}-(121-0)\cdot e^{0}\right]$$

$$=\frac{25}{16}\left(25\cdot e^{\frac{96}{25}}-121\right)\approx 1628{,}339$$

In den verzeichneten 96 Jahren wurden insgesamt 1.628.333 Tonnen Bodenschätze abgebaut.

A1	Ausführliche Lösung	
	f)	Die durchschnittliche Fördermenge pro Jahr berechnet sich aus der Gesamtförderung dividiert durch die Anzahl der Jahre. $m = \frac{1628,339}{96} = 16,692$ Durchschnittlich wurden jährlich 16.962 Tonnen Bodenschätze gefördert.

A2	Ausführliche Lösung	
	a)	Verlaufsbeschreibung: Die Dosierung beginnt mit einem Anfangswert von 1 mg/h. Dann steigt sie monoton an, um nach 4 Stunden den Maximalwert von 5 mg/h zu erreichen. Danach fällt sie, zuerst stärker, dann weniger stark, monoton ab.

A2	Ausführliche Lösung	
	b)	Ansatz: $f(x) = n_0 + a \cdot x \cdot e^{k \cdot x}$ Anfangsdosierung: $n_0 = 1\,mg/h \Rightarrow f(x) = 1 + a \cdot x \cdot e^{k \cdot x}$ Maximale Dosierung nach $x = 4$ Stunden bedeutet: $f(x)$ hat bei $x = 4$ eine waagerechte Tangente, also $f'(4) = 0$ $f'(x) = u' \cdot v + u \cdot v'$ mit $u = a \cdot x$ und $v = e^{k \cdot x}$ sowie $u' = a$ und $v' = k \cdot e^{k \cdot x}$ $f'(x) = a \cdot e^{k \cdot x} + a \cdot x \cdot e^{k \cdot x} = a \cdot e^{k \cdot x}(1 + k \cdot x)$ $f'(4) = 0 \Leftrightarrow a \cdot e^{4k}(1 + 4 \cdot k) = 0$ $\Leftrightarrow 1 + 4 \cdot k = 0 \Leftrightarrow k = -\frac{1}{4}$ $\Leftrightarrow f(x) = 1 + a \cdot x \cdot e^{-\frac{1}{4}x}$ Extremwert nach $x = 4$ Stunden: $f(4) = 5$ $f(4) = 5 \Leftrightarrow 1 + 4a \cdot e^{-\frac{1}{4} \cdot 4} = 5$ $\Leftrightarrow 1 + 4a \cdot e^{-1} = 5 \Leftrightarrow a = e$ Funktionsgleichung der Dosierung: $\underline{\underline{f(x) = 1 + e \cdot x \cdot e^{-\frac{1}{4}x}}}$

A2	Ausführliche Lösung

c) Die Änderungsrate der Dosierung wird durch die erste Ableitung beschrieben. Ihr Maximum ist an der Wendestelle.

$$f(x) = 1 + e \cdot x \cdot e^{-\frac{1}{4}x}$$

Erste Ableitung:

$$f'(x) = u'v + uv' \text{ mit } u = e \cdot x \text{ und } v = e^{-\frac{1}{4}x}$$

$$\text{sowie } u' = e \text{ und } v' = -\frac{1}{4}e^{-\frac{1}{4}x}$$

$$f'(x) = e \cdot e^{-\frac{1}{4}x} - \frac{e}{4}x \cdot e^{-\frac{1}{4}x} = e \cdot e^{-\frac{1}{4}x}\left(1 - \frac{1}{4}x\right)$$

Zweite Ableitung:

$$f''(x) = u'v + uv' \text{ mit } u = e \cdot e^{-\frac{1}{4}x} \text{ und } v = 1 - \frac{1}{4}x$$

$$\text{sowie } u' = -\frac{1}{4}e \cdot e^{-\frac{1}{4}x} \text{ und } v' = -\frac{1}{4}$$

$$f''(x) = -\frac{1}{4}e \cdot e^{-\frac{1}{4}x} \cdot (1 - \frac{1}{4}x) - \frac{1}{4}e \cdot e^{-\frac{1}{4}x} = -\frac{1}{4}e \cdot e^{-\frac{1}{4}x} \cdot (2 - \frac{1}{4}x)$$

$$f''(x) = 0 \Leftrightarrow 2 - \frac{1}{4}x = 0 \Rightarrow x_w = 8 \text{ Bedingung für Wendestelle}$$

Dritte Ableitung:

$$f'''(x) = u'v + uv' \text{ mit } u = -\frac{1}{4}e \cdot e^{-\frac{1}{4}x} \text{ und } v = 2 - \frac{1}{4}x$$

$$\text{sowie } u' = \frac{1}{16}e \cdot e^{-\frac{1}{4}x} \text{ und } v' = -\frac{1}{4}$$

$$f'''(x) = u' = \frac{1}{16}e \cdot e^{-\frac{1}{4}x} \cdot (2 - \frac{1}{4}x) + \frac{1}{16}e \cdot e^{-\frac{1}{4}x} = \frac{1}{16}e \cdot e^{-\frac{1}{4}x} \cdot (3 - \frac{1}{4}x)$$

$$f'''(x_w) = f'''(8) = \frac{1}{16}e \cdot e^{-2} \cdot (3 - \frac{1}{4}8) = \frac{1}{16}e^{-1} \neq 0$$

$\Rightarrow x_w = 8$ ist Wendestelle von $f(x)$

Die Abnahme der Dosierung ist nach x = 8 Stunden am stärksten.

A2 Ausführliche Lösung

d) Die Menge des verabreichten Medikamentes entspricht der Fläche zwischen dem Graphen und der x – Achse, denn $\mathrm{mg}/\mathrm{h}\cdot \mathrm{h}=\mathrm{mg}$.
Dabei wird eine Infusionszeit von 24 Stunden zugrunde gelegt.

$$f(x)=1+e\cdot x\cdot e^{-\frac{1}{4}x}\Rightarrow \text{Menge}=M=\int_0^{24}f(x)\,dx=\int_0^{24}\left(1+e\cdot x\cdot e^{-\frac{1}{4}x}\right)dx$$

Aufteilung des Integrals in $I=\int_0^{24}1\,dx$ und in $II=\int_0^{24}x\cdot e^{-\frac{1}{4}x}\,dx$

so dass gilt: $M=I+e\cdot II$

$$I=\int_0^{24}1\,dx=\left[x\right]_0^{24}=24$$

$II=\int_0^{24}x\cdot e^{-\frac{1}{4}x}\,dx$ Lösung durch partielle integration mit $\int u\cdot v'\,dx=u\cdot v-\int u'\cdot v\,dx$

$$u(x)=x;v'(x)=e^{-\frac{1}{4}x};u'(x)=1;v(x)=\int e^{-\frac{1}{4}x}\,dx$$

Zwischenrechnung:

$\int e^{-\frac{1}{4}x}\,dx$ Lösung durch Substitution: $u(x)=-\frac{1}{4}x\Rightarrow \frac{du}{dx}=-\frac{1}{4}\Rightarrow dx=-4\,du$

$$\int e^{-\frac{1}{4}x}\,dx=-4\int e^{u}\,du=-4e^{u}=-4e^{-\frac{1}{4}x}=v$$

$$\int x\cdot e^{-\frac{1}{4}x}\,dx=x\cdot(-4e^{-\frac{1}{4}x})-\int 1\cdot(-4e^{-\frac{1}{4}x})\,dx=-4x\cdot e^{-\frac{1}{4}x}+4\int e^{-\frac{1}{4}x}\,dx$$

$$=-4x\cdot e^{-\frac{1}{4}x}-16e^{-\frac{1}{4}x}=-4e^{-\frac{1}{4}x}(x+4)$$

$$\Rightarrow II=\int_0^{24}x\cdot e^{-\frac{1}{4}x}\,dx=\left[-4e^{-\frac{1}{4}x}(x+4)\right]_0^{24}=-4e^{-6}(24+4)-\left[-4\cdot 4\right]=-112e^{-6}+16$$

$$\Rightarrow M=I+e\cdot II=24+e\left(-112e^{-6}+16\right)=24-112e^{-5}+16e\approx 66{,}738$$

In 24 Stunden wird eine Medikamentenmenge von ca. 67 mg verabreicht.

A3 Ausführliche Lösung

a)

$f(x) = 20 - 35 \cdot e^{-\frac{1}{40}x}$

Die Endtemperatur stellt sich erst nach sehr langer Zeit ein.

$$T_e = \lim_{x \to \infty} f(x) = \lim_{x \to \infty} \left(20 - \underbrace{35 \cdot e^{-\frac{1}{40}x}}_{\to 0} \right) = 20$$

Das Gefriergut erwärmt sich maximal bis auf 20 ^{0}C.

A3 Ausführliche Lösung

b)

$f(x) = 20 - 35 \cdot e^{-\frac{1}{40}x}$

Zu bestimmen ist die Nullstelle von $f(x)$

$$f(x) = 0 \Leftrightarrow 20 - 35 \cdot e^{-\frac{1}{40}x} = 0$$

$$\Leftrightarrow 35 \cdot e^{-\frac{1}{40}x} = 20 \,|: 35$$

$$\Leftrightarrow e^{-\frac{1}{40}x} = \frac{4}{7} \,|\ln$$

$$\Leftrightarrow -\frac{1}{40}x = \ln\left(\frac{4}{7}\right) \,|: \left(-\frac{1}{40}\right)$$

$$\Leftrightarrow x = -40 \cdot \ln\left(\frac{4}{7}\right) \approx 22{,}385$$

Nach etwa 22,385 Minuten stellt sich eine Temperatur von 0 ^{0}C ein.

A3 Ausführliche Lösung

c)

$f(x) = 20 - 35 \cdot e^{-\frac{1}{40}x}$

Die Temperaturzunahme wird durch die Steigung
des Graphen gekennzeichnet.
Wann also ist $f'(x)$ maximal?

$f'(x) = \frac{35}{40} \cdot e^{-\frac{1}{40}x}$ ist für $x = 0$ maximal

$f'(0) = \frac{35}{40}$ da $e^{-\frac{1}{40}x}$ für alle größeren x – Werte immer kleiner wird.

Damit wird auch der Wert des Produktes $\frac{35}{40} \cdot e^{-\frac{1}{40}x}$ immer kleiner.

Zu Beginn des Auftauvorgangs ist die Temperaturzunahme am größten.

A3	Ausführliche Lösung	
	d)	$f(x)=20-35\cdot e^{-\frac{1}{40}x}$ Durchschnittstemperatur von der 30. bis zur 90. Minute. $T_d=\frac{1}{90-30}\int_{30}^{90}f(x)dx=\frac{1}{60}\int_{30}^{90}f(x)dx$ $\int f(x)dx=20\int dx-35\int e^{-\frac{1}{40}x}dx$ $=20x-35\int e^{-\frac{1}{40}x}dx$ Mit $\int e^{-\frac{1}{40}x}dx=-40e^{-\frac{1}{40}x}$ (Lösung durch Substitution) wird $\frac{1}{60}\int_{30}^{90}f(x)dx=\frac{1}{60}\left[20x+1400\cdot e^{-\frac{1}{40}x}\right]_{30}^{90}$ $=\frac{1}{60}\left[1200+1400\left(e^{-\frac{9}{4}}-e^{-\frac{3}{4}}\right)\right]\approx 11,437$ Die durchschnittliche Temperatur für die Zeit von der 30. bis zur 90. Minute beträgt etwa 11,437 ^{0}C.

A4 Ausführliche Lösung

$f(x)=\frac{1}{2}x^3-3x^2+4x \quad \text{und} \quad g(x)=\frac{1}{2}x^2-\frac{1}{2}x$

Berechnung der Schnittpunkte beider Graphen.

$$f(x)-g(x)=0 \Leftrightarrow \frac{1}{2}x^3-3x^2+4x-\frac{1}{2}x^2-\frac{1}{2}x=0$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{2}x^3-\frac{7}{2}x^2+\frac{9}{2}x=0$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{2}\left(x^3-7x^2+9x\right)=0$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{2}x\left(x^2-7x+9\right)=0 \Rightarrow x_1=0$$

$$x^2-7x+9=0 \Rightarrow x_2=\frac{7}{2}+\sqrt{\frac{13}{4}} \text{ bzw. } x_3=\frac{7}{2}-\sqrt{\frac{13}{4}}$$

Die Integrationsgrenzen für den zu berechnenden Bereich sind

$x_1=0$ und $x_3=\frac{7}{2}-\sqrt{\frac{13}{4}}$

Die Flächenberechnung:

$$A=\int_{x_1}^{x_3}\left[f(x)-g(x)\right]dx=\frac{1}{2}\int_{x_1}^{x_3}\left(x^3-7x^2+9x\right)dx$$

$$=\frac{1}{2}\left[\frac{1}{4}x^4-\frac{7}{3}x^3+\frac{9}{2}x^2\right]_{x_1=0}^{x_3=\frac{7}{2}-\sqrt{\frac{13}{4}}}\approx 1{,}815$$

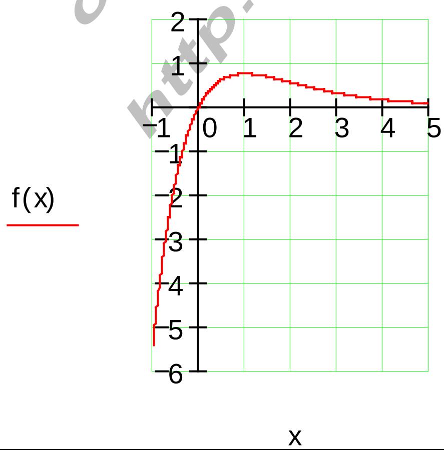
Der gesuchte Flächeninhalt beträgt etwa 1,185 FE.

A5 Ausführliche Lösung

a) $f(x)=2x\cdot e^{-x}$

Wertetabelle:

x	−1	0	1	2	3	4	5
f(x)	−5,44	0	0,74	0,54	0,3	0,15	0,07



A5	Ausführliche Lösung	
	b)	Hochpunkt:
		$f(x) = 2x \cdot e^{-x} \Rightarrow f'(x) = 2(u'v + uv')$
		mit $u = x \Rightarrow u' = 1$ und $v = e^{-x} \Rightarrow v' = -e^{-x}$
		$f'(x) = 2\left[1 \cdot e^{-x} - x \cdot e^{-x}\right] = 2(1-x)e^{-x}$
		$f'(x) = 0 \Leftrightarrow 2(1-x)e^{-x} = 0 \Rightarrow x = 1$ $f(1) = 2 \cdot 1 \cdot e^{-1} = 2e^{-1} \approx 0{,}736$ $\Rightarrow HP\left(1 \mid 2e^{-1}\right)$ bzw. $HP(1 \mid 0{,}736)$

A5	Ausführliche Lösung	
	c)	Wendepunkt:
		$f(x) = 2x \cdot e^{-x} \Rightarrow f'(x) = 2(1-x)e^{-x} \Rightarrow f''(x) = 2(u'v + uv')$
		mit $u = 1 - x \Rightarrow u' = -1$ und $v = e^{-x} \Rightarrow v' = -e^{-x}$
		$f'(x) = 2\left[-1 \cdot e^{-x} + (1-x) \cdot \left(-e^{-x}\right)\right] = 2(x-2)e^{-x}$
		$f''(x) = 0 \Leftrightarrow 2(x-2)e^{-x} = 0 \Rightarrow x = 2$ $f(2) = 2 \cdot 2 \cdot e^{-2} = 4e^{-2} \approx 0{,}541$ $\Rightarrow WP\left(2 \mid 4e^{-2}\right)$ bzw. $WP(2 \mid 0{,}541)$

A5	Ausführliche Lösung	
	d)	Wendetangente im Punkt $WP\left(2 \mid 4e^{-2}\right)$ mit $x_0 = 2$ und $f(x_0) = 4e^{-2}$
		$f(x) = 2x \cdot e^{-x} \Rightarrow f'(x) = 2 \cdot (1-x)e^{-x}$
		$t(x) = f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0)$
		$f'(x_0) = f'(2) = 2 \cdot (1-2)e^{-2} = -2e^{-2}$ $(x - x_0) = x - 2$ $f(x_0) = f(2) = 4e^{-2}$ $\Rightarrow t(x) = -2e^{-2}(x-2) + 4e^{-2}$ $= -2 \cdot e^{-2} \cdot x + 8 \cdot e^{-2}$ $\Rightarrow t(x) \approx -0{,}271 \cdot x + 1{,}083$

A5 Ausführliche Lösung

e) $f(x) = 2x \cdot e^{-x}$

$$\int_0^{\infty} f(x)\,dx = \lim_{b\to\infty} \int_0^{b} f(x)\,dx$$

$$\int f(x)\,dx = \int u \cdot v'\,dx = u \cdot v - \int u' \cdot v\,dx$$

mit $u = 2x \Rightarrow u' = 2$ und $v' = e^{-x} \Rightarrow v = \int e^{-x}\,dx = -e^{-x}$

$$\int f(x)\,dx = 2x \cdot \left(-e^{-x}\right) - \int 2 \cdot \left(-e^{-x}\right) dx = -2x \cdot e^{-x} + 2\int e^{-x}\,dx$$

$$= -2x \cdot e^{-x} - 2e^{-x} = -2(x+1) \cdot e^{-x}$$

$$\int_0^{b} f(x)\,dx = -2\left[(x+1) \cdot e^{-x}\right]_0^b = -2b \cdot e^{-b} - 2 \cdot e^{-b} + 2$$

$$\int_0^{\infty} f(x)\,dx = \lim_{b\to\infty} \int_0^{b} f(x)\,dx = \lim_{b\to\infty}\left[\underbrace{-2b \cdot e^{-b}}_{\to 0} - \underbrace{2 \cdot e^{-b}}_{\to 0} + 2\right] = 2$$

Also: $\int_0^{\infty} f(x)\,dx = \int_0^{\infty} 2x \cdot e^{-x}\,dx = 2$

A6 Ausführliche Lösung

a) Die Funktionsgleichung:

Aus der Symmetrieangabe folgt: $f(x) = a_4x^4 + a_2x^2 + a_0$

$P_1(0\,|\,8) \Rightarrow f(0) = \boxed{a_0 = 8}$

$P_2(1\,|\,57/10) \Rightarrow f(1) = 1a_4 + 1a_2 + 8 = 57/10$

$P_3(4\,|\,-24/5) \Rightarrow f(4) = 256a_4 + 16a_2 + 8 = -24/5$

Es bleiben zwei Gleichungen mit zwei Unbekannten übrig.

$$1a_4 + 1a_2 = -\frac{23}{10}$$

$$256a_4 + 16a_2 = -\frac{64}{5}$$

a_4	a_2		
1	2	$-\frac{23}{10}$	$\vert\cdot 10$
256	16	$-\frac{64}{5}$	$\vert\cdot 5$
10	10	-23	
1280	80	-64	$II - 128 \cdot I$
10	10	-23	
0	-1200	2880	

$$-1200a_2 = 2880 \Leftrightarrow \boxed{a_2 = -\frac{12}{5}}$$

$$10a_4 + 10a_2 = -23$$

$$\Leftrightarrow 10a_4 - 24 = -23 \Leftrightarrow \boxed{a_4 = \frac{1}{10}}$$

$$f(x) = \frac{1}{10}x^4 - \frac{12}{5}x^2 + 8$$

A6 Ausführliche Lösung

b)

$f(x)=\frac{1}{10}x^4-\frac{12}{5}x^2+8$ Achsenschnittpunkte

$P_y:\ f(0)=8\Rightarrow \underline{\underline{P_y(0\,|\,8)}}$

Nullstellen:

$f(x)=0\Leftrightarrow \frac{1}{10}x^4-\frac{12}{5}x^2+8=0\,|\cdot 10$

$\Leftrightarrow x^4-24x^2+80=0$ Substitution $z=x^2$

$\Leftrightarrow z^2-24z+80=0\Rightarrow z_1=20$ bzw. $z_2=4$

Nach Rücksubstitution

$x_{1/2}=\pm\sqrt{20}\approx 4{,}47$ bzw. $x_{2/3}=\pm 2$

$P_{x1}\left(\sqrt{20}\,|\,0\right);\ P_{x2}\left(-\sqrt{20}\,|\,0\right);\ P_{x3}(2\,|\,0);\ P_{x4}(-2\,|\,0)$

A6 Ausführliche Lösung

c) Extrempunkte und Wendepunkte

$f(x)=\frac{1}{10}x^4-\frac{12}{5}x^2+8$

$\Rightarrow f'(x)=\frac{2}{5}x^3-\frac{24}{5}x\Rightarrow f''(x)=\frac{6}{5}x^2-\frac{24}{5}\Rightarrow f'''(x)=\frac{12}{5}x$

Extrempunkte:

$f'(x)=0\Leftrightarrow \frac{2}{5}x^3-\frac{24}{5}x=0\Leftrightarrow x^3-12x=0\Leftrightarrow x\left(x^2-12\right)=0$

$\Rightarrow x_1=0$ bzw. $x_{2/3}=\pm\sqrt{12}\approx\pm 3{,}46$

$f''(x_1)=f''(0)=-\frac{24}{5}<0\Rightarrow$ rel. Max bei $x_1=0$

$f''(x_{2/3})=f''\left(\pm\sqrt{12}\right)=\frac{48}{5}>0\Rightarrow$ rel. Min bei $x_{1/2}=\pm\sqrt{12}$

Die $y-$Koordinaten

$f(x_1)=f(0)=8\Rightarrow P_{max}(0\,|\,8)$

$f(x_{2/3})=f\left(\pm\sqrt{12}\right)=-6{,}4\Rightarrow P_{min1/2}\left(\pm\sqrt{12}\approx\pm 3{,}46\,|\,-6{,}4\right)$

Wendepunkte:

$f''(x)=0\Leftrightarrow \frac{6}{5}x^2-\frac{24}{5}=0\Rightarrow x_{1/2}=\pm 2$

$f'''(x_1)=f'''(2)=\frac{24}{5}\neq 0\Rightarrow$ Wendepunkt bei $x_1=2$

$f'''(x_2)=f'''(-2)=-\frac{24}{5}\neq 0\Rightarrow$ Wendepunkt bei $x_2=-2$

Die $y-$Koordinaten

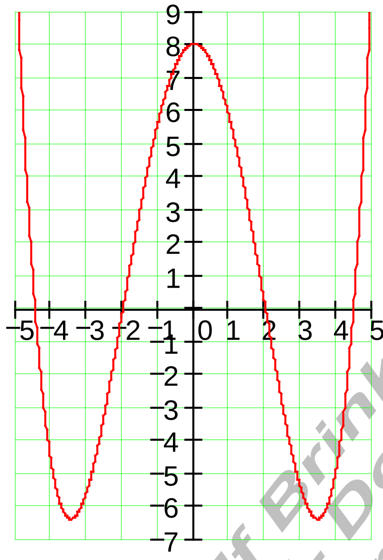
$f(x_{1/2})=f(\pm 2)=0\Rightarrow P_{w1}(2\,|\,0);\ P_{w2}(-2\,|\,0)$

A6 Ausführliche Lösung

d) Wertetabelle:

x	0	1	2	3,46	4	4,87
f(x)	8	5,7	0	−6,4	−4,8	0

Da die Funktion achsensymmetrisch ist gilt $f(-x) = f(x)$



A6 Ausführliche Lösung

e) $f(x) = \frac{1}{10}x^4 - \frac{12}{5}x^2 + 8$

$$\int_{-2}^{2} f(x)\,dx = \int_{-2}^{2}\left(\frac{1}{10}x^4 - \frac{12}{5}x^2 + 8\right)dx = \left[\frac{1}{50}x^5 - \frac{4}{5}x^3 + 8x\right]_{-2}^{2}$$

$$= \left[\left(\frac{1}{50}\cdot 2^5 - \frac{4}{5}\cdot 2^3 + 8\cdot 2\right) - \left(\frac{1}{50}\cdot(-2)^5 - \frac{4}{5}\cdot(-2)^3 + 8\cdot(-2)\right)\right] = 20,48$$

$$\int_{-2}^{2} f(x)\,dx = 20,48$$