Lösungen Anwendungsaufgaben zur Differenzial- und Integralrechnung II

Ergebnisse

E1	Ergebnisse	
	a)	Verlaufsbeschreibung: Die Dosierung beginnt mit einem Anfangswert von 1 mg/h. Dann steigt sie monoton an, um nach 4 Stunden den Maximalwert von 5 mg/h zu erreichen. Danach fällt sie, zuerst stärker, dann weniger stark, monoton ab.
	b)	Die Funktionsgleichung der Dosierung lautet: $f(x) = 1 + e \cdot x \cdot e^{-\frac{1}{4}x}$
	c)	Die Abnahme der Dosierung ist nach x = 8 Stunden am stärksten. Das ist die Wendestelle.
	d)	$M = \int\limits_0^{24} \left(1 + e \cdot x \cdot e^{-\frac{1}{4}x} \right) dx = 24 - 112e^{-5} + 16e \approx 66{,}738$ In 24 Stunden wird eine Medikamentenmenge von ca. 67 mg verabreicht.

E2	Ergebnisse	
	a)	Die Funktionsgleichung der Stammfunktion F(x) lautet: $F(x) = -\frac{2}{3}x^3 + \frac{1}{2}x^2 + 3x - \frac{4}{3}$
	b)	Der Inhalt der gekennzeichneten Fläche beträgt etwa $A \approx 4{,}955 + 2{,}522 \approx 7{,}477$ FE

Ausführliche Lösungen:

A1	Ausführliche Lösung	
	a)	Verlaufsbeschreibung: Die Dosierung beginnt mit einem Anfangswert von 1 mg/h. Dann steigt sie monoton an, um nach 4 Stunden den Maximalwert von 5 mg/h zu erreichen. Danach fällt sie, zuerst stärker, dann weniger stark, monoton ab.

A1	Ausführliche Lösung	
	b)	Ansatz: $f(x) = n_0 + a \cdot x \cdot e^{k \cdot x}$ Anfangsdosierung: $n_0 = 1\,mg/h \Rightarrow f(x) = 1 + a \cdot x \cdot e^{k \cdot x}$ Maximale Dosierung nach $x = 4$ Stunden bedeutet: $f(x)$ hat bei $x = 4$ eine waagerechte Tangente, also $f'(4) = 0$ $f'(x) = u' \cdot v + u \cdot v'$ mit $u = a \cdot x$ und $v = e^{k \cdot x}$ sowie $u' = a$ und $v' = k \cdot e^{k \cdot x}$ $f'(x) = a \cdot e^{k \cdot x} + a \cdot x \cdot e^{k \cdot x} = a \cdot e^{k \cdot x}(1 + k \cdot x)$ $f'(4) = 0 \Leftrightarrow a \cdot e^{4k}(1 + 4 \cdot k) = 0$ $\Leftrightarrow 1 + 4 \cdot k = 0 \Leftrightarrow k = -\frac{1}{4}$ $\Leftrightarrow f(x) = 1 + a \cdot x \cdot e^{-\frac{1}{4}x}$ Extremwert nach $x = 4$ Stunden: $f(4) = 5$ $f(4) = 5 \Leftrightarrow 1 + 4a \cdot e^{-\frac{1}{4} \cdot 4} = 5$ $\Leftrightarrow 1 + 4a \cdot e^{-1} = 5 \Leftrightarrow a = e$ Funktionsgleichung der Dosierung: $\underline{\underline{f(x) = 1 + e \cdot x \cdot e^{-\frac{1}{4}x}}}$

A1 Ausführliche Lösung

c) Die Änderungsrate der Dosierung wird durch die erste Ableitung beschrieben. Ihr Maximum ist an der Wendestelle.

$$f(x) = 1 + e \cdot x \cdot e^{-\frac{1}{4}x}$$

Erste Ableitung:

$f'(x) = u'v + uv'$ mit $u = e \cdot x$ und $v = e^{-\frac{1}{4}x}$

sowie $u' = e$ und $v' = -\frac{1}{4}e^{-\frac{1}{4}x}$

$$f'(x) = e \cdot e^{-\frac{1}{4}x} - \frac{e}{4}x \cdot e^{-\frac{1}{4}x} = e \cdot e^{-\frac{1}{4}x}\left(1 - \frac{1}{4}x\right)$$

Zweite Ableitung:

$f''(x) = u'v + uv'$ mit $u = e \cdot e^{-\frac{1}{4}x}$ und $v = 1 - \frac{1}{4}x$

sowie $u' = -\frac{1}{4}e \cdot e^{-\frac{1}{4}x}$ und $v' = -\frac{1}{4}$

$$f''(x) = -\frac{1}{4}e \cdot e^{-\frac{1}{4}x} \cdot (1 - \frac{1}{4}x) - \frac{1}{4}e \cdot e^{-\frac{1}{4}x} = -\frac{1}{4}e \cdot e^{-\frac{1}{4}x} \cdot (2 - \frac{1}{4}x)$$

$f''(x) = 0 \Leftrightarrow 2 - \frac{1}{4}x = 0 \Rightarrow x_w = 8$ Bedingung für Wendestelle

Dritte Ableitung:

$f'''(x) = u'v + uv'$ mit $u = -\frac{1}{4}e \cdot e^{-\frac{1}{4}x}$ und $v = 2 - \frac{1}{4}x$

sowie $u' = \frac{1}{16}e \cdot e^{-\frac{1}{4}x}$ und $v' = -\frac{1}{4}$

$$f'''(x) = u' = \frac{1}{16}e \cdot e^{-\frac{1}{4}x} \cdot (2 - \frac{1}{4}x) + \frac{1}{16}e \cdot e^{-\frac{1}{4}x} = \frac{1}{16}e \cdot e^{-\frac{1}{4}x} \cdot (3 - \frac{1}{4}x)$$

$$f'''(x_w) = f'''(8) = \frac{1}{16}e \cdot e^{-2} \cdot (3 - \frac{1}{4}8) = \frac{1}{16}e^{-1} \neq 0$$

$\Rightarrow x_w = 8$ ist Wendestelle von $f(x)$

Die Abnahme der Dosierung ist nach x = 8 Stunden am stärksten.

A1	Ausführliche Lösung

d) Die Menge des verabreichten Medikamentes entspricht der Fläche zwischen dem Graphen und der x – Achse, denn $mg/h \cdot h = mg$.
Dabei wird eine Infusionszeit von 24 Stunden zugrunde gelegt.

$$f(x) = 1 + e \cdot x \cdot e^{-\frac{1}{4}x} \Rightarrow \text{Menge} = M = \int_0^{24} f(x)\,dx = \int_0^{24} \left(1 + e \cdot x \cdot e^{-\frac{1}{4}x}\right) dx$$

Aufteilung des Integrals in $I = \int_0^{24} 1\,dx$ und in $II = \int_0^{24} x \cdot e^{-\frac{1}{4}x}\,dx$

so dass gilt: $M = I + e \cdot II$

$$I = \int_0^{24} 1\,dx = [x]_0^{24} = 24$$

$II = \int_0^{24} x \cdot e^{-\frac{1}{4}x}\,dx$ Lösung durch partielle integration mit $\int u \cdot v'\,dx = u \cdot v - \int u' \cdot v\,dx$

$$u(x) = x; v'(x) = e^{-\frac{1}{4}x}; u'(x) = 1; v(x) = \int e^{-\frac{1}{4}x}\,dx$$

Zwischenrechnung:

$\int e^{-\frac{1}{4}x}\,dx$ Lösung durch Substitution: $u(x) = -\frac{1}{4}x \Rightarrow \frac{du}{dx} = -\frac{1}{4} \Rightarrow dx = -4\,du$

$$\int e^{-\frac{1}{4}x}\,dx = -4\int e^u\,du = -4e^u = -4e^{-\frac{1}{4}x} = v$$

$$\int x \cdot e^{-\frac{1}{4}x}\,dx = x \cdot (-4e^{-\frac{1}{4}x}) - \int 1 \cdot (-4e^{-\frac{1}{4}x})\,dx = -4x \cdot e^{-\frac{1}{4}x} + 4\int e^{-\frac{1}{4}x}\,dx$$

$$= -4x \cdot e^{-\frac{1}{4}x} - 16e^{-\frac{1}{4}x} = -4e^{-\frac{1}{4}x}(x+4)$$

$$\Rightarrow II = \int_0^{24} x \cdot e^{-\frac{1}{4}x}\,dx = \left[-4e^{-\frac{1}{4}x}(x+4)\right]_0^{24} = -4e^{-6}(24+4) - [-4 \cdot 4] = -112e^{-6} + 16$$

$$\Rightarrow M = I + e \cdot II = 24 + e\left(-112e^{-6} + 16\right) = 24 - 112e^{-5} + 16e \approx 66{,}738$$

In 24 Stunden wird eine Medikamentenmenge von ca. 67 mg verabreicht.

<table>
<tr><td>A2</td><td colspan="2">Ausführliche Lösung</td></tr>
<tr><td></td><td>a)</td><td>

$f(x) = -2x^2 + x + 3$

$I(x) = \int f(x)\,dx = \int\left(-2x^2 + x + 3\right)dx = -\frac{2}{3}x^3 + \frac{1}{2}x^2 + 3x + C$

$P(-2\,|\,0) \Rightarrow I(-2) = 0 \Leftrightarrow -\frac{2}{3}(-2)^3 + \frac{1}{2}(-2)^2 + 3\cdot(-2) + C = 0$

$\Leftrightarrow \frac{16}{3} + 2 - 6 + C = 0 \Leftrightarrow C = -\frac{4}{3}$

$F(x) = I(x) + C \Rightarrow \underline{\underline{F(x) = -\frac{2}{3}x^3 + \frac{1}{2}x^2 + 3x - \frac{4}{3}}}$

</td></tr>
</table>

A2 Ausführliche Lösung

b) Für die Integrationsgrenzen sind die Nullstellen von $F(x)$ zu bestimmen.

$$F(x) = -\frac{2}{3}x^3 + \frac{1}{2}x^2 + 3x - \frac{4}{3} \qquad x_1 = -2 \text{ ist bekannt}$$

$$\begin{array}{c|cccc} & -2/3 & 1/2 & 3 & -4/3 \\ x_1 = -2 & \downarrow & \underline{4/3} & \underline{-22/6} & \underline{4/3} \\ & -2/3 & 11/6 & -2/3 & 0 \end{array}$$

$$-\frac{2}{3}x^2 + \frac{11}{6}x - \frac{2}{3} = 0 \,|:\left(-\frac{2}{3}\right) \Leftrightarrow x^2 - \frac{11}{4}x + 1 = 0$$

$$p = -\frac{11}{4};\, q = 1 \Rightarrow D = \frac{57}{64}$$

$$x_{2/3} = -\frac{p}{2} \pm \sqrt{D} \quad \left| \begin{array}{l} x_2 = \frac{11}{8} + \sqrt{\frac{57}{64}} \approx 2{,}319 \\ x_3 = \frac{11}{8} - \sqrt{\frac{57}{64}} \approx 0{,}431 \end{array} \right.$$

$$A = |A_1| + |A_2| = \left| \int_{x_1}^{x^2} f(x)\,dx \right| + \left| \int_{x_2}^{x_3} f(x)\,dx \right|$$

$$\text{mit } x_1 = -2;\, x_2 = \frac{11}{8} - \sqrt{\frac{57}{64}};\, x_3 = \frac{11}{8} + \sqrt{\frac{57}{64}}$$

$$A_1 = -\frac{1}{6}x^4 + \frac{1}{6}x^3 + \frac{3}{2}x^2 - \frac{4}{3}x \Big|_{x_1}^{x_2}$$

$$= -\frac{1}{6}x_2^4 + \frac{1}{6}x_2^3 + \frac{3}{2}x_2^2 - \frac{4}{3}x_2 + \frac{1}{6}x_1^4 - \frac{1}{6}x_1^3 - \frac{3}{2}x_1^2 + \frac{4}{3}x_1 \approx -4{,}995$$

$$A_2 = -\frac{1}{6}x^4 + \frac{1}{6}x^3 + \frac{3}{2}x^2 - \frac{4}{3}x \Big|_{x_2}^{x_3}$$

$$= -\frac{1}{6}x_3^4 + \frac{1}{6}x_3^3 + \frac{3}{2}x_3^2 - \frac{4}{3}x_3 + \frac{1}{6}x_2^4 - \frac{1}{6}x_2^3 - \frac{3}{2}x_2^2 + \frac{4}{3}x_2 \approx 2{,}522$$

$$A \approx 4{,}955 + 2{,}522 \approx \underline{\underline{7{,}477}}$$