Lösungen zur Differenzial- und Integralrechnung III (Vermischt)

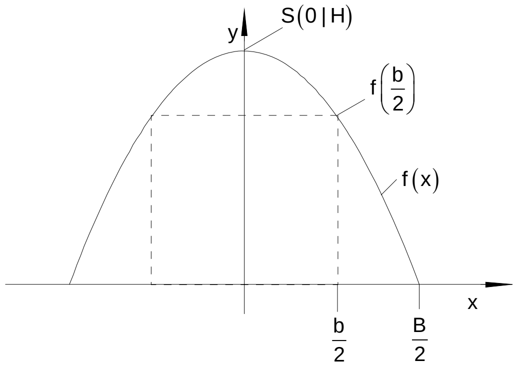
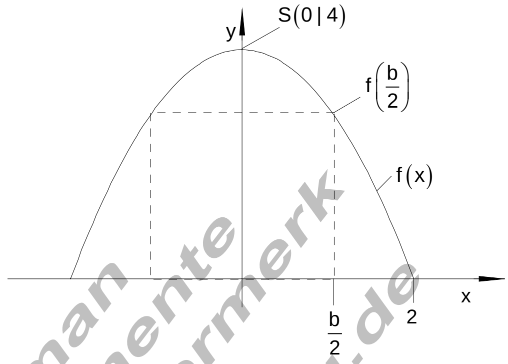
Ergebnisse

E1	Ergebnisse	
	a)	Fensterbreite: $b=\sqrt{\frac{16}{3}}\approx \underline{\underline{2,309\ m}}$ Fensterhöhe: $h=f\left(\frac{b}{2}\right)$ mit $\frac{b}{2}=\frac{1}{2}\cdot\sqrt{\frac{16}{3}}=\frac{2}{3}\cdot\sqrt{3}$ und $f(x)=-x^2+4$ wird $h=-\left(\frac{2}{3}\cdot\sqrt{3}\right)^2+4=-\frac{4}{9}\cdot 3+4=-\frac{4}{3}+4=\frac{8}{3}\approx \underline{\underline{2,\overline{6}\ m}}$ Fensterfläche: $A=h\cdot b=\underline{\underline{\frac{8}{3}\cdot\sqrt{\frac{16}{3}}\approx 6,158\ m^2}}$
	b)	Restfläche: Fläche unter der Parabel minus Fensterfläche. Restfläche: $\frac{32}{3}-\frac{8}{3}\sqrt{\frac{16}{3}}\approx \underline{\underline{4,508\ m^2}}$

E2	Ergebnisse	
	a)	Die Wachstumsfunktion lautet: $N(t)=5000\cdot e^{\frac{1}{48}\cdot\ln(20)\cdot t}$
	b)	Jeweils alle 11,106 Stunden verdoppelt sich die Anzahl der Bakterien.
	c)	Im Mittel gibt es in den ersten 80 Stunden 146570 Bakterien.
	d)	Die Funktion m(x) = m bildet den Mittelwert der Wachstumsfunktion N(x). Der Teil der Fläche (Fläche I), der unterhalb von m(x) liegt, muss genauso groß sein wie der Teil der Fläche (Fläche II), der oberhalb von m(x) liegt. Das folgt aus dem Mittelwert. Da nun N(x) im Bereich von Fläche I unterhalb von m(x) liegt, ist dort der Wert des Integrals negativ. Da N(x) im Bereich von Fläche II oberhalb von m(x) liegt, ist dort der Wert des Integrals positiv. Bei Flächengleichheit muss demzufolge der Wert des Integrals über den gesamten Bereich, der gemittelt wurde, gleich Null sein.

E3	Ergebnis	
	Schnittpunkt mit der y – Achse:	$P_y(0 \mid -3)$
	Schnittpunkt mit der x – Achse:	$P_x(\ln(4) \mid 0)$ bzw. $P_x(1{,}39 \mid 0)$
	Tiefpunkt:	$P_{Min}(\ln(2) \mid -4)$ bzw $P_{Min}(0{,}69 \mid -4)$
	Wendepunkt:	$P_w(0 \mid -3)$
	Gekennzeichnete Fläche:	$A=\left\lvert -\frac{9}{2}\right\rvert=\frac{9}{2}\ FE=4{,}5\ FE$

Ausführliche Lösungen:

<table>
<tr><td rowspan="4">A1</td><td colspan="2">Ausführliche Lösung</td></tr>
<tr><td colspan="2">Mathematisierung des Problems</td></tr>
<tr><td>Allgemein:</td><td>Speziell für B = 4 m, H = 4 m</td></tr>
<tr><td>
</td><td>
</td></tr>
</table>

A1 Ausführliche Lösung

a)

Ansatz: $f(x) = a_2x^2 + 4$ Scheitelpunktform wegen $S(0\,|\,4)$

$$P(2\,|\,0) \Rightarrow f(2) = 0 \Leftrightarrow a_2 \cdot 2^2 + 4 = 0\,|-4$$
$$\Leftrightarrow 4a_2 = -4\,|:4$$
$$\Leftrightarrow a_2 = -1$$

Parabelgleichung: $f(x) = -x^2 + 4$

Rechteckfläche: $A = b \cdot h$ mit $h = f\left(\frac{b}{2}\right) = -\left(\frac{b}{2}\right)^2 + 4 = -\frac{b^2}{4} + 4$

$$\Rightarrow A(b) = b \cdot \left(-\frac{b^2}{4} + 4\right) = -\frac{1}{4}b^3 + 4b$$

Das Maximum von $A(b)$ ist zu finden (Extremwert)

$$A(b) = -\frac{1}{4}b^3 + 4b \Rightarrow A'(b) = -\frac{3}{4}b^2 + 4 \Rightarrow A''(b) = -\frac{3}{2}b$$

Notwendige Bedingung für Extremwert:

$$A'(b) = 0 \Leftrightarrow -\frac{3}{4}b^2 + 4 = 0\,|:-4$$
$$\Leftrightarrow -\frac{3}{4}b^2 = -4\,|:\left(-\frac{3}{4}\right)$$
$$\Leftrightarrow b^2 = \frac{16}{3}\,|\sqrt{}$$
$$\Leftrightarrow |b| = \frac{16}{3} \Rightarrow b_1 = \sqrt{\frac{16}{3}} \text{ bzw. } b_2 = -\sqrt{\frac{16}{3}}$$

Nur b_1 ist zu verwerten, da es keine negativen Längen gibt.

Überprüfung auf Extremstelle:

$$A''(b_1) = A''\left(\sqrt{\frac{16}{3}}\right) = -\frac{3}{2} \cdot \sqrt{\frac{16}{3}} < 0 \Rightarrow \text{rel. Max. bei } b_1 = \sqrt{\frac{16}{3}}$$

Fensterbreite: $b = \sqrt{\frac{16}{3}} \approx \underline{\underline{2{,}309\text{ m}}}$

Fensterhöhe: $h = f\left(\frac{b}{2}\right)$ mit $\frac{b}{2} = \frac{1}{2} \cdot \sqrt{\frac{16}{3}} = \frac{4}{2} \cdot \sqrt{\frac{1}{3}} = 2 \cdot \sqrt{\frac{3}{9}} = \frac{2}{3} \cdot \sqrt{3}$ und $f(x) = -x^2 + 4$

wird $h = -\left(\frac{2}{3} \cdot \sqrt{3}\right)^2 + 4 = -\frac{4}{9} \cdot 3 + 4 = -\frac{4}{3} + 4 = \underline{\underline{\frac{8}{3} \approx 2{,}\overline{6}\text{ m}}}$

Fensterfläche: $A = h \cdot b = \underline{\underline{\frac{8}{3} \cdot \sqrt{\frac{16}{3}} \approx 6{,}158\text{ m}^2}}$

A1 Ausführliche Lösung

b) Restfläche: Fläche unter der Parabel minus Fensterfläche.

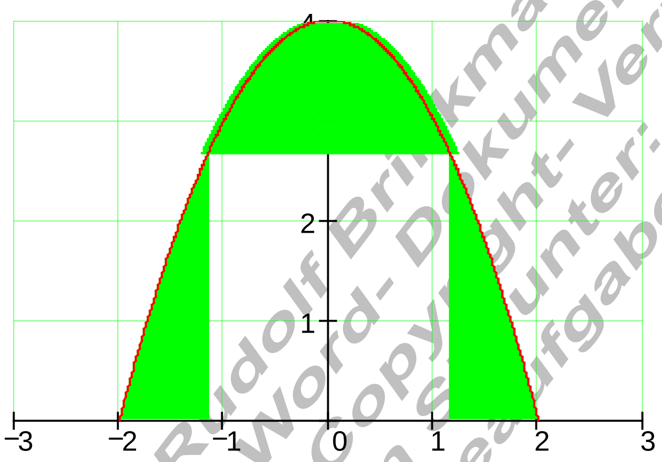
Fläche unter der Parabel:

$$\int_{-2}^{2} f(x)\,dx = \int_{-2}^{2}\left(-x^2+4\right)dx = \left[-\frac{1}{3}x^3+4x\right]_{-2}^{2}$$

$$= -\frac{1}{3}\cdot 2^2+4\cdot 2-\left[-\frac{1}{3}\cdot(-2)^3+4\cdot(-3)\right]$$

$$= -\frac{8}{3}+8-\frac{8}{3}+8 = 16-\frac{16}{3} = \frac{32}{3} \approx 10,\overline{6}\ \text{m}^2$$

Restfläche: $\frac{32}{3}-\frac{8}{3}\sqrt{\frac{16}{3}} \approx \underline{\underline{4,508\ \text{m}^2}}$



A2 Ausführliche Lösung

a) Ansatz für die Wachstumsfunktion: $N(t) = N_0 \cdot e^{k\cdot t}$ mit $N_0 = 5000$

Nach 48 Stunden gilt: $N_{48} = N_0 \cdot e^{48\cdot k}$ mit $N_{48} = 100000$

Der Wachstumsfaktor k soll bestimmt werden.

$$N_{48} = N_0 \cdot e^{48\cdot k} \quad |:N_0$$

$$\Leftrightarrow \frac{N_{48}}{N_0} = e^{48\cdot k} \quad |\ln$$

$$\Leftrightarrow \ln\left(\frac{N_{48}}{N_0}\right) = \ln\left(e^{48\cdot k}\right) = 48k \quad |:48$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{48}\cdot\ln\left(\frac{N_{48}}{N_0}\right) = k \text{ mit Zahlen wird } k = \frac{1}{48}\cdot\ln\left(\frac{100000}{5000}\right) = \frac{1}{48}\cdot\ln(20)$$

Der Wachstumsfaktor: $k = \frac{1}{48}\cdot\ln(20) \approx 0,0624$

Damit wird die Wachstumsfunktion zu: $\underline{\underline{N(t) = 5000\cdot e^{\frac{1}{48}\cdot\ln(20)\cdot t}}}$

A2	Ausführliche Lösung	
	b)	Verdoppelung der Anzahl der Bakterien

Ansatz: $2 \cdot N_0 = N_0 \cdot e^{\frac{1}{48}\ln(20)\cdot t} \quad | : N_0$

$$\Leftrightarrow 2 = e^{\frac{1}{48}\ln(20)\cdot t} \quad | \ln$$

$$\Leftrightarrow \ln(2) = \ln\left(e^{\frac{1}{48}\ln(20)\cdot t}\right) = \frac{1}{48}\ln(20)\cdot t \quad | : \frac{1}{48}\ln(20)$$

$$\Leftrightarrow \frac{\ln(2)}{\frac{1}{48}\ln(20)} = t \Leftrightarrow \underline{\underline{t = \frac{48\cdot\ln(2)}{\ln(20)} \approx 11{,}106}}$$

Jeweils alle 11,106 Stunden verdoppelt sich die Anzahl der Bakterien.

A2	Ausführliche Lösung	
	c)	Mittelwert über die ersten 80 Stunden

$$m = \frac{1}{80}\int_0^{80} N(t)\,dt = \frac{1}{80}\int_0^{80} N_0 \cdot e^{k\cdot t}\,dt = \frac{N_0}{80}\int_0^{80} e^{k\cdot t}\,dt$$

Substitution: $u(t) = k\cdot t \Rightarrow \frac{du}{dt} = k \Rightarrow dt = \frac{1}{k}du$

untere Grenze: $u(0) = k\cdot 0 = 0$ obere Grenze: $u(80) = 80k$

$$m = \frac{N_0}{80}\left(\frac{1}{k}\int_0^{80k} e^u\,du\right) = \frac{N_0}{80k}\left[e^u\right]_0^{80k} = \frac{N_0}{80k}\left(e^{80k} - 1\right)$$

mit $N_0 = 5000$ und $k = \frac{1}{48}\ln(20)$ wird

$$m = \frac{5000}{\frac{80}{48}\ln(20)}\left(e^{\frac{80}{48}\ln(20)} - 1\right) = \frac{5000}{\frac{5}{3}\ln(20)}\left(e^{\frac{5}{3}\ln(20)} - 1\right)$$

$$= \frac{15000}{5\cdot\ln(20)}\left(20^{\frac{5}{3}} - 1\right) = \underline{\underline{\frac{3000}{\ln(20)}\left(20^{\frac{5}{3}} - 1\right) \approx 146569{,}767}}$$

Im Mittel gibt es in den ersten 80 Stunden 146570 Bakterien.

A2	Ausführliche Lösung

d) $N(x) = N_0 \cdot e^{k \cdot x} \quad m(x) = m$ ist konstant (siehe Aufgabenteil c)

Wir bilden das Integral,
welches die Fläche zwischen den beiden Graphen darstellt.

$$\int_0^{80} \left(N(x) - m\right) dx = \int_0^{80} \left(N_0 \cdot e^{k \cdot x} - m\right) dx = N_0 \int_0^{80} e^{k \cdot x}\, dx - m \int_0^{80} dx$$

Teilintegral I: $\int_0^{80} e^{k \cdot x}\, dx$ Lösung durch Substitution $u(x) = k \cdot x$

$$\frac{du}{dx} = k \Rightarrow dx = \frac{1}{k} du$$

untere Grenze: $u(0) = 0$ obere Grenze: $u(80) = 80k$

$$\int_0^{80} e^{k \cdot x}\, dx = \frac{1}{k} \int_0^{80k} e^u\, du = \frac{1}{k}\left[e^u\right]_0^{80k} = \frac{1}{k}\left(e^{80k} - 1\right)$$

Teilintegral II: $\int_0^{80} dx = [x]_0^{80} = 80$

$$N_0 \int_0^{80} e^{k \cdot x}\, dx - m \int_0^{80} dx = \frac{N_0}{k}\left(e^{80k} - 1\right) - 80m$$

Werte einsetzen:

$$N_0 = 5000\,;\, k = \frac{1}{48}\ln(20)\,;\, m = \frac{3000}{\ln(20)}\left(20^{\frac{5}{3}} - 1\right)$$

$$\frac{N_0}{k}\left(e^{80k} - 1\right) - 80m = \frac{5000}{\frac{1}{48}\ln(20)}\left(e^{80 \cdot \frac{1}{48}\ln(20)} - 1\right) - \frac{80 \cdot 3000}{\ln(20)}\left(20^{\frac{5}{3}} - 1\right)$$

$$= \frac{240000}{\ln(20)}\left(20^{\frac{5}{3}} - 1\right) - \frac{240000}{\ln(20)}\left(20^{\frac{5}{3}} - 1\right) = 0$$

Die Funktion m(x) = m bildet den Mittelwert der Wachstumsfunktion N(x). Der Teil der Fläche (Fläche I), der unterhalb von m(x) liegt, muss genauso groß sein wie der Teil der Fläche (Fläche II), der oberhalb von m(x) liegt. Das folgt aus dem Mittelwert. Da nun N(x) im Bereich von Fläche I unterhalb von m(x) liegt, ist dort der Wert des Integrals negativ.
Da N(x) im Bereich von Fläche II oberhalb von m(x) liegt, ist dort der Wert des Integrals positiv. Bei Flächengleichheit muss demzufolge der Wert des Integrals über den gesamten Bereich, der gemittelt wurde, gleich Null sein. Obige Rechnung zeigt, das dies der Fall ist.

A3 Ausführliche Lösung

1. Achsenschnittpunkte

$f(x) = e^{2x} - 4 \cdot e^{x}$

Schnittpunkt mit der y – Achse:

$y_s = f(0) = e^0 - 4 \cdot e^0 = 1 - 4 = -3 \Rightarrow \underline{\underline{P_y(0 \mid -3)}}$

Schnittpunkt mit der x – Achse:

$f(x) = 0 \Leftrightarrow e^{2x} - 4 \cdot e^{x} = 0 \;$ (Exponentialgleichung)

Lösungsansatz durch logarithmieren

$$e^{2x} - 4 \cdot e^{x} = 0 \mid + 4 \cdot e^{x}$$

$\Leftrightarrow e^{2x} = 4 \cdot e^{x} \mid \ln(\;)$ beide Seiten logarithmieren

$$\Leftrightarrow \ln\left(e^{2x}\right) = \ln\left(4 \cdot e^{x}\right)$$

$$\Leftrightarrow 2x \cdot \ln(e) = \ln(4) + x\ln(e)$$

$$\Leftrightarrow 2x = \ln(4) + x \mid -x$$

$\Leftrightarrow x = \ln(4) \approx 1{,}39 \Rightarrow$ Nullstelle: $\underline{\underline{P_x(\ln(4) \mid 0) \text{ bzw. } P_x(1{,}39 \mid 0)}}$

A3 Ausführliche Lösung

2. Der Tiefpunkt

$$f(x) = e^{2 \cdot x} - 4 \cdot e^{x} \,;\, f'(x) = 2e^{2 \cdot x} - 4e^{x} \,;\, f''(x) = 4e^{2 \cdot x} - 4e^{x}$$

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow 2e^{2 \cdot x} - 4e^{x} = 0$$

$$\Leftrightarrow 2e^{2 \cdot x} = 4 \cdot e^{y} \mid :2$$

$$\Leftrightarrow e^{2 \cdot x} = 2 \cdot e^{x} \mid \ln(\;)$$

$$\Leftrightarrow \ln\left(e^{2 \cdot x}\right) = \ln\left(2 \cdot e^{x}\right)$$

$$\Leftrightarrow 2x \cdot \ln(e) = \ln(2) + x \cdot \ln(e)$$

$\Leftrightarrow 2x = \ln(2) + x \Rightarrow x_e = \ln(2)$ ist Stelle mit waagerechter Tangente

$f''(x_e) = f''(\ln(2)) = 4 \cdot e^{2 \cdot \ln(2)} - 4 \cdot e^{\ln(2)} = 4 \cdot \left(e^{\ln(2)}\right)^2 - 4 \cdot e^{\ln(2)}$ mit $e^{\ln(2)} = 2$ wird

$f''(\ln(2)) = 4 \cdot 2^2 - 4 \cdot 2 = 8 > 0 \Rightarrow$ rel Min für $x_e = \ln(2)$

$$y_e = f(\ln(2)) = e^{2 \cdot \ln(2)} - 4 \cdot e^{\ln(2)} = \left(e^{\ln(2)}\right)^2 - 4 \cdot e^{\ln(2)} = 2^2 - 4 \cdot 2 = -4$$

$\Rightarrow \underline{\underline{P_{Min}(\ln(2) \mid -4) \text{ bzw } P_{Min}(0{,}69 \mid -4)}}$

A3 Ausführliche Lösung

3. Der Wendepunkt

$f''(x)=0$ und $f'''(x)\neq 0$

$f(x)=e^{2\cdot x}-4\cdot e^{x}\,;\, f'(x)=2\cdot e^{2\cdot x}-4\cdot e^{x}\,;\, f''(x)=4\cdot e^{2\cdot x}-4\cdot e^{x}\,;\, f'''(x)=8\cdot e^{2x}-4\cdot e^{x}$

$f''(x)=0 \Leftrightarrow 4\cdot e^{2\cdot x}-4\cdot e^{x}=0$

$\Leftrightarrow 4\cdot e^{2\cdot x}=4\cdot e^{x}\ |:4$

$\Leftrightarrow e^{2\cdot x}=e^{x} \Rightarrow x_w=0$ denn $2x=x$ geht nur für $x=0$

$f'''(x_w)=f'''(0)=8\cdot e^{0}-4\cdot e^{0}=8\cdot 1-4\cdot 1=4\neq 0 \Rightarrow x_w=0$ ist Wendestelle

$f(x_w)=f(0)=e^{0}-4\cdot e^{0}=1-4\cdot 1=-3 \Rightarrow \underline{\underline{P_w(0\,|\,-3)}}$

A3 Ausführliche Lösung

4. Fläche

$$\int_0^{\ln(4)} f(x)\,dx=\int_0^{\ln(4)}\left(e^{2\cdot x}-4\cdot e^{x}\right)dx=\int_0^{\ln(4)} e^{2\cdot x}\,dx-4\int_0^{\ln(4)} e^{x}\,dx$$

Teilintegral lösen durch Substitutionsverfahren

$$\int e^{2\cdot x}\,dx \text{ Substitution: } u(x)=2x \Rightarrow \frac{du}{dx}=2 \Rightarrow dx=\frac{1}{2}du$$

$$\frac{1}{2}\int e^{u}\,du=\frac{1}{2}e^{u} \Rightarrow \int e^{2\cdot x}\,dx=\frac{1}{2}e^{2\cdot x} \text{ und mit } \int e^{x}\,dx=e^{x}$$

$$\int_0^{\ln(4)} f(x)\,dx=\left[\frac{1}{2}e^{2\cdot x}-4e^{x}\right]_0^{\ln(4)}=\left[\frac{1}{2}e^{2\cdot\ln(4)}-4e^{\ln(4)}\right]-\left[\frac{1}{2}e^{0}-4e^{0}\right]$$

$$=\left[\frac{1}{2}\cdot 16-4\cdot 4\right]-\left[\frac{1}{2}\cdot 1-4\cdot 1\right]=-\frac{9}{2}$$

$$A=\left|-\frac{9}{2}\right|=\frac{9}{2}\,FE=\underline{\underline{4{,}5\,FE}}$$

A3 Ausführliche Lösung