Lösungen zur Differenzial- und Integralrechnung II (Vermischt)

Ergebnisse

E1	Ergebnis
	Die Fläche des Dreiecks beträgt etwa 4,333... FE.

E2	Ergebnis
	Die Fläche des Dreiecks beträgt etwa 8,606 FE.

E3	Ergebnisse	
	a)	$P_y\left(0 \mid e^2+1\right)$ bzw. $P_y\left(0 \mid 8{,}389\right)$
	b)	Die Gerade bildet die Asymptote des Graphen. Die Funktionsgleichung der Asymptote ist $g(x)=\frac{1}{4}x+1$
	c)	Tiefpunkt: $T\left(2+\ln(4) \mid \frac{7}{4}+\frac{1}{4}\ln(4)\right) \approx (3{,}386 \mid 2{,}097)$
	d)	Die gekennzeichnete Fläche beträgt: $A=e^2-e^{-\ln(4)}=e^2-\frac{1}{4}\approx 7{,}139$
	e)	$A=e^2\approx 7{,}389$ Auf diesen Wert ändert sich die Fläche, wenn die rechte Grenze gegen unendlich geht.

Ausführliche Lösungen:

A1	Ausführliche Lösung
	$f(x)=\frac{1}{8}x^3-\frac{3}{2}x^2+\frac{9}{2}x$ Tangente durch $P(4\mid 2)\Rightarrow x_0=4$ $f'(x)=\frac{3}{8}x^2-3x+\frac{9}{2}$ $t(x)=f'(x_0)(x-x_0)+f(x_0)$ $n(x)=-\frac{1}{f'(x_0)}(x-x_0)+f(x_0)$ $f(x_0)=f(4)=2\,;\,f'(x_0)=f'(4)=-\frac{3}{2}$ $t(x)=-\frac{3}{2}(x-4)+2=\underline{\underline{-\frac{3}{2}x+8}}$ $n(x)=\frac{2}{3}(x-4)+2=\underline{\underline{\frac{2}{3}x-\frac{2}{3}}}$ Schnittpunkt der Tangente mit der x – Achse: $t(x)=0\Leftrightarrow x_t=\frac{16}{3}$ Schnittpunkt der Normalen mit der x – Achse: $n(x)=0\Leftrightarrow x_n=1$ Dreieckfläche: $A=\frac{g\cdot h}{2}$ mit $g=x_t-x_n=\frac{16}{3}-1=\frac{13}{3}$ und $h=2\Rightarrow A=\frac{\frac{13}{3}\cdot 2}{2}=\underline{\underline{\frac{13}{3}\text{ FE}}}$

A2	Ausführliche Lösung
	$f(x)=(2-x)e^{\frac{1}{2}x}$ 1. Berechnung der Achsenschnittpunkte Schnittpunkt mit der y – Achse: $f(0)=(2-0)e^{\frac{1}{2}\cdot 0}=2e^0=2\Rightarrow \underline{\underline{P_y(0\mid 2)}}$ Schnittpunkt mit der x – Achse: $f(x)=0\Leftrightarrow(2-x)e^{\frac{1}{2}x}=0\Leftrightarrow(2-x)=0\Leftrightarrow x_1=2$ Der Faktor $e^{\frac{1}{2}x}$ wird nicht Null, also $\underline{\underline{P_{x1}(2\mid 0)}}$

A2	Ausführliche Lösung
	2. Gerade durch die Achsenschnittpunkte $P_y(0\,\vert\,2)$ und $P_{x1}(2\,\vert\,0)$ $g(x) = a_1x + a_0 \quad a_1 = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{0-2}{2-0} = -1 \Rightarrow g(x) = -x + a_0$ Punktprobe: $P_y(0\,\vert\,2)$ $g(0) = 2 \Leftrightarrow -0 + a_0 = 2 \Rightarrow a_0 = 2$ $\Rightarrow \underline{\underline{g(x) = -x + 2}}$

A2 | **Ausführliche Lösung**

3. Wendepunkt

$$f(x)=(2-x)e^{\frac{1}{2}x}=u(x)\cdot v(x)\Rightarrow f'(x)=u'v+uv'$$

$$u=(2-x);u'=-1;v=e^{\frac{1}{2}x};v'=\frac{1}{2}e^{\frac{1}{2}x}$$

$$f'(x)=-1\cdot e^{\frac{1}{2}x}+(2-x)\frac{1}{2}e^{\frac{1}{2}x}=\left[-1+\frac{1}{2}(2-x)\right]e^{\frac{1}{2}x}=\underline{\underline{-\frac{1}{2}x\cdot e^{\frac{1}{2}x}}}$$

$$f'(x)=-\frac{1}{2}x\cdot e^{\frac{1}{2}x}=u(x)\cdot v(x)\Rightarrow f''(x)=u'v+uv'$$

$$u=-\frac{1}{2}x;u'=-\frac{1}{2};v=e^{\frac{1}{2}x};v'=\frac{1}{2}e^{\frac{1}{2}x}$$

$$f''(x)=-\frac{1}{2}e^{\frac{1}{2}x}-\frac{1}{2}x\cdot\frac{1}{2}e^{\frac{1}{2}x}=\underline{\underline{-\frac{1}{2}\left(1+\frac{1}{2}x\right)e^{\frac{1}{2}x}}}$$

$$f''(x)=-\frac{1}{2}\left(1+\frac{1}{2}x\right)e^{\frac{1}{2}x}=u(x)\cdot v(x)\Rightarrow f'(x)=u'v+uv'$$

$$u=-\frac{1}{2}\left(1+\frac{1}{2}x\right);u'=-\frac{1}{4};v=e^{\frac{1}{2}x};v'=\frac{1}{2}e^{\frac{1}{2}x}$$

$$f'''(x)=-\frac{1}{4}e^{\frac{1}{2}x}-\frac{1}{2}\left(1+\frac{1}{2}x\right)\frac{1}{2}e^{\frac{1}{2}x}=\underline{\underline{-\frac{1}{2}\left(1+\frac{1}{4}x\right)e^{\frac{1}{2}x}}}$$

$$f''(x)=0\Leftrightarrow-\frac{1}{2}\left(1+\frac{1}{2}x\right)e^{\frac{1}{2}x}=0\Leftrightarrow 1+\frac{1}{2}x=0\Leftrightarrow \underline{\underline{x_w=-2}}$$

$$f'''(x_w)=f'''(-2)=-\frac{1}{2}\left(1+\frac{1}{4}(-2)\right)e^{\frac{1}{2}(-2)}=\frac{1}{4e}\neq 0$$

$\Rightarrow x_w=-2$ ist Wendestelle

$$y_w=f(x_w)=f(-2)=(2-(-2))e^{\frac{1}{2}(-2)}=4e^{-1}=\frac{4}{e}$$

$$\Rightarrow \underline{\underline{W\left(-2\,|\,\frac{4}{e}\right)}}$$

A2 Ausführliche Lösung

4. Die Wendetangente

$$f(x)=(2-x)e^{\frac{1}{2}x} \qquad f'(x)=-\frac{1}{2}x\cdot e^{\frac{1}{2}x} \qquad W\left(-2\,|\,\frac{4}{e}\right)$$

$t(x)=f'(x_w)(x-x_w)+f(x_w)$ mit $x_w=-2$ wird

$$f'(x_w)=f'(-2)=-\frac{1}{2}(-2)\cdot e^{\frac{1}{2}(-2)}=\frac{1}{e}$$

$$f(x_w)=f(-2)=(2-(-2))e^{\frac{1}{2}(-2)}=\frac{4}{e}$$

$$\Rightarrow t(x)=\frac{1}{e}(x+2)+\frac{4}{e}=\underline{\underline{\frac{1}{e}x+\frac{6}{e}}}$$

A2 Ausführliche Lösung

5. Schnittpunkte der Wendetangente mit der $x-$Achse und $g(x)=-x+2$

$t(x)=0 \Leftrightarrow \frac{1}{e}x+\frac{6}{e}=0 \Leftrightarrow x=-6$ Nullstelle der Wendetangente

$$t(x)=g(x) \Leftrightarrow \frac{1}{e}x+\frac{6}{e}=-x+2 \Leftrightarrow x_s=\underline{\underline{\frac{2e-6}{1+e}}}$$

$y_s=g(x_s)=-\frac{2e-6}{1+e}+2=\frac{6-2e}{1+e}+2=\underline{\underline{\frac{8}{1+e}}}$ ist die Höhe des Dreiecks

A2 Ausführliche Lösung

6. Berechnung der Dreiecksfläche

Höhe des Dreiecks: $h=y_s=\frac{8}{1+e}$

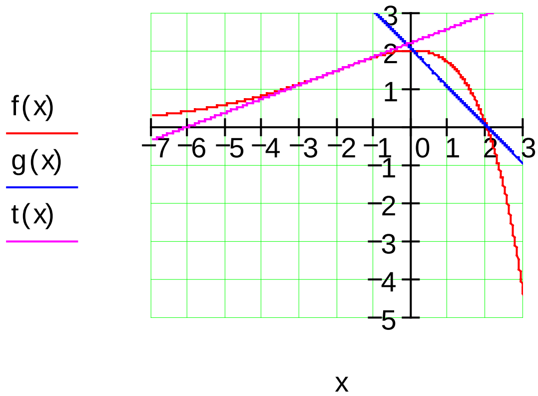
Fläche: $A=\frac{g\cdot h}{2}$

mit g als Abstand von

$x=-6$ bis $x=2 \Rightarrow g=8$

$$A=\frac{8\cdot\frac{8}{1+e}}{2}=4\cdot\frac{8}{1+e}$$

$$=\frac{32}{1+e}\approx\underline{\underline{8{,}606\text{ FE}}}$$



A3	Ausführliche Lösung	
	a)	$f(x) = e^{2-x} + \frac{1}{4}x + 1$ Bedingung für den Schnitt mit der y – Achse: $y_s = f(0) \Leftrightarrow y_s = e^{2-0} + \frac{1}{4} \cdot 0 + 1 = e^2 + 1 \approx 8{,}389$ $\Rightarrow \underline{\underline{P_y\left(0 \mid e^2+1\right)}}$ bzw. $P_y(0 \mid 8{,}389)$

A3	Ausführliche Lösung	
	b)	$f(x) = e^{2-x} + \frac{1}{4}x + 1$ $g(x)$ ist die Asymptote von $f(x)$ das bedeutet, der Graph von $f(x)$ strebt für große x – Werte gegen $g(x)$. $e^{2-x} = e^{-(x-2)}$ strebt für große x – Werte gegen Null, so dass $f(x)$ für große x – Werte nur noch durch den Teilterm $\frac{1}{4}x + 1$ bestimmt wird. Die Funktionsgleichung der Asymptote ist somit $\underline{\underline{g(x) = \frac{1}{4}x + 1}}$

A3 Ausführliche Lösung

c)

$$f(x) = e^{2-x} + \frac{1}{4}x + 1 \Rightarrow f'(x) = -e^{2-x} + \frac{1}{4} \Rightarrow f''(x) = e^{2-x}$$

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow -e^{2-x} + \frac{1}{4} = 0 \mid + e^{2-x}$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{4} = e^{2-x} \mid \ln$$

$$\Leftrightarrow \ln\left(\frac{1}{4}\right) = \ln\left(e^{2-x}\right)$$

$$\Leftrightarrow \ln(1) - \ln(4) = 2 - x$$

$$\Leftrightarrow -\ln(4) = 2 - x$$

$$\Leftrightarrow x = 2 + \ln(4) \Rightarrow \text{Extremwert bei } x_e = 2 + \ln(4) \approx 3{,}386$$

$$f''(x_e) = f''(2 + \ln(4)) = e^{2-(2+\ln(4))} = e^{2-2-\ln(4)}$$

$$= e^{-\ln(4)} = e^{\ln\left(\frac{1}{4}\right)} = \frac{1}{4} > 0 \Rightarrow \text{rel. Min bei } x_e = 2 + \ln(4) \approx 3{,}386$$

$$f(x_e) = f(2 + \ln(4)) = e^{2-(2+\ln(4))} + \frac{1}{4}(2 + \ln(4)) + 1$$

$$= \frac{1}{4} + \frac{1}{2} + \frac{1}{4}\ln(4) + 1 = \frac{7}{4} + \frac{1}{4}\ln(4) \approx 2{,}097$$

Tiefpunkt: $\underline{\underline{T\left(2 + \ln(4) \mid \frac{7}{4} + \frac{1}{4}\ln(4)\right)}} \approx (3{,}386 \mid 2{,}097)$

A3 Ausführliche Lösung

d) Die gekennzeichnete Fläche liegt zwischen den Graphen von $f(x)$ und $g(x)$ im Intervall $[0 ; x_e]$

$$A = \int_0^{x_e} [f(x) - g(x)]\, dx \text{ mit } f(x) = e^{2-x} + \frac{1}{4}x + 1 \text{ und } g(x) = \frac{1}{4}x + 1 \text{ wird}$$

$f(x) - g(x) = e^{2-x}$ und damit

$$A = \int_0^{x_e} e^{2-x}\, dx \quad \text{Substitution: } u = 2 - x \Rightarrow \frac{du}{dx} = -1 \Leftrightarrow dx = -du \quad x_e = 2 + \ln(4)$$

untere Grenze: $u(0) = 2$ obere Grenze : $u(x_e) = 2 - (2 + \ln(4)) = -\ln(4)$

$$A = -\int_2^{-\ln(4)} e^u\, du = \int_{-\ln(4)}^{2} e^u\, du = \left[e^u\right]_{-\ln(4)}^{2} = e^2 - e^{-\ln(4)} = \underline{\underline{e^2 - \frac{1}{4} \approx 7{,}139}}$$

A3 Ausführliche Lösung

e) Die gekennzeichnete Fläche liegt zwischen den Graphen von $f(x)$ und $g(x)$ im Intervall $[0\,;\infty]$

$$A = \int_0^{\infty}\left[f(x)-g(x)\right]dx \text{ mit } f(x) = e^{2-x} + \frac{1}{4}x + 1 \text{ und } g(x) = \frac{1}{4}x + 1 \text{ wird}$$

$f(x)-g(x) = e^{2-x}$ und damit

$$A = \int_0^{\infty} e^{2-x}\,dx \text{ ist ein uneigentliches Integral } \Rightarrow A = \lim_{b\to\infty}\int_0^{b} e^{2-x}\,dx$$

Substitution: $u = 2-x \Rightarrow \frac{du}{dx} = -1 \Leftrightarrow dx = -du$

untere Grenze: $u(0) = 2$ obere Grenze : $u(b) = 2-b$

$$A = \lim_{b\to\infty}\left(-\int_2^{2-b} e^{u}\,du\right) = \lim_{b\to\infty}\int_{2-b}^{2} e^{u}\,du = \lim_{b\to\infty}\left[e^{u}\right]_{2-b}^{2} = \lim_{b\to\infty}\left[e^{2}-e^{2-b}\right] = \underline{\underline{e^{2} \approx 7{,}389}}$$

Denn $\lim_{b\to\infty} e^{2-b} = \lim_{b\to\infty} e^{-(b-2)} = 0$