Lösungen zur Differenzial- und Integralrechnung II

Ergebnisse

E1	Ergebnisse	
	a)	$g(x)=\frac{1}{18}x^2-2$ beschreibt den unteren Teil des Mundes. $f(x)=-\frac{1}{486}x^4+\frac{1}{54}x^2+2$ beschreibt den oberen Teil des Mundes
	b)	Das Rechteck maximaler Größe hat eine Fläche von etwa 23,095 m^2.
	c)	Für den Mund wird an der Hauswand eine Fläche von insgesamt 36,267 m^2 benötigt.
	d)	Die schraffierte Fläche ist die Differenz aus der gesamten Fläche und der des Rechtecks. Sie beträgt etwa 13,172 m^2. Die Kosten für die Beschichtung betragen 1580,65 €.

E2	Ergebnis
	Die gesuchte Fläche beträgt 2,939 FE.

E3	Ergebnisse	
	a)	$x_{1/2} = 0$ ist die einzige Nullstelle, da sie doppelt vorkommt, berührt der Graph von f(x) die x- Achse an dieser Stelle.
	b)	Punkte mit waagerechter Tangente liegen bei $x_1 = 0$ und bei $x_2 = 1$. Alle Punkte P_{1a} liegen im Koordinatenursprung bei $P_{1a}(0 \mid 0)$. Alle Punkte P_{2a} liegen auf einer Parallelen zur y- Achse im Abstand x = 1 Und haben die Koordinaten $P_{2a}(1 \mid ae)$.

Ausführliche Lösungen:

A1 Ausführliche Lösung

a) Der untere Teil des Mundes wird durch eine quadratische Funktion beschrieben.
Der obere Teil des Mundes durch eine ganzrationale Funktion 4. Grades.

$g(x)=\frac{1}{18}x^2-2$ beschreibt den unteren Teil des Mundes.

$f(x)=-\frac{1}{486}x^4+\frac{1}{54}x^2+2$ beschreibt den oberen Teil des Mundes

A1 Ausführliche Lösung

b) Da die Graphen der Funktionen f(x) und g(x) symmetrisch zur y- Achse verlaufen, ist auch das einbeschriebene Rechteck symmetrisch zur y-Achse.
Die y- Achse teilt die Rechteckseite a in zwei gleichlange Teile.
Um die Seite b des Rechtecks in Abhängigkeit von a zu bestimmen, benötigt man die Koordinaten der oberen und unteren rechten Ecke des Rechtecks.

Obere rechte Ecke: $\left(\frac{a}{2}\,\middle|\,f\left(\frac{a}{2}\right)\right)$ Untere rechte Ecke: $\left(\frac{a}{2}\,\middle|\,g\left(\frac{a}{2}\right)\right)$

Die absolute Differenz der y- Koordinaten ergibt die Seite b.
Dazu berechnen wir zuerst die jeweiligen y- Koordinaten der Eckpunkte.

$$f\left(\frac{a}{2}\right)=-\frac{1}{486}\cdot\left(\frac{a}{2}\right)^4+\frac{1}{54}\cdot\left(\frac{a}{2}\right)^2+2=-\frac{1}{486}\cdot\frac{a^4}{16}+\frac{1}{54}\cdot\frac{a^2}{4}+2$$
$$=-\frac{1}{7776}a^4+\frac{1}{216}a^2+2>0$$
$$g\left(\frac{a}{2}\right)=\frac{1}{18}\cdot\left(\frac{a}{2}\right)^2-2=\frac{1}{18}\cdot\frac{a^2}{4}-2$$
$$=\frac{1}{72}a^2-2<0$$

A1 Ausführliche Lösung

b) Für die Länge der Seite b gilt also:

$b(a)=f\left(\frac{a}{2}\right)+\left|g\left(\frac{a}{2}\right)\right|$ da $g\left(\frac{a}{2}\right)<0$ ist, gilt $\left|g\left(\frac{a}{2}\right)\right|=-g\left(\frac{a}{2}\right)$ und damit

$$b(a)=f\left(\frac{a}{2}\right)-g\left(\frac{a}{2}\right)=-\frac{1}{7776}a^4+\frac{1}{216}a^2+2-\left(\frac{1}{72}a^2-2\right)$$
$$=-\frac{1}{7776}a^4+\frac{1}{216}a^2+2-\frac{3}{216}a^2+2$$
$$=-\frac{1}{7776}a^4-\frac{2}{216}a^2+4=-\frac{1}{7776}a^4-\frac{1}{108}a^2+4$$

Da die Seite b von a abhängt, sagt man auch b ist eine Funktion von a also b(a).

A1 Ausführliche Lösung

b) Die Fläche des Rechtecks A ist das Produkt seiner Seiten.

$$A(a) = a \cdot b(a) = a \cdot \left(-\frac{1}{7776}a^4 - \frac{1}{108}a^2 + 4 \right)$$

$$= -\frac{1}{7776}a^5 - \frac{1}{108}a^3 + 4a$$

Die Extremwertbestimmung von A(a) liefert den Wert von a, für dass die Rechteckfläche am größten wird.

$$A'(a) = -\frac{5}{7776}a^4 - \frac{3}{108}a^2 + 4 \;;\; A''(a) = -\frac{20}{7776}a^3 - \frac{6}{108}a$$

$$A'(a) = 0 \Leftrightarrow -\frac{5}{7776}a^4 - \frac{3}{108}a^2 + 4 = 0 \,|\cdot \left(-\frac{7776}{5} \right)$$

$$\Leftrightarrow a^4 + \frac{3 \cdot 7776}{108 \cdot 5}a^2 - \frac{4 \cdot 7776}{5} = 0$$

$$\Leftrightarrow a^4 + \frac{216}{5}a^2 - \frac{31104}{5} = 0 \text{ Substitution: } a^2 = z$$

$$\Leftrightarrow z^2 + \frac{216}{5}z - \frac{31104}{5} = 0 \Rightarrow p = \frac{216}{5} \;;\; q = -\frac{31104}{5}$$

$$\Rightarrow D = \left(\frac{p}{2} \right)^2 - q = \left(\frac{108}{5} \right)^2 + \frac{31104}{5} = \frac{11664}{25} + \frac{155520}{25} = \frac{167184}{25}$$

$$= \frac{1296}{25} \cdot 129 \Rightarrow \sqrt{D} = \sqrt{\frac{1296}{25} \cdot 129} = \frac{36}{5}\sqrt{129}$$

$$z_{1/2} = -\frac{p}{2} \pm \sqrt{D} \left| \begin{array}{l} z_1 = -\frac{108}{5} + \frac{36}{5}\sqrt{129} = a^2 \\ z_2 = -\frac{108}{5} - \frac{36}{5}\sqrt{129} < 0 \Rightarrow \text{keine Lösung für a} \end{array} \right.$$

$$a^2 = -\frac{108}{5} + \frac{36}{5}\sqrt{129} \Rightarrow |a| = \sqrt{-\frac{108}{5} + \frac{36}{5}\sqrt{129}}$$

$$a_1 = \sqrt{-\frac{108}{5} + \frac{36}{5}\sqrt{129}} \;;\; a_2 = -\sqrt{-\frac{108}{5} + \frac{36}{5}\sqrt{129}}$$

Nach einigen Umformungen: $a_1 = \frac{6}{5}\sqrt{-15 + 5\sqrt{129}} \approx 7{,}757$

Da aus z_2 keine Wurzel gezogen werden kann und der Wert für a positiv sein soll, müsste a_1 eine Extremstelle von A(a) sein.
Das ist mit der 2. Ableitung von A(a) zu überprüfen.

$A''(a_1) < 0$ wegen

$A''(a_1) = -\frac{20}{7776}a_1^3 - \frac{6}{108}a_1$ und $a_1 > 0$

Für den Wert $a_1 = \frac{6}{5}\sqrt{-15 + 5\sqrt{129}}$

ist die Fläche des Rechtecks maximal.

A1	Ausführliche Lösung	
	b)	Da der Graph, der den oberen Teil des Mundes bildet, an der Stelle x = 0 ein Minimum aufweist (P_{Min} (0 | 2)), ist zu überprüfen, ob die obere Seite des Rechtecks unterhalb davon liegt. Also ob $f\left(\frac{a_1}{2}\right) < 2$ ist. $f\left(\frac{a_1}{2}\right) = f\left(\frac{3}{5}\sqrt{5\sqrt{129}-15}\right) \approx 1{,}813 < 2$ Die Berechnung erfolgte mit dem Taschenrechner. Das Ergebnis bestätigt, dass die obere Seite des Rechtecks unterhalb des Minimums von f(x) liegt. Nun kann die Fläche des Rechtecks mit dem Taschenrechner berechnet werden: $A_{Rechteck} = A(a_1) = -\frac{1}{7776}a_1^5 - \frac{1}{108}a_1^3 + 4a_1$ $A_{Rechteck} = A(a_1) = A\left(\frac{6}{5}\sqrt{5\sqrt{129}-15}\right) \approx 23{,}095$ Das Rechteck maximaler Größe hat eine Fläche von etwa 23,095 m^2.

A1 Ausführliche Lösung

c) Die gesamte Fläche des Mundes ist die Fläche zwischen den Funktionsgraphen von f(x) und g(x). Diese ist über die Integration zu finden. Dazu müssen aber zuerst die Integrationsgrenzen bestimmt werden.

$$f(x)-g(x)=0 \Leftrightarrow -\frac{1}{486}x^4+\frac{1}{54}x^2+2-\left(\frac{1}{18}x^2-2\right)=0$$

$$\Leftrightarrow -\frac{1}{486}x^4+\frac{1}{54}x^2-\frac{3}{54}x^2+4=0 \Leftrightarrow -\frac{1}{486}x^4-\frac{1}{27}x^2+4=0 \mid \cdot(-486)$$

$$\Leftrightarrow x^4+18x^2-1944=0 \text{ Substitution: } z=x^2$$

$$\Leftrightarrow z^2+18z-1944=0 \Rightarrow p=18\,;\,q=-1944$$

$$\Rightarrow D=\left(\frac{p}{2}\right)^2-q=81+1944=2025 \Rightarrow \sqrt{D}=\sqrt{2025}=45$$

$$z_{1/2}=-\frac{p}{2}\pm\sqrt{D}\;\left|\;\begin{array}{l} z_1=-9+45=36=x^2 \Rightarrow x_{1/2}=\pm 6 \text{ (Integrationsgrenzen)} \\ z_2=-9-45=-54<0 \Rightarrow \text{keine Lösung für } x \end{array}\right.$$

Mit $f(x)-g(x)=-\frac{1}{486}x^4-\frac{1}{27}x^2+4$

gilt für die Fläche zwischen den Graphen:

$$A_{Mund}=A=\int_{x_1}^{x_2}\left[f(x)-g(x)\right]dx=\int_{-6}^{6}\left(-\frac{1}{486}x^4-\frac{1}{27}x^2+4\right)dx$$

$$=-\frac{1}{5\cdot 486}x^5-\frac{1}{3\cdot 27}x^3+4x\,\Big|_{-6}^{6}$$

$$=-\frac{7776}{2430}-\frac{216}{81}+24-\left(\frac{7776}{2430}+\frac{216}{81}-24\right)$$

$$=-\frac{15552}{2430}-\frac{432}{81}+48=\frac{544}{15}\approx 36,267$$

Für den Mund wird an der Hauswand eine Fläche von insgesamt 36,267 m^2 benötigt.

A1 Ausführliche Lösung

d) Die schraffierte Fläche ist die Differenz aus der gesamten Fläche und der des Rechtecks.

$$A_{schraffiert}=A_{Mund}-A_{Rechteck}=\frac{544}{15}-A\left(\frac{6}{5}\sqrt{5\sqrt{129}-15}\right)\approx 13,172$$

Die Kosten für die Beschichtung von $1\,m^2$ betragen 120 €.

$$\text{Gesamtkosten}=120\text{ €}\cdot A_{schraffiert}=1580,65\text{ €}$$

Bemerkung:
Um Rundungsfehler möglichst zu vermeiden, sollte man bei Berechnungen mit dem Taschenrechner Zwischenwerte speichern.

$$\text{Gesamtkosten}=120\text{ €}\cdot 13,172=1580,64\text{ €}$$

A1	Bemerkung zu Rundungsfehlern
	Um Rundungsfehler möglichst zu vermeiden, sollte man bei Berechnungen mit dem Taschenrechner Zwischenwerte speichern. In vielen Fällen reicht aber für die Berechnung eine Genauigkeit von 3 Stellen hinter dem Komma. Im folgenden soll die Rechnung mit einer Genauigkeit von 3 Stellen hinter dem Komma durchgeführt werden. $a_1 \approx 7{,}757$ $A_{Rechteck} \approx -\frac{1}{7776}\cdot(7{,}757)^5 - \frac{1}{108}\cdot(7{,}757)^3 + 4\cdot 7{,}757 \approx 23{,}095$ $A_{Mund} \approx 36{,}267$ $A_{schraffiert} = A_{Mund} - A_{Rechteck} \approx 36{,}267 - 23{,}095 \approx 13{,}172$ $\text{Gesamtkosten} \approx 120\text{ €}\cdot 13{,}172 \approx 1580{,}64\text{ €}$

A2 Ausführliche Lösung

$f(x)=\frac{1}{8}x^4-x^3+\frac{9}{4}x^2$ Tangente an $f(x)$ in $P(2\,|\,f(2))$

$f(2)=3 \Rightarrow t(x)$ berührt den Graphen von $f(x)$ im Punkt $P(2\,|\,3)$

Tangentengleichung: $t(x)=f'(x_0)(x-x_0)+f(x_0)$ mit $x_0=2$

$f'(x)=\frac{1}{2}x^3-3x^2+\frac{9}{2}x \Rightarrow f'(x_0)=f'(2)=1$

und mit $f(x_0)=f(2)=3$ gilt: $t(x)=1\cdot(x-2)+3$ also $\boxed{t(x)=x+1}$

Schnittpunkte, bzw. Berührungspunkte der Tangente mit dem Graphen von $f(x)$:

$$t(x)-f(x)=x+1-\left(\frac{1}{8}x^4-x^3+\frac{9}{4}x^2\right)=-\frac{1}{8}x^4+x^3-\frac{9}{4}x^2+x+1$$

$$t(x)-f(x)=0 \Leftrightarrow -\frac{1}{8}x^4+x^3-\frac{9}{4}x^2+x+1=0$$

Da die Tangente den Graphen von $f(x)$ im Punkt $P(2\,|\,3)$ zu berühren scheint, könnten $x_{1/2}=2$ Lösungen sein.

HORNER

$$\begin{array}{l|ccccc}
 & -\frac{1}{8} & 1 & -\frac{9}{4} & 1 & 1 \\
x=2 & & -\frac{1}{4} & \frac{6}{4} & -\frac{6}{4} & -\frac{4}{4} \\
\hline
 & -\frac{1}{8} & \frac{3}{4} & -\frac{3}{4} & -\frac{2}{4} & 0 \\
x=2 & & -\frac{1}{4} & \frac{4}{4} & \frac{2}{4} & \\
\hline
 & -\frac{1}{8} & \frac{2}{4} & \frac{1}{4} & 0 &
\end{array}$$

$$\Rightarrow -\frac{1}{8}x^2+\frac{1}{2}x+\frac{1}{4}=0 \Rightarrow x_{3/4}=2\pm\sqrt{6}$$

Da die Tangente den Graphen von $f(x)$ im Punkt $P(2\,|\,3)$ berührt (doppelte Nullstelle),

kann die gesuchte Fläche mit folgendem Integral berechnet werden:

$$A=\int_{2-\sqrt{6}}^{2+\sqrt{6}}\left[t(x)-f(x)\right]dx=\int_{2-\sqrt{6}}^{2+\sqrt{6}}\left[-\frac{1}{8}x^4+x^3-\frac{9}{4}x^2+x+1\right]dx$$

$$=\left[-\frac{1}{40}x^5+\frac{1}{4}x^4-\frac{3}{4}x^3+\frac{1}{2}x^2+x\right]_{2-\sqrt{6}}^{2+\sqrt{6}}\approx 2{,}939$$

Die gesuchte Fläche ist $\underline{\underline{2{,}939\ \text{FE}}}$

A3 Ausführliche Lösung

a) $f_a(x) = a \cdot x^2 \cdot e^{3-2x}$

Ansatz für Nullstellen: $f_a(x) = 0 \Leftrightarrow a \cdot x^2 \cdot e^{3-2x} = 0$

Zu untersuchen ist,
für welche x – Werte die Faktoren des Produktes Null werden.
$a \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ ist ein gewählter Faktor, der nie Null werden kann.

$x^2 = 0 \Leftrightarrow x_{1/2} = 0$ ist eine doppelte Nullstelle.

Untersuchung von e^{3-2x} : $e^{3-2x} = e^{-(2x-3)}$

$e^{-(2x-3)}$ entsteht aus e^{-2x} durch Verschiebung auf der x – Achse um 3EH nach rechts.

Da e^{-2x} keine Nullstelle besitzt, hat auch $e^{-(2x-3)}$ keine Nullstelle.

Damit ist $\underline{\underline{x_{1/2} = 0}}$ die einzige Nullstelle, da sie doppelt vorkommt, berührt der Graph von $f(x)$ die x – Achse an dieser Stelle. (waagerechte Tangente)

A3 Ausführliche Lösung

b) $f_a(x) = a \cdot x^2 \cdot e^{3-2x}$ Überprüfung auf waagerechte Tangenten.

Bedingung für waagerechte Tangenten: $f'_a(x) = 0$

Ableitung über Produktregel: $f'_a = u' \cdot v + u \cdot v'$

$u = a \cdot x^2 \text{ ; } v = e^{3-2x} \Rightarrow u' = 2a \cdot x \text{ ; } v' = -2e^{3-2x}$

$\Rightarrow f'_a(x) = 2ax \cdot e^{3-2x} + ax^2 \cdot \left(-2e^{3-2x}\right)$

$= 2ax \cdot e^{3-2x} - 2ax^2 \cdot e^{3-2x} = 2a \cdot e^{3-2x}\left(x - x^2\right)$

$f'_a(x) = 0 \Leftrightarrow 2a \cdot e^{3-2x}\left(x - x^2\right) = 0$

$\Leftrightarrow x(1-x) = 0 \Rightarrow x_1 = 0 \text{ ; } x_2 = 1$

e^{3-2x} kann nicht null werden (siehe Aufgabenteil a)

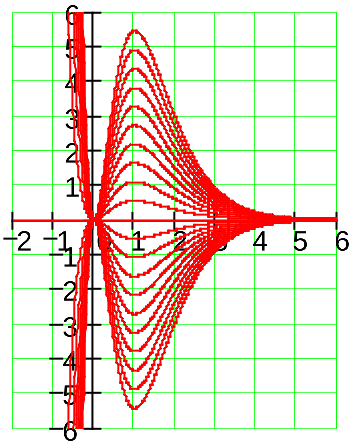
Punkte mit waagerechten Tangenten:

$f_a(x_1) = f_a(0) = a \cdot 0^2 \cdot e^3 = 0 \Rightarrow \underline{\underline{P_{1a}(0 \mid 0)}}$

$f_a(x_2) = f_a(1) = a \cdot 1^2 \cdot e^{3-2} = a \cdot e \Rightarrow \underline{\underline{P_{2a}(1 \mid a \cdot e)}}$

Alle Punkte P_{1a} liegen im Koordinatenursprung, sind unabhängig vom Parameter a.

Alle Punkte P_{2a} liegen auf einer Parallelen zur y – Achse : $x = 1$

A3	Ausführliche Lösung	
	$f_a(x) = a \cdot x^2 \cdot e^{3-2x} \quad x \in \mathbb{R}\,;\, a \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ 	$f_a(x) = a \cdot x^2 \cdot e^{3-2x} \quad x \in \mathbb{R}$ für $a \in \{-2;-1;1;2\}$