Lösungen Flächenberechnung durch bestimmtes Integral I

Ausführliche Lösungen:

A1 Ausführliche Lösung

a) Die Fläche liegt unterhalb der x – Achse und ist negativ.
Zu überprüfen ist, ob die Integrationsgrenzen mit den Nullstellen übereinstimmen.

$$f(-2) = (-2)^2 - 2(-2) - 8 = 4 + 4 - 8 = 0$$

$$f(4) = (4)^2 - 2(4) - 8 = 16 + 8 - 8 = 0$$

$$\int_{-2}^{4} f(x)\,dx = \int_{-2}^{4} \left(x^2 - 2x - 8\right) dx = \int_{-2}^{4} x^2\,dx - 2\int_{-2}^{4} x\,dx - 8\int_{-2}^{4} dx$$

$$= \left.\frac{x^3}{3}\right|_{-2}^{4} - 2\cdot\left.\frac{x^2}{2}\right|_{-2}^{4} - 8\,x\Big|_{-2}^{4} = \left(\frac{4^3}{3} - \frac{(-2)^3}{3}\right) - 2\left(\frac{4^2}{2} - \frac{(-2)^2}{2}\right) - 8\left(4 - (-2)\right)$$

$$= \frac{64}{3} - \frac{-8}{3} - 2\left(\frac{16}{2} - \frac{4}{2}\right) - 8\left(4 + 2\right) = \frac{64}{3} + \frac{8}{3} - 2\cdot\frac{12}{2} - 8\cdot 6$$

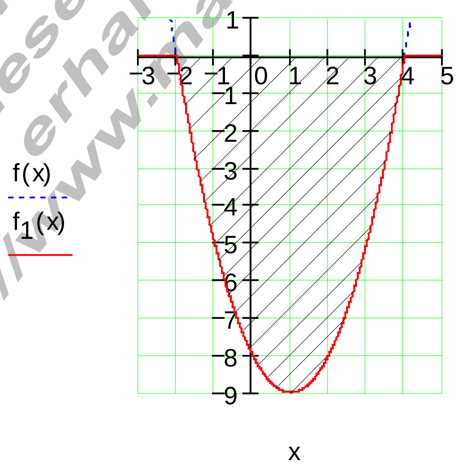
$$= \frac{72}{3} - 12 - 48 = 24 - 12 - 48 = -36$$

Fläche: $A = \left|\int_{-2}^{4} f(x)\,dx\right| = \left|-36\right| = 36$

Der Flächeninhalt beträgt 36 FE.

A1 Ausführliche Lösung

a)



A1 Ausführliche Lösung

b) Die Fläche liegt unterhalb der x – Achse und ist negativ.
Zu überprüfen ist, ob die obere Integrationsgrenze mit der Nullstelle übereinstimmt.

$$f(3{,}5) = 2\cdot 3{,}5 - 7 = 0$$

$$\int_0^{3,5} f(x)\,dx = \int_0^{3,5} (2x-7)\,dx = 2\int_0^{3,5} x\,dx - 7\int_0^{3,5} dx$$

$$= 2\cdot\left.\frac{x^2}{2}\right|_0^{3,5} - 7x\Big|_0^{3,5} = 2\left(\frac{(3{,}5)^2}{2} - \frac{0^2}{2}\right) - 7(3{,}5-0)$$

$$= 2\cdot\frac{3{,}5\cdot 3{,}5}{2} - 7\cdot 3{,}5 = 12{,}25 - 24{,}5 = -12{,}25$$

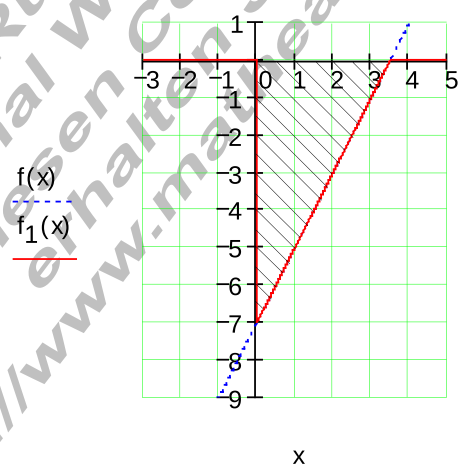
$$\text{Fläche: } A = \left|\int_0^{3,5} f(x)\,dx\right| = \left|-12{,}25\right| = 12{,}25$$

Der Flächeninhalt beträgt 12,25 FE.
Da es sich bei der abgebildeten Fläche um ein Dreieck handelt, hätte man das Ergebnis auch einfacher bekommen können:

$$A = \frac{g\cdot h}{2} = \frac{3{,}5\cdot 7}{2} = \underline{\underline{12{,}25\text{ FE}}}$$

A1 Ausführliche Lösung

b)



A1	Ausführliche Lösung

c) Die Flächen A_1 und A_3 liegen oberhalb der x – Achse und sind positiv.
Die Fläche A_2 liegt unterhalb der x – Achse und ist negativ.
Um die Integrationsgrenzen für alle Teilintegrale zu bekommen, müssen zuerst die Nullstellen von f(x) bestimmt werden.

$$f(x) = 0 \Leftrightarrow x^2 + 5x + 2,25 = 0$$

$$\Rightarrow p = 5\,;\, q = 2,25 \Rightarrow D = 4$$

$$\Rightarrow x_1 = -2,5 + \sqrt{4} = -0,5 = -\frac{1}{2} \text{ und } x_2 = -2,5 - \sqrt{4} = -4,5 = -\frac{9}{2}$$

$$A = A_1 + |A_2| + A_3 \text{ mit } A_1 = A_3 \text{ (Symmetrie)}$$

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^b \left(x^2 + 5x + 2,25\right)dx = \int_a^b x^2\,dx + 5\int_a^b x\,dx + 2,25\int_a^b dx$$

$$= \left.\frac{x^3}{3}\right|_a^b + 5\cdot\left.\frac{x^2}{2}\right|_a^b + 2,25\,x\Big|_a^b$$

$$A_1 = A_3 = \left.\frac{x^3}{3}\right|_{-5}^{-4,5} + 5\cdot\left.\frac{x^2}{2}\right|_{-5}^{-4,5} + 2,25\,x\Big|_{-5}^{-4,5}$$

$$= \left[\frac{(-4,5)^3}{3} - \frac{(-5)^3}{3}\right] + 5\left[\frac{(-4,5)^2}{2} - \frac{(-5)^2}{2}\right] + 2,25\left[(-4,5) - (-5)\right]$$

$$= \left[-\frac{4,5^3}{3} + \frac{5^3}{3}\right] + 5\left[\frac{4,5^2}{2} - \frac{5^2}{2}\right] + 2,25\cdot 0,5 \approx 0,542$$

$$A_2 = \left.\frac{x^3}{3}\right|_{-4,5}^{-0,5} + 5\cdot\left.\frac{x^2}{2}\right|_{-4,5}^{-0,5} + 2,25\,x\Big|_{-4,5}^{-0,5}$$

$$= \left[\frac{(-0,5)^3}{3} - \frac{(-4,5)^3}{3}\right] + 5\left[\frac{(-0,5)^2}{2} - \frac{(-4,5)^2}{2}\right] + 2,25\left[(-0,5) - (-4,5)\right]$$

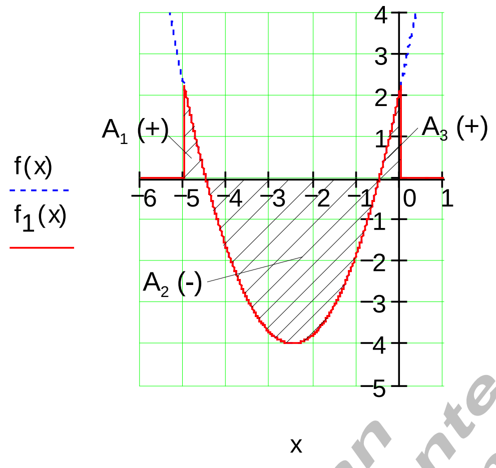
$$= \left[-\frac{0,5^3}{3} + \frac{4,5^3}{3}\right] + 5\left[\frac{0,5^2}{2} - \frac{4,5^2}{2}\right] + 2,25\cdot 4 \approx -10,667$$

Fläche: $A = 2\cdot A_1 + |A_2| = 2\cdot 0,542 + |-10,667| = 11,751$

Der Flächeninhalt beträgt 11,751 FE.

A1	Ausführliche Lösung

c)



A1	Ausführliche Lösung

d) Die Fläche A_1 liegt unterhalb der x- Achse, sie zählt negativ.
Die Fläche A_2 liegt oberhalb der x- Achse, sie zählt positiv.

Um die Integrationsgrenzen für die beiden Teilintegrale zu bekommen, muss zuerst die Nullstelle von f(x) bestimmt werden.
$f(x) = 0 \Leftrightarrow 2x - 2 = 0 \Rightarrow x_1 = 1$ ist Nullstelle.

$$A = |A_1| + A_2$$

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^b (2x-2)\,dx = 2\int_a^b x\,dx - 2\int_a^b dx = 2\cdot\frac{x^2}{2}\Big|_a^b - 2x\Big|_a^b$$

$$A_1 = 2\cdot\frac{x^2}{2}\Big|_0^1 - 2x\Big|_0^1 = 2\left(\frac{1^2}{2} - \frac{0^2}{2}\right) - 2(1-0) = 2\cdot\frac{1}{2} - 2 = -1$$

$$A_2 = 2\cdot\frac{x^2}{2}\Big|_1^3 - 2x\Big|_1^3 = 2\left(\frac{3^2}{2} - \frac{1^2}{2}\right) - 2(3-1) = 2\cdot\frac{9}{2} - 2\cdot\frac{1}{2} - 2\cdot 2 = 9 - 1 - 4 = 4$$

$$A = |A_1| + A_2 = |-1| + 4 = 1 + 4 = 5$$

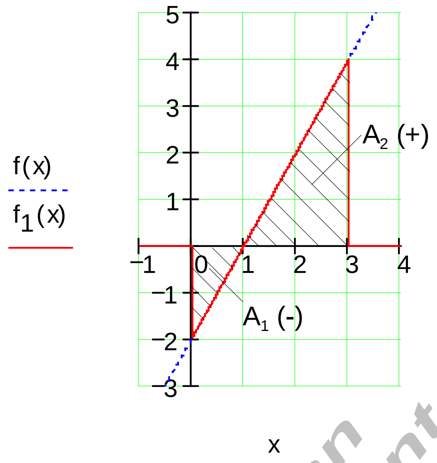
Der Flächeninhalt beträgt 5 FE.
Zum gleichen Ergebnis gelangt man auch über die Berechnung beider Dreiecke.

$$A_{\Delta 1} = \frac{g_1 \cdot h_1}{2} = \frac{1\cdot 2}{2} = 1\,\text{FE und } A_{\Delta 2} = \frac{g_2 \cdot h_2}{2} = \frac{2\cdot 4}{2} = 4\,\text{FE}$$

$$\Rightarrow A = A_{\Delta 1} + A_{\Delta 2} = 1\,\text{FE} + 4\,\text{FE} = 5\,\text{FE}$$

A1 Ausführliche Lösung

d)



A2 Ausführliche Lösung

a) $f(x) = x^2 - 4x$

$\Rightarrow f(x) = 0 \Leftrightarrow x^2 - 4x = 0 \Leftrightarrow x(x-4) = 0$

$\Rightarrow x_1 = 0$ untere Grenze $\Rightarrow a = 0$ und $x_2 = 4$ obere Grenze $\Rightarrow b = 4$

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^b (x^2 - 4x)\,dx = \int_a^b x^2\,dx - 4\int_a^b x\,dx$$

$$= \left.\frac{x^3}{3}\right|_0^4 - 4\cdot\left.\frac{x^2}{2}\right|_0^4 = \frac{4^3}{3} - 4\cdot\frac{4^2}{2} \approx -10{,}667$$

$$A = \left|\int_a^b f(x)\,dx\right| = |-10{,}667| = \underline{\underline{10{,}667\ \text{FE}}}$$

A2 Ausführliche Lösung

b) $f(x) = -x^2 + 4x - 1$

$\Rightarrow f(x) = 0 \Leftrightarrow -x^2 + 4x - 1 = 0 \Leftrightarrow x^2 - 4x + 1 = 0 \Rightarrow p = -4\,;\, q = 1 \Rightarrow D = 3$

$\Rightarrow x_1 = 2 + \sqrt{3} \approx 3{,}732$ obere Grenze $\Rightarrow b = 3{,}732$

$x_2 = 2 - \sqrt{3} \approx 0{,}268$ untere Grenze $\Rightarrow a = 0{,}268$

$$A = \int_a^b f(x)\,dx = \int_a^b (-x^2 + 4x - 1)\,dx = -\int_a^b x^2\,dx + 4\int_a^b x\,dx - \int_a^b dx$$

$$= -\left.\frac{x^3}{3}\right|_{0,268}^{3,732} + 4\cdot\left.\frac{x^2}{2}\right|_{0,268}^{3,732} - \left.x\right|_{0,268}^{3,732}$$

$$= -\left(\frac{3{,}732^3}{3} - \frac{0{,}268^3}{3}\right) + 4\left(\frac{3{,}732^2}{2} - \frac{0{,}268^2}{2}\right) - (3{,}732 - 0{,}268) \approx \underline{\underline{6{,}928}}$$

Die gekennzeichnete Fläche hat einen Flächeninhalt von 6,928 FE.