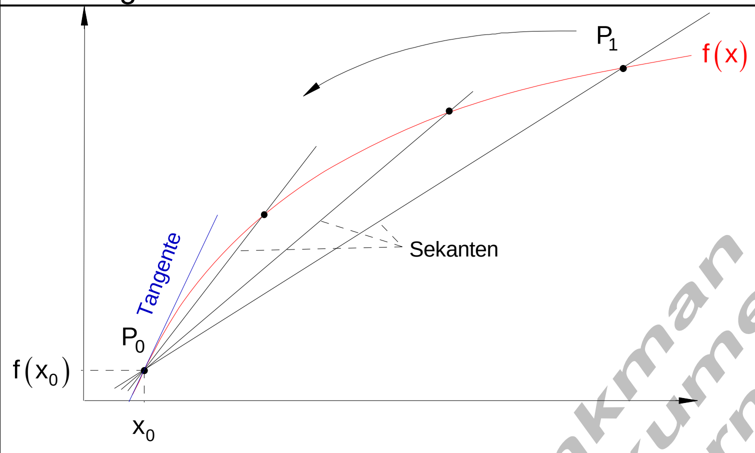
Aufgaben Differenzialrechnung zur Vorbereitung der Klassenarbeit VI Ergebnisse

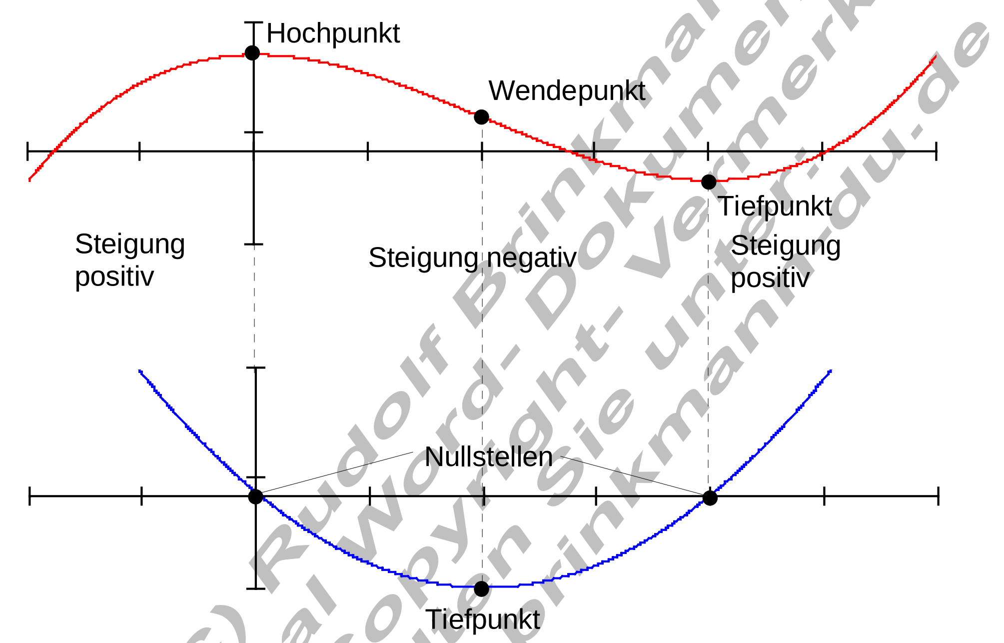
E1	Ergebnisse	
	a)	Die Steigung eines Funktionsgraphen in einem Punkt ist gleich der Steigung der Tangente in diesem Punkt.
	b)	 Bewegt man den Punkt P_1 immer weiter auf P_0 zu, so ändert sich die Sekantensteigung. Je mehr man sich dem Punkt P_0 nähert, desto mehr nähert sich die Sekantensteigung der Tangentensteigung.
	c)	Die erste Ableitung einer Funktion an der Stelle x_0 ist die Steigung der Tangente im Punkt P (x_0 | $f(x_0)$) und somit auch die Steigung des Graphen von f(x) in diesem Punkt.
	d)	Die Ableitungsfunktion f'(x) heißt deshalb Steigungsfunktion, weil sie in jedem Punkt die Steigung von f(x) repräsentiert.

E2	Ergebnisse	
	a)	$f'(x)=3 \qquad f''(x)=0 \qquad f'''(x)=0$
	b)	$f'(x)=15x^2-3 \qquad f''(x)=30x \qquad f'''(x)=30$
	c)	$f'(x)=9x^2+4x+1 \qquad f''(x)=18x+4 \qquad f'''(x)=18$
	d)	$f'(x)=24x^2+24x+6 \qquad f''(x)=48x+24 \qquad f'''(x)=48$ Siehe ausführliche Lösung.
	e)	$f'(x)=-4x^3+2 \qquad f''(x)=-12x^2 \qquad f'''(x)=-24x$
	f)	$f'(x)=4x^3-9 \qquad f''(x)=12x^2 \qquad f'''(x)=24x$
	g)	$f'(x)=-3cx^2-a-b-c^3-1 \qquad f''(x)=-6cx \qquad f'''(x)=-6c$ Siehe ausführliche Lösung.
	h)	$f'(x)=12x^2-4x+5 \qquad f''(x)=24x-4 \qquad f'''(x)=24$
	i)	$f'(x)=20x^3-12x^2+6x-2 \qquad f''(x)=60x^2-24x+6 \qquad f'''(x)=120x-24$
	j)	$f'(x)=-4x^3 \qquad f''(x)=-12x^2 \qquad f'''(x)=-24x$ Siehe ausführliche Lösung.

E3	Ergebnisse
a)	$f'(x) = 3x^2 + 2x - 4$
b)	$f''(x) = 6x + 2$
c)	siehe Tabelle
d)	Siehe ausführliche Lösung

x	–3	–2,5	–2	–1,5	–1	–0,5	0	0,5	1	1,5	2
$f(x)$	–7	–0,38	3	3,88	3	1,13	–1	–2,63	–3	–1,38	3
$f'(x)$	17	9,75	4	–0,25	–3	–4,25	–4	–2,25	1	5,75	12
$f''(x)$	–16	–13	–10	–7	–4	–1	2	5	8	11	14

E4 Ergebnis



E5	Ergebnisse		
a)	$f'(x) = 3$	$f''(x) = 0$	$f'''(x) = 0$
b)	$f'(x) = 15x^2 - 3$	$f''(x) = 30x$	$f'''(x) = 30$
c)	$f'(x) = 9x^2 + 4x + 1$	$f''(x) = 18x + 4$	$f'''(x) = 18$
d)	$f'(x) = -4x^3 + 2$	$f''(x) = -12x^2$	$f'''(x) = -24x$
e)	$f'(x) = 4x^3 - 9$	$f''(x) = 12x^2$	$f'''(x) = 24x$
f)	$f'(x) = 12x^2 - 4x + 5$	$f''(x) = 24x - 4$	$f'''(x) = 24$

E6.1	Ergebnisse	
	a)	Punktsymmetrie, da nur ungerade Exponenten vorkommen
	b)	Punkte mit waagerechter Tangente: $P_1(1 \mid -4)\,;\,P_2(-1 \mid 4)$
	c)	Achsenschnittpunkte: $P_y(0 \mid 0)\,;\,P_{x1}(0 \mid 0)\,;\,P_{x2}\left(\sqrt{3} \approx 1{,}73 \mid 0\right)\,;\,P_{x3}\left(-\sqrt{3} \approx -1{,}73 \mid 0\right)$
	d)	Siehe ausführliche Lösungen

E6.2	Ergebnisse	
	a)	Keine Symmetrie
	b)	Punkte mit waagerechter Tangente: $P_1(0 \mid -4)\,;\,P_2(-2 \mid 4)$
	c)	Achsenschnittpunkte: $P_y(0 \mid -4)\,;\,P_{x1}(-1 \mid 0)\,;\,P_{x2}\left(-1+\sqrt{3} \approx 0{,}73 \mid 0\right)\,;\,P_{x3}\left(-1-\sqrt{3} \approx -2{,}73 \mid 0\right)$
	d)	Siehe ausführliche Lösungen

E6.3	Ergebnisse	
	a)	Achsensymmetrie, da nur gerade Exponenten vorkommen
	b)	Punkte mit waagerechter Tangente: $P_1\left(0 \,\middle|\, \frac{81}{10} = 8{,}1\right);\,P_2(3 \mid 0)\,;\,P_3(-3 \mid 0)$
	c)	Achsenschnittpunkte: $P_y\left(0 \,\middle|\, \frac{81}{10} = 8{,}1\right);\,P_{x1/3}(3 \mid 0)\,;\,P_{x2/4}(-3 \mid 0)$
	d)	Siehe ausführliche Lösungen

E6.4	Ergebnisse	
	a)	Keine Symmetrie
	b)	Punkte mit waagerechter Tangente: $P_{1/2}(0 \mid 0)\,;\,P_3\left(3 \,\middle|\, -\frac{27}{5} = -5{,}4\right)$
	c)	Achsenschnittpunkte: $P_y(0 \mid 0)\,;\,P_{x1/2/3}(0 \mid 0)\,;\,P_{x4}(4 \mid 0)$
	d)	Siehe ausführliche Lösungen

E7	Ergebnisse	
	a)	Der Graph von f(x) ist symmetrisch zur y – Achse, da nur gerade Exponenten auftreten.
	b)	$P_{min1}\left(-\sqrt{12} \approx -3{,}46 \mid 0\right)$ $P_{min2}\left(\sqrt{12} \approx 3{,}46 \mid 0\right)$ $P_{max}(0 \mid 4{,}5)$
	c)	$P_{w1}(2 \mid 2) \Rightarrow t_1(x) = -2x+6$ $P_{w2}(-2 \mid 2) \Rightarrow t_2(x) = 2x+6$
	d)	$P_y(0 \mid 4{,}5)$ $P_{x1/2}\left(-\sqrt{12} \approx -3{,}46 \mid 0\right)$ $P_{x3/4}\left(\sqrt{12} \approx 3{,}46 \mid 0\right)$
	e)	Wertetabelle siehe „Ausführliche Lösung“.
	f)	Graph siehe „Ausführliche Lösung“.

Ausführliche Lösungen

A2 Ausführliche Lösung

d) $f(x) = (2x+1)^3$

1. Lösung durch ausmultiplizieren:

$$f(x) = (2x+1)^3 = (2x+1)\underbrace{(2x+1)^2}_{\text{1. bin. Formel}} = (2x+1)\left(4x^2+4x+1\right)$$

$$= 8x^3 + 8x^2 + 2x + 4x^2 + 4x + 1 = 8x^3 + 12x^2 + 6x + 1$$

$$f'(x) = \underline{\underline{24x^2 + 24x + 6}} \qquad f''(x) = \underline{\underline{48x + 24}} \qquad f'''(x) = \underline{\underline{48}}$$

2. Lösung mit der Kettenregel:

$$f'(x) = 3(2x+1)^2 \cdot 2 = 6(2x+1)^2 = 6\left(4x^2+4x+1\right) = \underline{\underline{24x^2 + 24x + 6}}$$

$$f''(x) = 2 \cdot 6(2x+1) \cdot 2 = 24(2x+1) = \underline{\underline{48x + 24}}$$

$$f'''(x) = \underline{\underline{48}}$$

A2 Ausführliche Lösung

g) $f(x) = \underbrace{a + b + c^2}_{\text{Konstante}} - x - ax - bx - cx^3 - c^3x$

$$f'(x) = -1 - a - b - 3cx^2 - c^3 = \underline{\underline{-3cx^2 \underbrace{- a - b - c^3 - 1}_{\text{Konstante}}}}$$

$$f''(x) = \underline{\underline{-6cx}} \qquad f'''(x) = \underline{\underline{-6c}}$$

A2 Ausführliche Lösung

j) $f(x) = \left(a^2 + x^2\right)\left(a^2 - x^2\right)$

1. Lösung durch ausmultiplizieren (3. binomische Formel):

$$f(x) = a^4 - x^4 \Rightarrow f'(x) = \underline{\underline{-4x^3}} \Rightarrow f''(x) = \underline{\underline{-12x^2}} \Rightarrow f'''(x) = \underline{\underline{-24x}}$$

2. Lösung mit der Produktregel (aufwendig):

$$f(x) = \underbrace{\left(a^2 + x^2\right)}_{u}\underbrace{\left(a^2 - x^2\right)}_{v} \Rightarrow u' = 2x \quad v' = -2x$$

$$f'(x) = u'v + uv' = 2x \cdot \left(a^2 - x^2\right) + \left(a^2 + x^2\right)(-2x)$$

$$= 2a^2x - 2x^3 - 2a^2x - 2x^3 = \underline{\underline{-4x^3}}$$

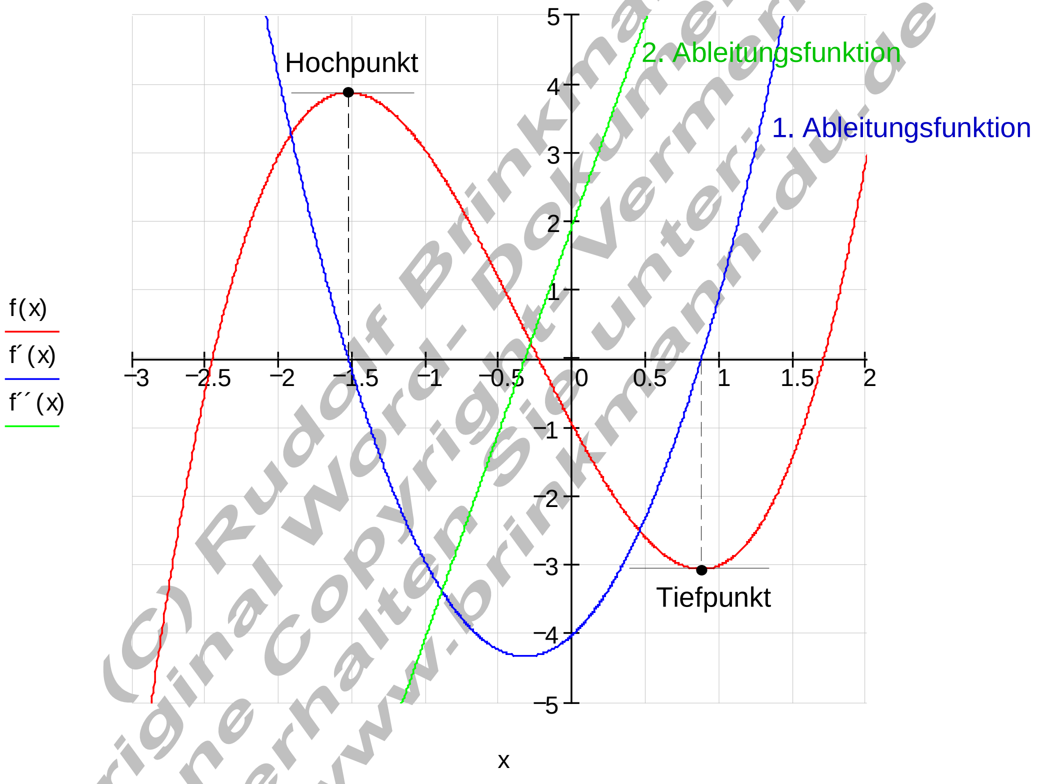
$$f''(x) = \underline{\underline{-12x^2}} \Rightarrow f'''(x) = \underline{\underline{-24x}}$$

A3	Ausführliche Lösungen
a)	$f'(x) = 3x^2 + 2x - 4$
b)	$f''(x) = 6x + 2$
c)	

x	–3	–2,5	–2	–1,5	–1	–0,5	0	0,5	1	1,5	2
$f(x)$	–7	–0,38	3	3,88	3	1,13	–1	–2,63	–3	–1,38	3
$f'(x)$	17	9,75	4	–0,25	–3	–4,25	–4	–2,25	1	5,75	12
$f''(x)$	–16	–13	–10	–7	–4	–1	2	5	8	11	14

A3	Ausführliche Lösung
d)	

$f(x) := x^3 + x^2 - 4x - 1$ $\quad f'(x) := 3x^2 + 2x - 4$ $\quad f''(x) := 6x + 2$



A5	Ausführliche Lösungen	
	a)	$f(x)=3x+4=f(x)=3x^1+4\Rightarrow f'(x)=3\cdot 1\cdot x^0+0=3$ $f'(x)=3 \qquad f''(x)=0 \qquad f'''(x)=0$
	b)	$f(x)=2x-4+x^3-5x+4x^3=5x^3-3x-4=5x^3-3x^1-4$ $\Rightarrow f'(x)=5\cdot 3\cdot x^2-3\cdot 1\cdot x^0-0$ $\Rightarrow f'(x)=15x^2-3\Rightarrow f''(x)=30x\Rightarrow f'''(x)=30$
	c)	$f(x)=3x^3+2x^2+x+1=3x^3+2x^2+x^1+1$ $\Rightarrow f'(x)=3\cdot 3\cdot x^2+2\cdot 2\cdot x^1+1\cdot x^0+0$ $\Rightarrow f'(x)=9x^2+4x+1\Rightarrow f''(x)=18x+4\Rightarrow f'''(x)=18$
	d)	$f(x)=x-x^4+3+x=-x^4+2x^1+3$ $\Rightarrow f'(x)=-4\cdot x^3+2\cdot 1\cdot x^0+0$ $\Rightarrow f'(x)=-4x^3+2\Rightarrow f''(x)=-12x^2\Rightarrow f'''(x)=-24x$
	e)	$f(x)=1-2x-3x-4x+x^4=x^4-9x^1+1$ $\Rightarrow f'(x)=4\cdot x^3-9\cdot 1\cdot x^0+0$ $\Rightarrow f'(x)=4x^3-9\Rightarrow f''(x)=12x^2\Rightarrow f'''(x)=24x$
	f)	$f(x)=4x^3-2x^2+5x-2=4x^3-2x^2+5x^1-2$ $\Rightarrow f'(x)=4\cdot 3\cdot x^2-2\cdot 2\cdot x^1+5\cdot 1\cdot x^0-0$ $\Rightarrow f'(x)=12x^2-4x+5\Rightarrow f''(x)=24x-4\Rightarrow f'''(x)=24$

A6.1	Ausführliche Lösung	
	a)	$f(x)=2x^3-6x$ $\Rightarrow$ Punktsymmetrie, da nur ungerade Exponenten vorkommen. Es gilt: $f(-x)=-f(x)$

A6.1	Ausführliche Lösung	
	b)	$f(x)=2x^3-6x\Rightarrow f'(x)=6x^2-6$ Punkte mit waagerechter Tangente. $f'(x)=0\Leftrightarrow 6x^2-6=0\mid +6$ $\Leftrightarrow 6x^2=6\mid :1$ $\Leftrightarrow x^2=1\Rightarrow x_1=1; x_2=-1$ An den Stellen $x_1=1$ und $x_2=-1$ gibt es waagerechte Tangenten. Berechnung der y – Koordinaten $f(x_1)=f(1)=2\cdot 1^2-6\cdot 1=-4 \qquad \Rightarrow \underline{\underline{P_1(1\mid -4)}}$ $f(x_2)=f(-1)=2\cdot(-1)^2-6\cdot(-1)=4\Rightarrow \underline{\underline{P_2(-1\mid 4)}}$

A6.1	Ausführliche Lösung

c) Achsenschnittpunkte von $f(x) = 2x^3 - 6x$

$P_y : f(0) = 0 \Rightarrow \underline{\underline{P_y(0\,|\,0)}}$

Nullstellen

$f(x) = 0 \Leftrightarrow 2x^3 - 6x = 0$

$\Leftrightarrow x(2x^2 - 6) = 0 \Rightarrow x_1 = 0$

$2x^2 - 6 = 0 \,|+6$

$\Leftrightarrow 2x^2 = 6 \,|:2$

$\Leftrightarrow x^2 = 3 \Rightarrow x_{2/3} = \pm\sqrt{3}$

$\underline{\underline{P_{x1}(0\,|\,0)\,;\,P_{x2}(\sqrt{3}\,|\,0)\,;\,P_{x3}(-\sqrt{3}\,|\,0)}}$

A6.1	Ausführliche Lösung

d) $f(x) = 2x^3 - 6x$

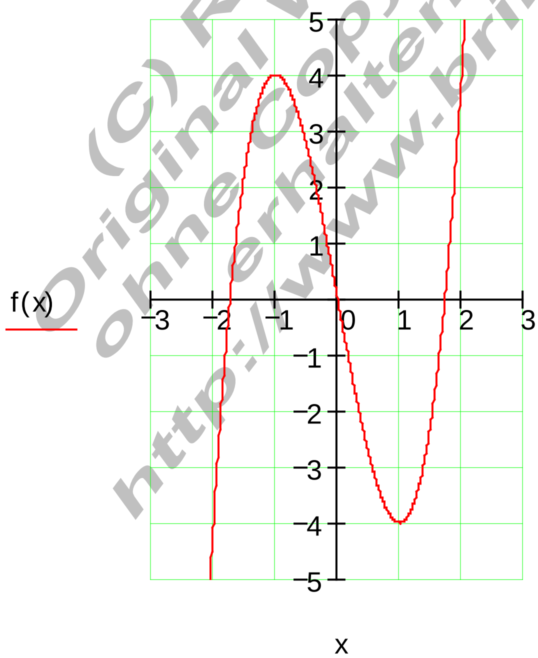
$x = 2 \quad \Rightarrow f(2) = 2 \cdot 2^3 - 6 \cdot 2 = 4$

$x = -2 \Rightarrow f(-2) = -f(2) = -4$ wegen Punktsymmetrie

x	-2	$-1{,}73$	-1	0	1	$1{,}73$	2
$f(x)$	-4	0	4	0	-4	0	4

A6.1	Ausführliche Lösung

d)



A6.2	Ausführliche Lösung	
	a)	$f(x) = 2x^3 + 6x^2 - 4 \Rightarrow$ Es liegt keine Symmetrie vor, da es weder nur gerade Exponenten oder nur ungerade Exponenten gibt.

A6.2	Ausführliche Lösung	
	b)	$f(x) = 2x^3 + 6x^2 - 4 \Rightarrow f'(x) = 6x^2 + 12x$ Punkte mit waagerechter Tangente. $f'(x) = 0 \Leftrightarrow 6x^2 + 12x = 0$ $\Leftrightarrow x(6x+12) = 0 \Rightarrow x_1 = 0$ $6x + 12 = 0 \mid -12$ $\Leftrightarrow 6x = -12 \mid :6$ $\Leftrightarrow x_2 = -2$ An den Stellen $x_1 = 0$ und $x_2 = -2$ gibt es waagerechte Tangenten. Berechnung der $y-$Koordinaten $f(x_1) = f(0) = -4 \Rightarrow \underline{\underline{P_1(0 \mid -4)}}$ $f(x_2) = f(-2) = 2(-2)^3 + 6(-2)^2 - 4 = 4 \Rightarrow \underline{\underline{P_2(-2 \mid 4)}}$

A6.2 Ausführliche Lösung

c) Achsenschnittpunkte von $f(x) = 2x^3 + 6x^2 - 4$

$P_y : f(0) = -4 \Rightarrow \underline{\underline{P_y(0\,|\,-4)}}$

Nullstellen

$f(x) = 0 \Leftrightarrow 2x^3 + 6x^2 - 4 = 0$

Eine Nullstelle wird durch probieren gefunden

$x = 1 \Rightarrow f(1) = 2 \cdot 1^3 + 6 \cdot 1^2 - 4 = 4$

$x = -1 \Rightarrow f(-1) = 2 \cdot (-1)^3 + 6 \cdot (-1)^2 - 4 = 0$ Nullstelle bei $x_1 = -1$

Polynomreduzierung durch Horner-Schema

$$\begin{array}{ccccc} & 2 & 6 & 0 & -4 \\ x = -1 & \downarrow & \underline{-2} & \underline{-4} & \underline{4} \\ & 2 & 4 & -4 & 0 \end{array}$$

Reduziertes Polynom: $2x^2 + 4x - 4 = 0 \,|\, :2$

$\Leftrightarrow x^2 + 2x - 2 = 0$

$p = 2\,;\, q = -2 \Rightarrow D = \left(\frac{p}{2}\right)^2 - q = 1 + 2 = 3 \Rightarrow \sqrt{D} = \sqrt{3}$

$x_{2/3} = -\frac{p}{2} \pm \sqrt{D} \quad \left| \begin{array}{l} x_2 = -1 + \sqrt{3} \\ x_3 = -1 - \sqrt{3} \end{array} \right.$

$\underline{\underline{P_{x1}(-1\,|\,0)\,;\, P_{x2}\left(-1+\sqrt{3}\,|\,0\right)\,;\, P_{x3}\left(-1-\sqrt{3}\,|\,0\right)}}$

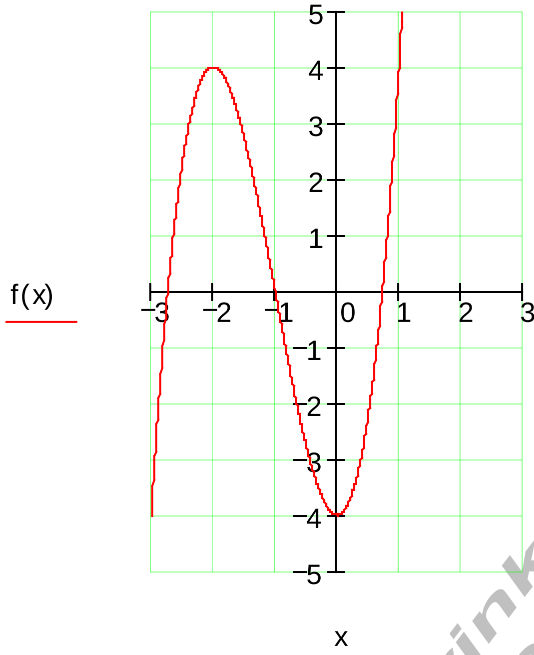
bzw. $P_{x1}(-1\,|\,0)\,;\, P_{x2}(0{,}73\,|\,0)\,;\, P_{x3}(-2{,}73\,|\,0)$

A6.2 Ausführliche Lösung

d) $f(x) = 2x^3 + 6x^2 - 4$

$x = -3 \Rightarrow f(-3) = 2 \cdot (-3)^3 + 6 \cdot (-3)^2 - 4 = -4$

x	−3	−2,73	−2	−1	0	0,73	1
f(x)	−4	0	4	0	−4	0	4

A6.2	Ausführliche Lösung	
	d)	

A6.3	Ausführliche Lösung	
	a)	$f(x) = \frac{1}{10}x^4 - \frac{9}{5}x^2 + \frac{81}{10}$ $\Rightarrow$ Achsensymmetrie, da nur gerade Exponenten vorkommen. Es gilt: $f(-x) = f(x)$

A6.3	Ausführliche Lösung	
	b)	$f(x)=\frac{1}{10}x^4-\frac{9}{5}x^2+\frac{81}{10}\Rightarrow f'(x)=\frac{4}{10}x^3-\frac{18}{5}x$ Punkte mit waagerechter Tangente. $f'(x)=0\Leftrightarrow\frac{4}{10}x^3-\frac{18}{5}x=0$ $\Leftrightarrow x\left(\frac{4}{10}x^2-\frac{18}{5}\right)=0\Rightarrow x_1=0$ $\frac{4}{10}x^2-\frac{18}{5}=0\mid+\frac{18}{5}$ $\Leftrightarrow\frac{4}{10}x^2=\frac{18}{5}\mid:\frac{4}{10}$ $\Leftrightarrow x^2=9\Rightarrow x_{2/3}=\pm3$ An den Stellen $x_1=0$ und $x_2=3$ und $x_3=-3$ gibt es waagerechte Tangenten. Berechnung der y – Koordinaten $f(x_1)=f(0)=\frac{81}{10}\Rightarrow\underline{\underline{P_1\left(0\mid\frac{81}{10}\right)}}$ bzw. $P_1(0\mid8{,}1)$ $f(x_2)=f(3)=\frac{1}{10}\cdot3^4-\frac{9}{5}\cdot3^2+\frac{81}{10}=0\Rightarrow\underline{\underline{P_2(3\mid0)}}$ $f(x_2)=f(-3)=f(3)=0$ wegen Achsensymmetrie $\Rightarrow\underline{\underline{P_3(-3\mid0)}}$

A6.3	Ausführliche Lösung	
	c)	Achsenschnittpunkte von $f(x)=\frac{1}{10}x^4-\frac{9}{5}x^2+\frac{81}{10}$ $P_y: f(0)=\frac{81}{10}\Rightarrow\underline{\underline{P_y\left(0\mid\frac{81}{10}\right)}}$ bzw. $P_y(0\mid8{,}1)$ Nullstellen $f(x)=0\Leftrightarrow\frac{1}{10}x^4-\frac{9}{5}x^2+\frac{81}{10}=0$ Substitution: $x^2=z$ $\Leftrightarrow\frac{1}{10}z^2-\frac{9}{5}z+\frac{81}{10}=0\mid\cdot10$ $\Leftrightarrow z^2-18z+81=0$ $p=-18\ ;\ q=81\Rightarrow D=\left(\frac{p}{2}\right)^2-q=81-81=0$ $z_{1/2}=-\frac{p}{2}\pm\sqrt{D}$ | $z_1=9\Rightarrow x^2=9\Rightarrow x_{1/2}=\pm3$ $z_2=9\Rightarrow x^2=9\Rightarrow x_{3/4}=\pm3$ $\underline{\underline{P_{x1/3}(3\mid0)\ ;\ P_{x2/4}(-3\mid0)}}$ Beides sind doppelte Nullstellen. Das bedeutet, der Graph berührt an diesen Stellen die x- Achse. Solche Berührungspunkte sind immer auch Punkte mit waagerechter Tangente.

A6.3	Ausführliche Lösung

d)

$$f(x) = \frac{1}{10}x^4 - \frac{9}{5}x^2 + \frac{81}{10}$$

$$x = 1 \Rightarrow f(1) = \frac{1}{10}\cdot 1^4 - \frac{9}{5}\cdot 1^2 + \frac{81}{10} = 6{,}4$$

$$x = -1 \Rightarrow f(-1) = f(1) = 6{,}4 \text{ wegen Achsensymmetrie}$$

$$x = 2 \Rightarrow f(2) = \frac{1}{10}\cdot 2^4 - \frac{9}{5}\cdot 2^2 + \frac{81}{10} = 2{,}5$$

$$x = -2 \Rightarrow f(-2) = f(2) = 2{,}5 \text{ wegen Achsensymmetrie}$$

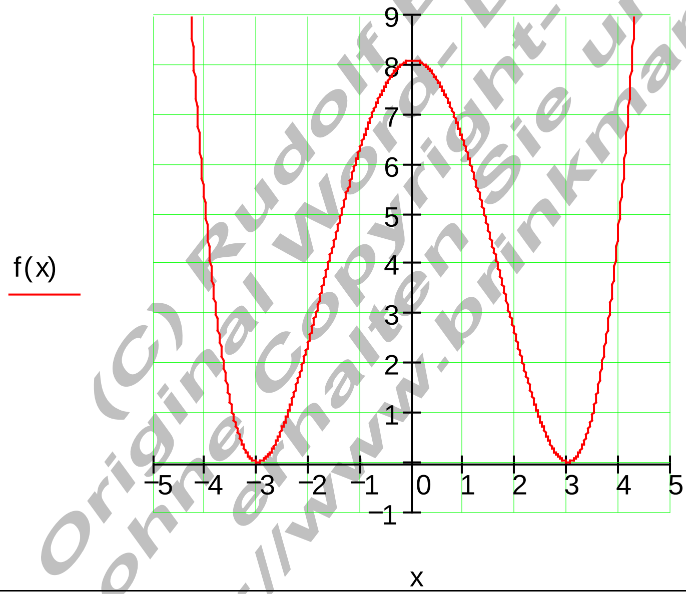
$$x = 4 \Rightarrow f(4) = \frac{1}{10}\cdot 4^4 - \frac{9}{5}\cdot 4^2 + \frac{81}{10} = 4{,}9$$

$$x = -4 \Rightarrow f(-4) = f(4) = 4{,}9 \text{ wegen Achsensymmetrie}$$

x	–4	–3	–2	–1	0	1	2	3	4
f(x)	4,9	0	2,5	6,4	8,1	6,4	2,5	0	4,9

A6.3	Ausführliche Lösung

d)



A6.4	Ausführliche Lösung

a)

$$f(x) = \frac{1}{5}x^4 - \frac{4}{5}x^3 \Rightarrow \text{Es liegt keine Symmetrie vor,}$$

da es weder nur gerade Exponenten oder nur ungerade Exponenten gibt.

A6.4	Ausführliche Lösung

b)

$$f(x)=\frac{1}{5}x^4-\frac{4}{5}x^3 \Rightarrow f'(x)=\frac{4}{5}x^3-\frac{12}{5}x^2$$

Punkte mit waagerechter Tangente.

$$f'(x)=0 \Leftrightarrow \frac{4}{5}x^3-\frac{12}{5}x^2=0$$

$$\Leftrightarrow x^2\left(\frac{4}{5}x-\frac{12}{5}\right)=0 \Rightarrow x_{1/2}=0$$

$$\frac{4}{5}x-\frac{12}{5}=0 \mid +\frac{12}{5}$$

$$\Leftrightarrow \frac{4}{5}x=\frac{12}{5} \mid : \frac{4}{5}$$

$$\Leftrightarrow x=3 \Rightarrow x_3=3$$

An den Stellen $x_{1/2}=0$ und $x_3=3$ gibt es waagerechte Tangenten.

Berechnung der y – Koordinaten

$$f(x_1)=f(x_2)=f(0)=0 \qquad \Rightarrow \underline{\underline{P_{1/2}(0\mid 0)}}$$

$$f(x_3)=f(3)=\frac{1}{5}\cdot 3^4-\frac{4}{5}\cdot 3^3=-5{,}4 \Rightarrow \underline{\underline{P_3(3\mid -5{,}4)}}$$

A6.4	Ausführliche Lösung

c)

Achsenschnittpunkte von $f(x)=\frac{1}{5}x^4-\frac{4}{5}x^3$

$$P_y: f(0)=0 \Rightarrow \underline{\underline{P_y(0\mid 0)}}$$

Nullstellen

$$f(x)=0 \Leftrightarrow \frac{1}{5}x^4-\frac{4}{5}x^3=0$$

$$\Leftrightarrow x^3\left(\frac{1}{5}x-\frac{4}{5}\right)=0 \Rightarrow x_{1/2/3}=0$$

$$\frac{1}{5}x-\frac{4}{5}=0 \mid +\frac{4}{5}$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{5}x=\frac{4}{5} \mid \cdot 5$$

$$\Leftrightarrow x=4 \Rightarrow x_4=4$$

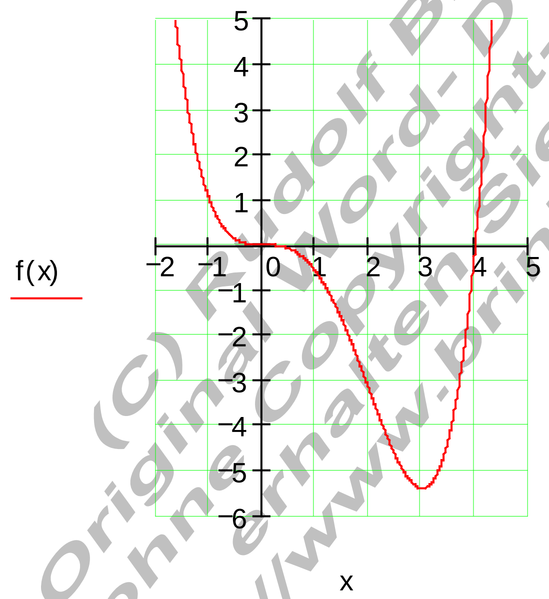
$$\underline{\underline{P_{x1/2/3}(0\mid 0);\ P_{x4}(4\mid 0)}}$$

A6.4	Ausführliche Lösung
	d) $f(x)=\frac{1}{5}x^4-\frac{4}{5}x^3$ $x=1\Rightarrow f(1)=\frac{1}{5}\cdot 1^4-\frac{4}{5}\cdot 1^3=-0,6$ $x=-1\Rightarrow f(-1)=\frac{1}{5}\cdot(-1)^4-\frac{4}{5}\cdot(-1)^3=1$ $x=2\Rightarrow f(2)=\frac{1}{5}\cdot 2^4-\frac{4}{5}\cdot 2^3=-3,2$ $x=-2\Rightarrow f(-2)=\frac{1}{5}\cdot(-2)^4-\frac{4}{5}\cdot(-2)^3=9,6$ $x=5\Rightarrow f(5)=\frac{1}{5}\cdot 5^4-\frac{4}{5}\cdot 5^3=25$

x	−2	−1	0	1	2	3	4	5
f(x)	9,6	1	0	−0,6	−3,2	−5,4	0	25

A6.4	Ausführliche Lösung

d)



Bemerkung:

An der Stelle x = 0 hat der Graph von f(x) zwar eine waagerechte Tangente, es liegt dort aber weder ein Hochpunkt, noch ein Tiefpunkt vor.

Das bedeutet, Stellen mit waagerechten Tangenten müssen nicht zwangsläufig Extrempunkte sein. Aber Extrempunkte haben immer waagerechte Tangenten.

A7	Ausführliche Lösung
a)	Der Graph von f(x) ist symmetrisch zur y – Achse, da nur gerade Exponenten auftreten.

A7 Ausführliche Lösung

b)

$$f(x)=\frac{1}{32}x^4-\frac{3}{4}x^2+\frac{9}{2}\Rightarrow f'(x)=\frac{1}{8}x^3-\frac{3}{2}x\Rightarrow f''(x)=\frac{3}{8}x^2-\frac{3}{2}$$

$$f'(x)=0\Leftrightarrow\frac{1}{8}x^3-\frac{3}{2}x=0\Leftrightarrow x\left(\frac{1}{8}x^2-\frac{3}{2}\right)=0\Rightarrow x_1=0$$

$$\frac{1}{8}x^2-\frac{3}{2}=0\Leftrightarrow\frac{1}{8}x^2=\frac{3}{2}\Leftrightarrow x^2=12\Leftrightarrow x_{2/3}=\pm\sqrt{12}$$

$x_1=0$ und $x_{2/3}=\pm\sqrt{12}$ sind Stellen mit waagerechter Tangente.

$$f''(x_1)=f''(0)=-\frac{3}{2}<0\Rightarrow \text{rel. Max. bei } x_1=0$$

$$f''(x_{2/3})=f''\left(\pm\sqrt{12}\right)=\frac{3}{8}\cdot 12-\frac{3}{2}=\frac{36}{8}-\frac{3}{2}=3>0\Rightarrow \text{rel. Min. bei } x_{2/3}=\pm\sqrt{12}$$

$$f(x_1)=f(0)=\frac{9}{2}\qquad f(x_{2/3})=\frac{1}{32}\cdot 144-\frac{3}{4}\cdot 12+\frac{9}{2}=0$$

$$P_{max}(0\,|\,4{,}5)\qquad P_{min1}\left(-\sqrt{12}\approx-3{,}46\,|\,0\right)\qquad P_{min2}\left(\sqrt{12}\approx 3{,}46\,|\,0\right)$$

A7 Ausführliche Lösung

c)

$$f(x)=\frac{1}{32}x^4-\frac{3}{4}x^2+\frac{9}{2}\Rightarrow f'(x)=\frac{1}{8}x^3-\frac{3}{2}x\Rightarrow f''(x)=\frac{3}{8}x^2-\frac{3}{2}\Rightarrow f'''(x)=\frac{3}{4}x$$

$$f''(x)=0\Leftrightarrow\frac{3}{8}x^2-\frac{3}{2}=0\Leftrightarrow\frac{3}{8}x^2=\frac{3}{2}\Leftrightarrow x^2=4\Leftrightarrow x_{1/2}=\pm 2$$

$x_{1/2}=\pm 2$ sind mögliche Wendestellen.

$$f'''(x_{1/2})=f'''(\pm 2)=\frac{3}{4}\cdot(\pm 2)\neq 0\Rightarrow \text{Wendestellen bei } x_{1/2}=\pm 2$$

$$f(x_{1/2})=f(\pm 2)=\frac{1}{32}\cdot 16-\frac{3}{4}\cdot 4+\frac{9}{2}=\frac{1}{2}-3+\frac{9}{2}=2$$

$P_{W1}(-2\,|\,2)$ $P_{W2}(2\,|\,2)$ sind die Wendepunkte.

Wendetangenten:

$$x_0=-2\Rightarrow f(x_0)=f(-2)=2\qquad f'(x_0)=f'(-2)=-\frac{1}{8}\cdot 8+\frac{3}{2}\cdot 2=2$$

$$t_1(x)=2(x+2)+2=\underline{\underline{2x+6}}$$

$$x_0=2\Rightarrow f(x_0)=f(2)=2\qquad f'(x_0)=f'(2)=\frac{1}{8}\cdot 8-\frac{3}{2}\cdot 2=-2$$

$$t_2(x)=-2(x-2)+2=\underline{\underline{-2x+6}}$$

A7 Ausführliche Lösung

d)

$$f(0)=\frac{9}{2}\Rightarrow \underline{\underline{P_y\left(0\,|\,\frac{9}{2}\right)}}$$

$$f(x)=0\Leftrightarrow \frac{1}{32}x^4-\frac{3}{4}x^2+\frac{9}{2}=0 \text{ (biquadratische Gleichung)}$$

$$x^2=z\Rightarrow \frac{1}{32}z^2-\frac{3}{4}z+\frac{9}{2}=0|\cdot 32\Leftrightarrow z^2-24z+144=0$$

$$p=-24\qquad q=144\qquad \Rightarrow D=144-144=0\Rightarrow \sqrt{D}=\sqrt{0}=0$$

$$z_{1/2}=-\frac{p}{2}\pm\sqrt{D}=12\pm 0=12$$

$$z_1=x^2\Leftrightarrow 12=x^2\Leftrightarrow x_{1/2}=\pm\sqrt{12}\qquad z_2=x^2\Leftrightarrow 12=x^2\Leftrightarrow x_{3/4}=\pm\sqrt{12}$$

$$\underline{\underline{P_{x1/3}\left(\sqrt{12}\approx 3,46\,|\,0\right)}}\qquad \underline{\underline{P_{x1/3}\left(-\sqrt{12}\approx -3,46\,|\,0\right)}}$$

A7 Ausführliche Lösung

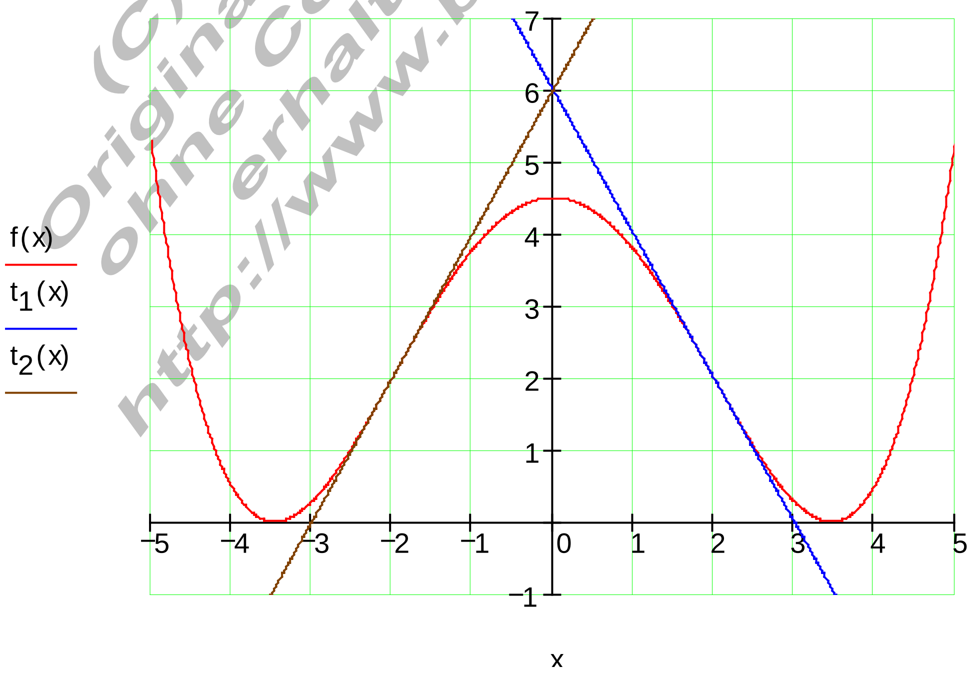
e) Funktionswerte wurden mit dem Taschenrechner berechnet.
Aus Symmetriegründen reicht es, nur die Funktionswerte für positive x-Werte zu berechnen.

x	-5	-4	$-\sqrt{12}\approx -3,46$	-3	-2	-1	0
$f(x)$	5,28	0,5	0	0,28	2	3,78	4,5

x	1	2	3	$\sqrt{12}\approx 3,46$	4	5
$f(x)$	3,78	2	0,28	0	0,5	5,28

A7 Ausführliche Lösung

f)



A8	Ausführliche Lösung	
	a)	$f(x)=-\frac{1}{288}x^3+\frac{1}{16}x^2 \Rightarrow f'(x)=-\frac{1}{96}x^2+\frac{1}{8}x$ Maximale Höhe des Balls entspricht dem Hochpunkt der Flugbahn, also ist ein Punkt mit waagerechter Tangente. $f'(x)=0 \Leftrightarrow -\frac{1}{96}x^2+\frac{1}{8}x=0$ $\Leftrightarrow x\left(-\frac{1}{96}x+\frac{1}{8}\right)=0 \Rightarrow x_1=0$ $-\frac{1}{96}x+\frac{1}{8}=0 \mid +\frac{1}{96}x$ $\Leftrightarrow \frac{1}{8}=\frac{1}{96}x \mid \cdot 96$ $\Leftrightarrow 12=x \Rightarrow x_2=12$ $f(12)=-\frac{1}{288}\cdot 12^3+\frac{1}{16}\cdot 12^2=3 \Rightarrow P(12\mid 3)$ ist Hochpunkt Der Ball erreicht eine maximale Höhe von 3 m und ist dann 12 m vom Abschusspunkt entfernt.

A8	Ausführliche Lösung	
	b)	$f(x)=-\frac{1}{288}x^3+\frac{1}{16}x^2$ Zu bestimmen ist die Nullstelle. $f(x)=0 \Leftrightarrow -\frac{1}{288}x^3+\frac{1}{16}x^2=0$ $\Leftrightarrow x^2\left(-\frac{1}{288}x+\frac{1}{16}\right)=0 \Rightarrow x_{1/2}=0$ $-\frac{1}{288}x+\frac{1}{16}=0 \mid +\frac{1}{288}x$ $\Leftrightarrow \frac{1}{16}=\frac{1}{288}x \mid \cdot 288$ $\Leftrightarrow \frac{288}{16}=x \Rightarrow x_3=18$ Der Ball kommt in einer Entfernung von 18 m vom Abschusspunkt wieder auf den Boden.

A8	Ausführliche Lösung	
	c)	$f(x)=-\frac{1}{288}x^3+\frac{1}{16}x^2$ Gesucht ist die Ballhöhe in einer Entfernung von 9 m vom Abschusspunkt. $f(9)=-\frac{1}{288}\cdot 9^3+\frac{1}{16}\cdot 9^2 \approx 2{,}53$ Der Ball überfliegt die 2 m hohe Abwehrmauer in einer Höhe von etwa 2,53 m.

A8	Ausführliche Lösung	
	d)	$f(x) = -\frac{1}{288}x^3 + \frac{1}{16}x^2$ Gesucht ist die Stelle, an der der Ball eine Flughöhe von 2 m hat. $f(x) = 2 \Leftrightarrow -\frac{1}{288}x^3 + \frac{1}{16}x^2 = 2$ Lösung durch probieren. $f(15) \approx 2{,}344$ $f(15{,}5) \approx 2{,}086$ $f(15{,}6) \approx 2{,}028$ $\boxed{f(15{,}65) \approx 1{,}998}$ Der Freistoß wurde in einer Entfernung von etwa 15,65 m von der Torlinie ausgeführt.