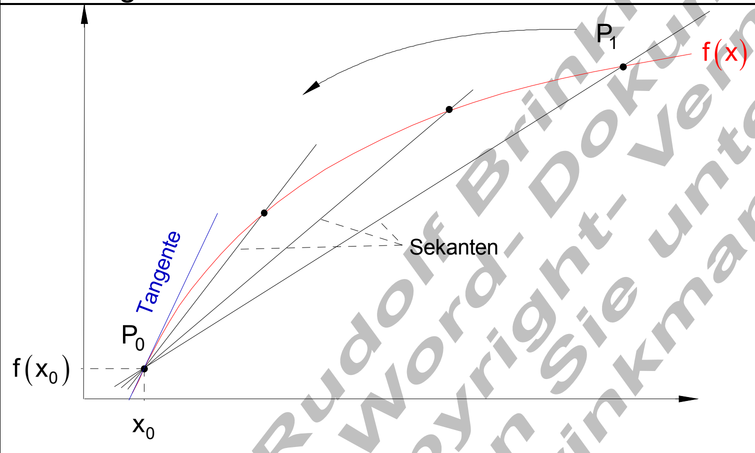
Lösungen Differenzialrechnung zur Vorbereitung der Klassenarbeit IV

Ergebnisse:

E1	Ergebnisse	
	a)	$f(x)=\frac{1}{2}x^2+2x-2$
	b)	rel. Min = Scheitelpunkt: $P_{Min}(-2\mid -4)=P_{Sp}(-2\mid -4)$
	c)	$P_{x1}\left(-2+2\cdot\sqrt{2}\approx 0{,}83\mid 0\right)$ $\quad P_{x2}\left(-2-2\cdot\sqrt{2}\approx -4{,}83\mid 0\right)$
	d)	Siehe ausführliche Lösung.

E2	Ergebnisse	
	a)	Die Steigung eines Funktionsgraphen in einem Punkt ist gleich der Steigung der Tangente in diesem Punkt.
	b)	 Bewegt man den Punkt P_1 immer weiter auf P_0 zu, so ändert sich die Sekantensteigung. Je mehr man sich dem Punkt P_0 nähert, desto mehr nähert sich die Sekantensteigung der Tangentensteigung.
	c)	Die erste Ableitung einer Funktion an der Stelle x_0 ist die Steigung der Tangente im Punkt P (x_0 | $f(x_0)$) und somit auch die Steigung des Graphen von f(x) in diesem Punkt.
	d)	Die Ableitungsfunktion f'(x) heißt deshalb Steigungsfunktion, weil sie in jedem Punkt die Steigung von f(x) repräsentiert.

E3	Ergebnisse	
	a)	$f'(x)=3 \quad f''(x)=0 \quad f'''(x)=0$
	b)	$f'(x)=15x^2-3 \quad f''(x)=30x \quad f'''(x)=30$
	c)	$f'(x)=9x^2+4x+1 \quad f''(x)=18x+4 \quad f'''(x)=18$
	d)	$f'(x)=-4x^3+2 \quad f''(x)=-12x^2 \quad f'''(x)=-24x$
	e)	$f'(x)=4x^3-9 \quad f''(x)=12x^2 \quad f'''(x)=24x$
	f)	$f'(x)=12x^2-4x+5 \quad f''(x)=24x-4 \quad f'''(x)=24$

E4.1	Ergebnisse	
	a)	Punktsymmetrie, da nur ungerade Exponenten vorkommen
	b)	Punkte mit waagerechter Tangente: $P_1(1 \mid -4)\,;\,P_2(-1 \mid 4)$
	c)	Achsenschnittpunkte: $P_y(0 \mid 0)\,;\,P_{x1}(0 \mid 0)\,;\,P_{x2}\left(\sqrt{3} \approx 1{,}73 \mid 0\right)\,;\,P_{x3}\left(-\sqrt{3} \approx -1{,}73 \mid 0\right)$
	d)	Siehe ausführliche Lösungen

E4.2	Ergebnisse	
	a)	Keine Symmetrie
	b)	Punkte mit waagerechter Tangente: $P_1(0 \mid -4)\,;\,P_2(-2 \mid 4)$
	c)	Achsenschnittpunkte: $P_y(0 \mid -4)\,;\,P_{x1}(-1 \mid 0)\,;\,P_{x2}\left(-1+\sqrt{3} \approx 0{,}73 \mid 0\right)\,;\,P_{x3}\left(-1-\sqrt{3} \approx -2{,}73 \mid 0\right)$
	d)	Siehe ausführliche Lösungen

E4.3	Ergebnisse	
	a)	Achsensymmetrie, da nur gerade Exponenten vorkommen
	b)	Punkte mit waagerechter Tangente: $P_1\left(0 \,\middle|\, \frac{81}{10} = 8{,}1\right);\,P_2(3 \mid 0)\,;\,P_3(-3 \mid 0)$
	c)	Achsenschnittpunkte: $P_y\left(0 \,\middle|\, \frac{81}{10} = 8{,}1\right);\,P_{x1/3}(3 \mid 0)\,;\,P_{x2/4}(-3 \mid 0)$
	d)	Siehe ausführliche Lösungen

E4.4	Ergebnisse	
	a)	Keine Symmetrie
	b)	Punkte mit waagerechter Tangente: $P_{1/2}(0 \mid 0)\,;\,P_3\left(3 \,\middle|\, -\frac{27}{5} = -5{,}4\right)$
	c)	Achsenschnittpunkte: $P_y(0 \mid 0)\,;\,P_{x1/2/3}(0 \mid 0)\,;\,P_{x4}(4 \mid 0)$
	d)	Siehe ausführliche Lösungen

E5 Ergebnisse

a) $f'(x) = 3x^2 + 2x - 4$

b) $f''(x) = 6x + 2$

c)

x	–3	–2,5	–2	–1,5	–1	–0,5	0	0,5	1	1,5	2
f(x)	–7	–0,38	3	3,88	3	1,13	–1	–2,63	–3	–1,38	3
f'(x)	17	9,75	4	–0,25	–3	–4,25	–4	–2,25	1	5,75	12
f''(x)	–16	–13	–10	–7	–4	–1	2	5	8	11	14

d) Siehe ausführliche Lösung

Ausführliche Lösungen:

A1	**Aufgabe**	
	Parabel durch 3 Punkte.	
	a)	Bestimmen Sie die Funktionsgleichung f(x) der Parabel, die durch folgende Punkte verläuft: $P_1(-4\,|\,-2)\qquad P_2(-2\,|\,-4)\qquad P_3(2\,|\,4)$
	b)	Bestimmen Sie die Koordinaten des Scheitelpunktes.
	c)	Berechnen Sie die Achsenschnittpunkte von f(x).
	d)	Zeichnen Sie die Graphen von f(x) und f'(x) in ein Koordinatensystem.

A1 Ausführliche Lösung

a)

$P_1(-4\,|\,-2): f(-4) = 16a_2 - 4a_1 + 1a_0 = -2$

$P_2(-2\,|\,-4): f(-2) = 4a_2 - 2a_1 + 1a_0 = -4$

$P_2(2\,|\,4): f(2) = 4a_2 + 2a_1 + 1a_0 = 4$

$$\begin{array}{ccc|c}
a_0 & a_1 & a_2 & \\
\hline
1 & -4 & 16 & -2 \\
1 & -2 & 4 & -4 \;\; \text{II}-\text{I} \\
1 & 2 & 4 & 4 \;\; \text{III}-\text{I} \\
\hline
1 & -4 & 16 & -2 \\
0 & 2 & -12 & -2\,|:2 \\
0 & 6 & -12 & 6\,|:(-6) \\
\hline
1 & -4 & 16 & -2 \\
0 & 1 & -6 & -1 \\
0 & -1 & 2 & -1 \;\; \text{III}+\text{II} \\
\hline
1 & -4 & 16 & -2 \\
0 & 1 & -6 & -1 \\
0 & 0 & -4 & -2
\end{array}$$

$-4a_2 = -2\,|:(-4)$

$\Leftrightarrow \boxed{a_2 = \frac{1}{2}}$

$a_1 - 6a_2 = -1 \Leftrightarrow a_1 - 6\cdot\frac{1}{2} = -1$

$\Leftrightarrow a_1 - 3 = -1 \Leftrightarrow \boxed{a_1 = 2}$

$a_0 - 4a_1 + 16a_2 = -2 \Leftrightarrow a_0 - 4\cdot 2 + 16\cdot\frac{1}{2} = -2$

$\Leftrightarrow a_0 - 8 + 8 = -2 \Leftrightarrow \boxed{a_0 = -2}$

$$f(x) = \frac{1}{2}x^2 + 2x - 2$$

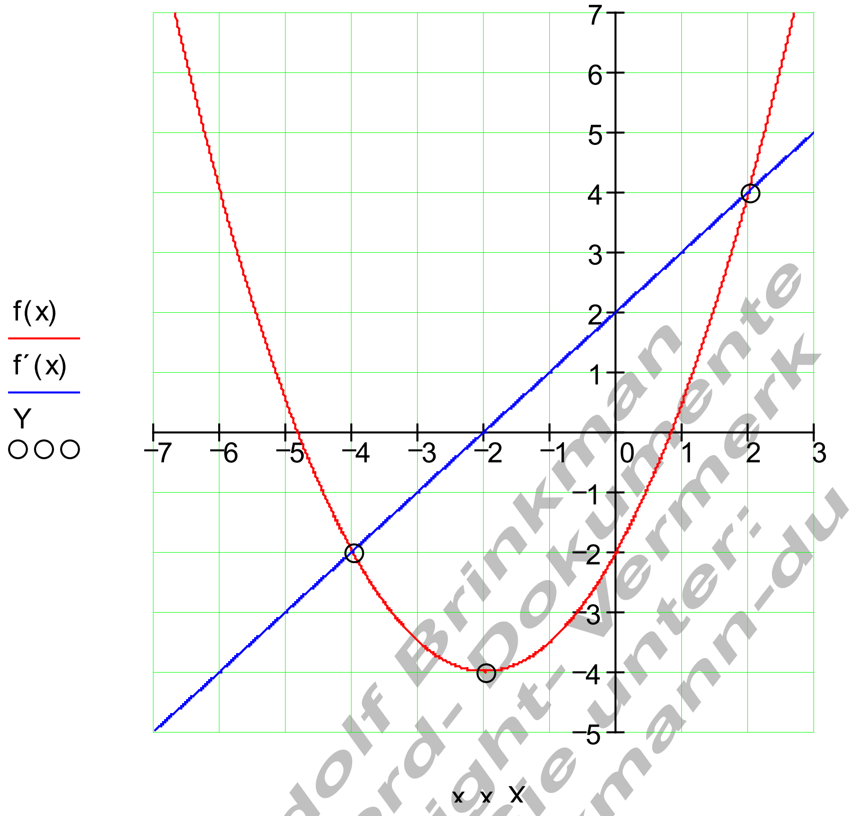
$P_1(-4\,|\,-2): f(-4) = \frac{1}{2}\cdot(-4)^2 + 2\cdot(-4) - 2 = 8 - 8 - 2 = -2$

$P_2(-2\,|\,-4): f(-2) = \frac{1}{2}\cdot(-2)^2 + 2\cdot(-2) - 2 = 2 - 4 - 2 = -4$

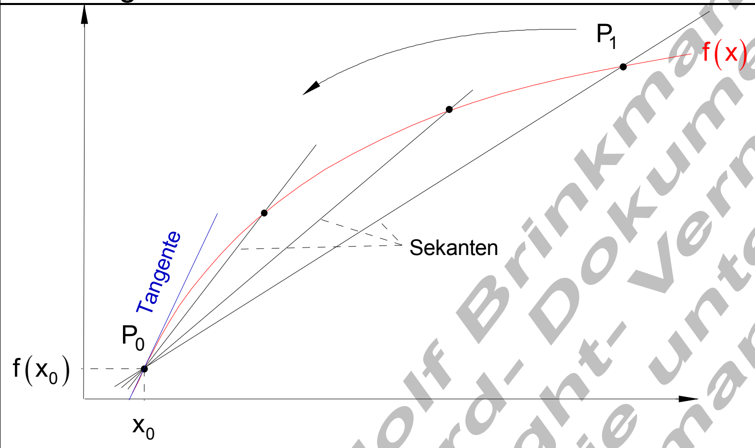
$P_3(2\,|\,4): f(2) = \frac{1}{2}\cdot 2^2 + 2\cdot 2 - 2 = 2 + 4 - 2 = 4$

A1	Ausführliche Lösung	
	b)	Der Scheitelpunkt der Parabel ist ein Extrempunkt. $f(x)=\frac{1}{2}x^2+2x-2 \quad \Rightarrow f'(x)=x+2 \quad \Rightarrow f''(x)=1$ $f'(x)=0 \Leftrightarrow x+2=0 \Leftrightarrow x=-2$ ist mögliche Extremstelle. $f''(x)=f''(-2)=1>0 \Rightarrow$ rel. Min bei $x=-2$ $f(-2)=\frac{1}{2}\cdot 4-4-2=2-4-2=-4$ rel. Min = Scheitelpunkt: $P_{Min}(-2\,\vert\,-4)=\underline{\underline{P_{Sp}(-2\,\vert\,-4)}}$

A1	Ausführliche Lösung	
	c)	$f(x)=\frac{1}{2}x^2+2x-2 \qquad f(0)=-2 \Rightarrow \underline{\underline{P_y(0\,\vert\,-2)}}$ $f(x)=0 \Leftrightarrow \frac{1}{2}x^2+2x-2=0$ $f(x)=0 \Leftrightarrow x^2+4x-4=0$ Normalform der quadratischen Gleichung $p=4;q=-4 \Rightarrow D=\left(\frac{p}{2}\right)^2-q=4+4=8 \Rightarrow \sqrt{D}=\sqrt{8}=2\cdot\sqrt{2}$ $x_{1/2}=-\frac{p}{2}\pm\sqrt{D} \;\Big\vert\; x_1=-2+2\cdot\sqrt{2}\approx 0{,}83 \Rightarrow \underline{\underline{P_{x1}\left(-2+2\cdot\sqrt{2}\approx 0{,}83\,\vert\,0\right)}}$ $x_2=-2-2\cdot\sqrt{2}\approx -4{,}83 \Rightarrow \underline{\underline{P_{x2}\left(-2-2\cdot\sqrt{2}\approx -4{,}83\,\vert\,0\right)}}$

A1	Ausführliche Lösung	
	d)	

A2	**Aufgabe**	
	Theoriefragen.	
	a)	Was verstehen Sie unter der Steigung eines Funktionsgraphen in einem Punkt?
	b)	Beschreiben Sie anschaulich (Skizze) und mit Worten, wie man bei einem Graphen von der Sekantensteigung zur Tangentensteigung gelangt.
	c)	Welche Bedeutung hat die erste Ableitung einer Funktion an der Stelle x_0?
	d)	Warum nennt man die Ableitungsfunktion auch Steigungsfunktion?

A2	Ausführliche Lösungen		
	a)	Die Steigung eines Funktionsgraphen in einem Punkt ist gleich der Steigung der Tangente in diesem Punkt.	
	b)		Bewegt man den Punkt P_1 immer weiter auf P_0 zu, so ändert sich die Sekantensteigung. Je mehr man sich dem Punkt P_0 nähert, desto mehr nähert sich die Sekantensteigung der Tangentensteigung.
	c)	Die erste Ableitung einer Funktion an der Stelle x_0 ist die Steigung der Tangente im Punkt $P(x_0 \mid f(x_0))$ und somit auch die Steigung des Graphen von f(x) in diesem Punkt.	
	d)	Die Ableitungsfunktion f'(x) heißt deshalb Steigungsfunktion, weil sie in jedem Punkt die Steigung von f(x) repräsentiert.	

A3	**Aufgabe**			
	Leiten Sie folgende Funktionen 3 mal ab.			
	a)	$f(x)=3x+4$	b)	$f(x)=2x-4+x^3-5x+4x^3$
	c)	$f(x)=3x^3+2x^2+x+1$	d)	$f(x)=x-x^4+3+x$
	e)	$f(x)=1-2x-3x-4x+x^4$	f)	$f(x)=4x^3-2x^2+5x-2$

E3	Ausführliche Lösungen	
	a)	$f(x)=3x+4=f(x)=3x^1+4\Rightarrow f'(x)=3\cdot 1\cdot x^0+0=3$ $f'(x)=3 \qquad f''(x)=0 \qquad f'''(x)=0$
	b)	$f(x)=2x-4+x^3-5x+4x^3=5x^3-3x-4=5x^3-3x^1-4$ $\Rightarrow f'(x)=5\cdot 3\cdot x^2-3\cdot 1\cdot x^0-0$ $\Rightarrow f'(x)=15x^2-3\Rightarrow f''(x)=30x\Rightarrow f'''(x)=30$
	c)	$f(x)=3x^3+2x^2+x+1=3x^3+2x^2+x^1+1$ $\Rightarrow f'(x)=3\cdot 3\cdot x^2+2\cdot 2\cdot x^1+1\cdot x^0+0$ $\Rightarrow f'(x)=9x^2+4x+1\Rightarrow f''(x)=18x+4\Rightarrow f'''(x)=18$
	d)	$f(x)=x-x^4+3+x=-x^4+2x^1+3$ $\Rightarrow f'(x)=-4\cdot x^3+2\cdot 1\cdot x^0+0$ $\Rightarrow f'(x)=-4x^3+2\Rightarrow f''(x)=-12x^2\Rightarrow f'''(x)=-24x$
	e)	$f(x)=1-2x-3x-4x+x^4=x^4-9x^1+1$ $\Rightarrow f'(x)=4\cdot x^3-9\cdot 1\cdot x^0+0$ $\Rightarrow f'(x)=4x^3-9\Rightarrow f''(x)=12x^2\Rightarrow f'''(x)=24x$
	f)	$f(x)=4x^3-2x^2+5x-2=4x^3-2x^2+5x^1-2$ $\Rightarrow f'(x)=4\cdot 3\cdot x^2-2\cdot 2\cdot x^1+5\cdot 1\cdot x^0-0$ $\Rightarrow f'(x)=12x^2-4x+5\Rightarrow f''(x)=24x-4\Rightarrow f'''(x)=24$

A4.1	**Aufgabe**	
	Gegeben ist folgende Funktion:	$f(x) = 2x^3 - 6x$
	a)	Machen Sie eine Aussage über das Symmetrieverhalten.
	b)	Berechnen Sie die Punkte mit waagerechten Tangenten.
	c)	Bestimmen Sie die Achsenschnittpunkte.
	d)	Berechnen Sie einige Funktionswerte und zeichnen Sie den Graphen.

A4.1 Ausführliche Lösung

a)

$f(x) = 2x^3 - 6x$

$\Rightarrow$ Punktsymmetrie, da nur ungerade Exponenten vorkommen.

Es gilt: $f(-x) = -f(x)$

A4.1 Ausführliche Lösung

b)

$f(x) = 2x^3 - 6x \Rightarrow f'(x) = 6x^2 - 6$

Punkte mit waagerechter Tangente.

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow 6x^2 - 6 = 0 \mid +6$$
$$\Leftrightarrow 6x^2 = 6 \mid :6$$
$$\Leftrightarrow x^2 = 1 \Rightarrow x_1 = 1; x_2 = -1$$

An den Stellen $x_1 = 1$ und $x_2 = -1$ gibt es waagerechte Tangenten.

Berechnung der $y-$Koordinaten

$$f(x_1) = f(1) = 2 \cdot 1^2 - 6 \cdot 1 = -4 \quad \Rightarrow \underline{\underline{P_1(1 \mid -4)}}$$
$$f(x_2) = f(-1) = 2 \cdot (-1)^2 - 6 \cdot (-1) = 4 \Rightarrow \underline{\underline{P_2(-1 \mid 4)}}$$

A4.1 Ausführliche Lösung

c)

Achsenschnittpunkte von $f(x) = 2x^3 - 6x$

$P_y : f(0) = 0 \Rightarrow \underline{\underline{P_y(0 \mid 0)}}$

Nullstellen

$$f(x) = 0 \Leftrightarrow 2x^3 - 6x = 0$$
$$\Leftrightarrow x\left(2x^2 - 6\right) = 0 \Rightarrow x_1 = 0$$
$$2x^2 - 6 = 0 \mid +6$$
$$\Leftrightarrow 2x^2 = 6 \mid :2$$
$$\Leftrightarrow x^2 = 3 \Rightarrow x_{2/3} = \pm\sqrt{3}$$

$$\underline{\underline{P_{x1}(0 \mid 0)\,;\, P_{x2}\left(\sqrt{3} \mid 0\right);\, P_{x3}\left(-\sqrt{3} \mid 0\right)}}$$

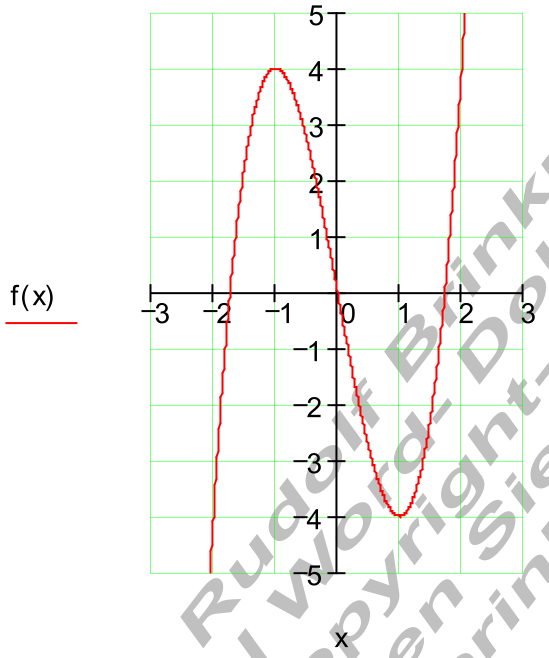
A4.1	Ausführliche Lösung
	d) $f(x) = 2x^3 - 6x$

$x = 2 \quad \Rightarrow f(2) = 2 \cdot 2^3 - 6 \cdot 2 = 4$

$x = -2 \Rightarrow f(-2) = -f(2) = -4$ wegen Punktsymmetrie

x	−2	−1,73	−1	0	1	1,73	2
f(x)	−4	0	4	0	−4	0	4

A4.1	Ausführliche Lösung
	d)



A4.2	**Aufgabe**	
	Gegeben ist folgende Funktion:	$f(x) = 2x^3 + 6x^2 - 4$
	a) Machen Sie eine Aussage über das Symmetrieverhalten.	
	b) Berechnen Sie die Punkte mit waagerechten Tangenten.	
	c) Bestimmen Sie die Achsenschnittpunkte.	
	d) Berechnen Sie einige Funktionswerte und zeichnen Sie den Graphen.	

A4.2	Ausführliche Lösung
	a) $f(x) = 2x^3 + 6x^2 - 4 \Rightarrow$ Es liegt keine Symmetrie vor,

da es weder nur gerade Exponenten oder nur ungerade Exponenten gibt.

A4.2	Ausführliche Lösung	
	b)	$f(x)=2x^3+6x^2-4 \Rightarrow f'(x)=6x^2+12x$ Punkte mit waagerechter Tangente. $f'(x)=0 \Leftrightarrow 6x^2+12x=0$ $\Leftrightarrow x(6x+12)=0 \Rightarrow x_1=0$ $6x+12=0 \mid -12$ $\Leftrightarrow 6x=-12 \mid :6$ $\Leftrightarrow x_2=-2$ An den Stellen $x_1=0$ und $x_2=-2$ gibt es waagerechte Tangenten. Berechnung der $y-$Koordinaten $f(x_1)=f(0)=-4 \quad \Rightarrow \underline{\underline{P_1(0 \mid -4)}}$ $f(x_2)=f(-2)=2(-2)^3+6(-2)^2-4=4 \Rightarrow \underline{\underline{P_2(-2 \mid 4)}}$

A4.2	Ausführliche Lösung	
	c)	Achsenschnittpunkte von $f(x)=2x^3+6x^2-4$ $P_y: f(0)=-4 \Rightarrow \underline{\underline{P_y(0 \mid -4)}}$ Nullstellen $f(x)=0 \Leftrightarrow 2x^3+6x^2-4=0$ Eine Nullstelle wird durch probieren gefunden $x=1 \Rightarrow f(1)=2\cdot 1^3+6\cdot 1^2-4=4$ $x=-1 \Rightarrow f(-1)=2\cdot(-1)^3+6\cdot(-1)^2-4=0$ Nullstelle bei $x_1=-1$ Polynomreduzierung durch Horner-Schema $\begin{array}{cccccc} & & 2 & 6 & 0 & -4 \\ x=-1 & & \downarrow & \underline{-2} & \underline{-4} & \underline{4} \\ & & 2 & 4 & -4 & 0 \end{array}$ Reduziertes Polynom: $2x^2+4x-4=0 \mid :2$ $\Leftrightarrow x^2+2x-2=0$ $p=2\,;\, q=-2 \Rightarrow D=\left(\frac{p}{2}\right)^2-q=1+2=3 \Rightarrow \sqrt{D}=\sqrt{3}$ $x_{2/3}=-\frac{p}{2}\pm\sqrt{D} \quad \left\vert \begin{array}{l} x_2=-1+\sqrt{3} \\ x_3=-1-\sqrt{3} \end{array} \right.$ $\underline{\underline{P_{x1}(-1 \mid 0)\,;\, P_{x2}\left(-1+\sqrt{3} \mid 0\right)\,;\, P_{x3}\left(-1-\sqrt{3} \mid 0\right)}}$ bzw. $P_{x1}(-1 \mid 0)\,;\, P_{x2}(0{,}73 \mid 0)\,;\, P_{x3}(-2{,}73 \mid 0)$

A4.2 Ausführliche Lösung

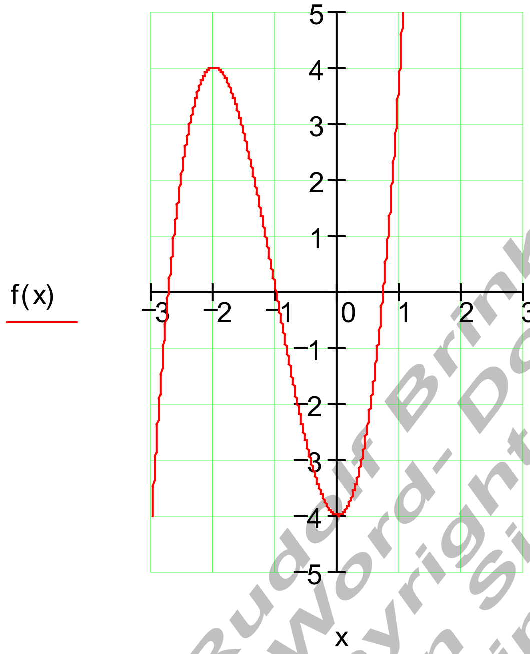
d) $f(x) = 2x^3 + 6x^2 - 4$

$x = -3 \Rightarrow f(-3) = 2\cdot(-3)^3 + 6\cdot(-3)^2 - 4 = -4$

x	−3	−2,73	−2	−1	0	0,73	1
f(x)	−4	0	4	0	−4	0	4

A4.2 Ausführliche Lösung

d)



A4.3 Aufgabe

Gegeben ist folgende Funktion: $f(x) = \frac{1}{10}x^4 - \frac{9}{5}x^2 + \frac{81}{10}$

a) Machen Sie eine Aussage über das Symmetrieverhalten.

b) Berechnen Sie die Punkte mit waagerechten Tangenten.

c) Bestimmen Sie die Achsenschnittpunkte.

d) Berechnen Sie einige Funktionswerte und zeichnen Sie den Graphen.

A4.3 Ausführliche Lösung

a) $f(x) = \frac{1}{10}x^4 - \frac{9}{5}x^2 + \frac{81}{10}$

$\Rightarrow$ Achsensymmetrie, da nur gerade Exponenten vorkommen.

Es gilt: $f(-x) = f(x)$

A4.3 Ausführliche Lösung

b)

$$f(x)=\frac{1}{10}x^4-\frac{9}{5}x^2+\frac{81}{10}\Rightarrow f'(x)=\frac{4}{10}x^3-\frac{18}{5}x$$

Punkte mit waagerechter Tangente.

$$f'(x)=0\Leftrightarrow\frac{4}{10}x^3-\frac{18}{5}x=0$$

$$\Leftrightarrow x\left(\frac{4}{10}x^2-\frac{18}{5}\right)=0\Rightarrow x_1=0$$

$$\frac{4}{10}x^2-\frac{18}{5}=0\,\Big|+\frac{18}{5}$$

$$\Leftrightarrow\frac{4}{10}x^2=\frac{18}{5}\,\Big|:\frac{4}{10}$$

$$\Leftrightarrow x^2=9\Rightarrow x_{2/3}=\pm3$$

An den Stellen $x_1=0$ und $x_2=3$ und $x_3=-3$ gibt es waagerechte Tangenten.

Berechnung der $y-$Koordinaten

$$f(x_1)=f(0)=\frac{81}{10}\qquad\Rightarrow\underline{\underline{P_1\left(0\,|\,\frac{81}{10}\right)}}\text{ bzw. }P_1(0\,|\,8{,}1)$$

$$f(x_2)=f(3)=\frac{1}{10}\cdot3^4-\frac{9}{5}\cdot3^2+\frac{81}{10}=0\Rightarrow\underline{\underline{P_2(3\,|\,0)}}$$

$f(x_2)=f(-3)=f(3)=0$ wegen Achsensymmetrie $\Rightarrow\underline{\underline{P_3(-3\,|\,0)}}$

A4.3	Ausführliche Lösung
c)	Achsenschnittpunkte von $f(x)=\frac{1}{10}x^4-\frac{9}{5}x^2+\frac{81}{10}$

$P_y: f(0)=\frac{81}{10} \Rightarrow \underline{\underline{P_y\left(0 \mid \frac{81}{10}\right)}}$ bzw. $P_y(0 \mid 8,1)$

Nullstellen

$f(x)=0 \Leftrightarrow \frac{1}{10}x^4-\frac{9}{5}x^2+\frac{81}{10}=0$ Substitution: $x^2=z$

$\Leftrightarrow \frac{1}{10}z^2-\frac{9}{5}z+\frac{81}{10}=0 \mid \cdot 10$

$\Leftrightarrow z^2-18z+81=0$

$p=-18\ ;\ q=81 \Rightarrow D=\left(\frac{p}{2}\right)^2-q=81-81=0$

$z_{1/2}=-\frac{p}{2}\pm\sqrt{D}$ | $z_1=9 \Rightarrow x^2=9 \Rightarrow x_{1/2}=\pm 3$
$z_2=9 \Rightarrow x^2=9 \Rightarrow x_{3/4}=\pm 3$

$\underline{\underline{P_{x1/3}(3 \mid 0)\ ;\ P_{x2/4}(-3 \mid 0)}}$ Beides sind doppelte Nullstellen.

Das bedeutet, der Graph berührt an diesen Stellen die x- Achse. Solche Berührungspunkte sind immer auch Punkte mit waagerechter Tangente.

A4.3	Ausführliche Lösung
d)	$f(x)=\frac{1}{10}x^4-\frac{9}{5}x^2+\frac{81}{10}$

$x=1 \Rightarrow f(1)=\frac{1}{10}\cdot 1^4-\frac{9}{5}\cdot 1^2+\frac{81}{10}=6,4$

$x=-1 \Rightarrow f(-1)=f(1)=6,4$ wegen Achsensymmetrie

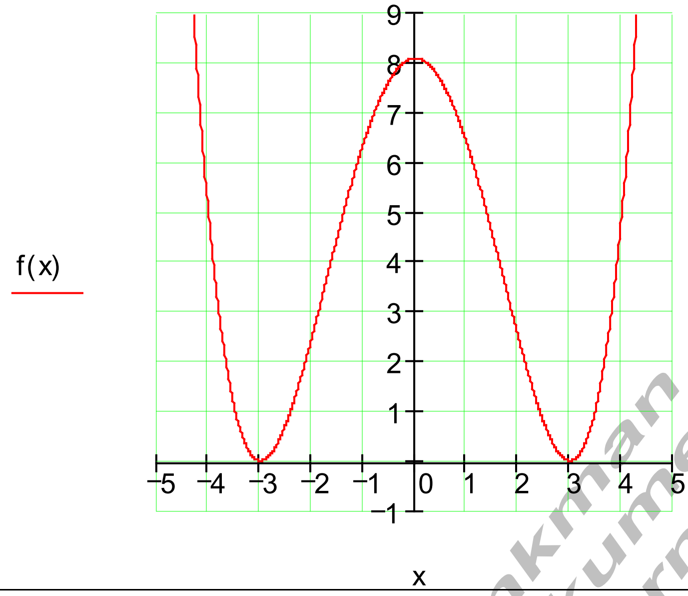
$x=2 \Rightarrow f(2)=\frac{1}{10}\cdot 2^4-\frac{9}{5}\cdot 2^2+\frac{81}{10}=2,5$

$x=-2 \Rightarrow f(-2)=f(2)=2,5$ wegen Achsensymmetrie

$x=4 \Rightarrow f(4)=\frac{1}{10}\cdot 4^4-\frac{9}{5}\cdot 4^2+\frac{81}{10}=4,9$

$x=-4 \Rightarrow f(-4)=f(4)=4,9$ wegen Achsensymmetrie

x	−4	−3	−2	−1	0	1	2	3	4
f(x)	4,9	0	2,5	6,4	8,1	6,4	2,5	0	4,9

A4.3	Ausführliche Lösung	
	d)	

A4.4	**Aufgabe**	
	Gegeben ist folgende Funktion:	$f(x)=\frac{1}{5}x^4-\frac{4}{5}x^3$
	a)	Machen Sie eine Aussage über das Symmetrieverhalten.
	b)	Berechnen Sie die Punkte mit waagerechten Tangenten.
	c)	Bestimmen Sie die Achsenschnittpunkte.
	d)	Berechnen Sie einige Funktionswerte und zeichnen Sie den Graphen.

A4.4	Ausführliche Lösung	
	a)	$f(x)=\frac{1}{5}x^4-\frac{4}{5}x^3 \Rightarrow$ Es liegt keine Symmetrie vor, da es weder nur gerade Exponenten oder nur ungerade Exponenten gibt.

A4.4 Ausführliche Lösung

b)

$$f(x)=\frac{1}{5}x^4-\frac{4}{5}x^3 \Rightarrow f'(x)=\frac{4}{5}x^3-\frac{12}{5}x^2$$

Punkte mit waagerechter Tangente.

$$f'(x)=0 \Leftrightarrow \frac{4}{5}x^3-\frac{12}{5}x^2=0$$

$$\Leftrightarrow x^2\left(\frac{4}{5}x-\frac{12}{5}\right)=0 \Rightarrow x_{1/2}=0$$

$$\frac{4}{5}x-\frac{12}{5}=0\,\Big|+\frac{12}{5}$$

$$\Leftrightarrow \frac{4}{5}x=\frac{12}{5}\,\Big|:\frac{4}{5}$$

$$\Leftrightarrow x=3 \Rightarrow x_3=3$$

An den Stellen $x_{1/2}=0$ und $x_3=3$ gibt es waagerechte Tangenten.

Berechnung der y – Koordinaten

$$f(x_1)=f(x_2)=f(0)=0 \qquad \Rightarrow \underline{\underline{P_{1/2}(0\,|\,0)}}$$

$$f(x_3)=f(3)=\frac{1}{5}\cdot 3^4-\frac{4}{5}\cdot 3^3=-5{,}4 \Rightarrow \underline{\underline{P_3(3\,|\,-5{,}4)}}$$

A4.4 Ausführliche Lösung

c)

Achsenschnittpunkte von $f(x)=\frac{1}{5}x^4-\frac{4}{5}x^3$

$$P_y: f(0)=0 \Rightarrow \underline{\underline{P_y(0\,|\,0)}}$$

Nullstellen

$$f(x)=0 \Leftrightarrow \frac{1}{5}x^4-\frac{4}{5}x^3=0$$

$$\Leftrightarrow x^3\left(\frac{1}{5}x-\frac{4}{5}\right)=0 \Rightarrow x_{1/2/3}=0$$

$$\frac{1}{5}x-\frac{4}{5}=0\,\Big|+\frac{4}{5}$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{5}x=\frac{4}{5}\,\Big|\cdot 5$$

$$\Leftrightarrow x=4 \Rightarrow x_4=4$$

$$\underline{\underline{P_{x1/2/3}(0\,|\,0)\,;\,P_{x4}(4\,|\,0)}}$$

A4.4 Ausführliche Lösung

d)

$$f(x)=\frac{1}{5}x^4-\frac{4}{5}x^3$$

$$x=1\Rightarrow f(1)=\frac{1}{5}\cdot 1^4-\frac{4}{5}\cdot 1^3=-0{,}6$$

$$x=-1\Rightarrow f(-1)=\frac{1}{5}\cdot(-1)^4-\frac{4}{5}\cdot(-1)^3=1$$

$$x=2\Rightarrow f(2)=\frac{1}{5}\cdot 2^4-\frac{4}{5}\cdot 2^3=-3{,}2$$

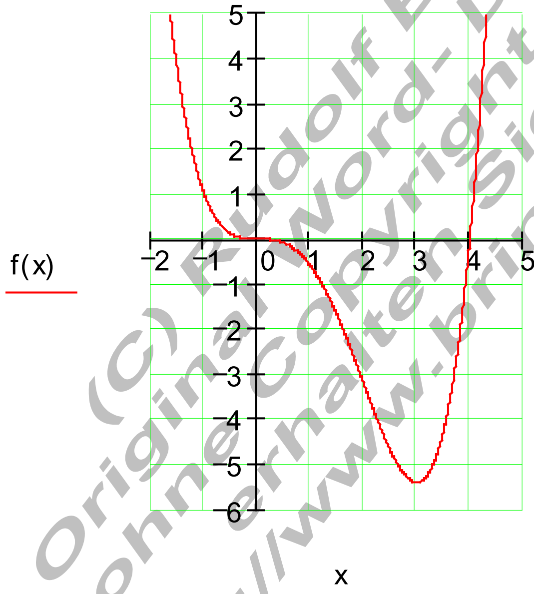
$$x=-2\Rightarrow f(-2)=\frac{1}{5}\cdot(-2)^4-\frac{4}{5}\cdot(-2)^3=9{,}6$$

$$x=5\Rightarrow f(5)=\frac{1}{5}\cdot 5^4-\frac{4}{5}\cdot 5^3=25$$

x	-2	-1	0	1	2	3	4	5
$f(x)$	$9{,}6$	1	0	$-0{,}6$	$-3{,}2$	$-5{,}4$	0	25

A4.4 Ausführliche Lösung

d)



Bemerkung:

An der Stelle x = 0 hat der Graph von f(x) zwar eine waagerechte Tangente, es liegt dort aber weder ein Hochpunkt, noch ein Tiefpunkt vor.

Das bedeutet, Stellen mit waagerechten Tangenten müssen nicht zwangsläufig Extrempunkte sein. Aber Extrempunkte haben immer waagerechte Tangenten.

A5	**Aufgabe**	
	Gegeben ist eine ganzrationale Funktion 3. Grades: $f(x) = x^3 + x^2 - 4x - 1$	
	a)	Bestimmen Sie die Ableitungsfunktion f'(x)
	b)	Leiten Sie die Funktion f'(x) noch mal ab, so dass daraus die Funktion f''(x) entsteht.
	c)	Berechnen Sie die fehlenden Werte der Wertetabelle.
	d)	Zeichnen Sie die Graphen von f(x) ; f'(x) ; und f''(x) in ein geeignetes Koordinatensystem.

Wertetabelle:

x	–3	–2,5	–2	–1,5	–1	–0,5	0	0,5	1	1,5	2
$f(x)$	–7	–0,38		3,88	3	1,13		–2,63	–3	–1,38	3
$f'(x)$	17	9,75	4	–0,25		–4,25	–4	–2,25		5,75	12
$f''(x)$	–16	–13	–10	–7		–1	2		8	11	14

A5	Ausführliche Lösungen
a)	$f'(x) = 3x^2 + 2x - 4$
b)	$f''(x) = 6x + 2$

c)

x	–3	–2,5	–2	–1,5	–1	–0,5	0	0,5	1	1,5	2
$f(x)$	–7	–0,38	3	3,88	3	1,13	–1	–2,63	–3	–1,38	3
$f'(x)$	17	9,75	4	–0,25	–3	–4,25	–4	–2,25	1	5,75	12
$f''(x)$	–16	–13	–10	–7	–4	–1	2	5	8	11	14

A5	Ausführliche Lösung
	d) $f(x) := x^3 + x^2 - 4x - 1$ $\quad f'(x) := 3x^2 + 2x - 4$ $\quad f''(x) := 6x + 2$