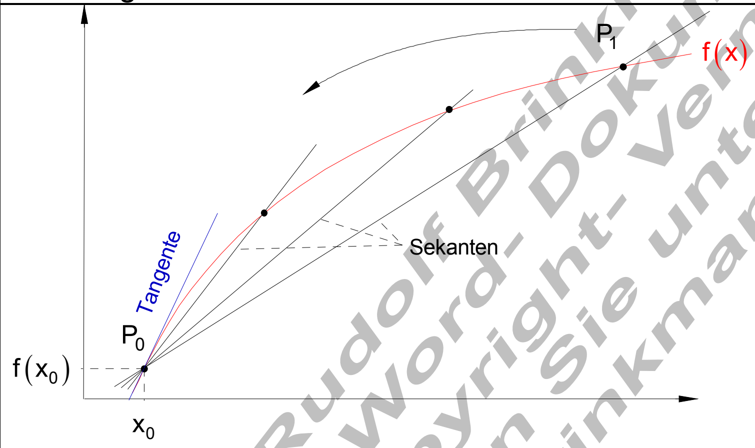
Lösungen Differenzialrechnung zur Vorbereitung der Klassenarbeit IV

Ergebnisse:

E1	Ergebnisse	
	a)	$f(x) = \frac{1}{2}x^2 + 2x - 2$
	b)	rel. Min = Scheitelpunkt: $P_{Min}(-2 \mid -4) = P_{Sp}(-2 \mid -4)$
	c)	$P_{x1}\left(-2 + 2 \cdot \sqrt{2} \approx 0{,}83 \mid 0\right)$ $P_{x2}\left(-2 - 2 \cdot \sqrt{2} \approx -4{,}83 \mid 0\right)$
	d)	Siehe ausführliche Lösung.

E2	Ergebnisse		
	a)	Die Steigung eines Funktionsgraphen in einem Punkt ist gleich der Steigung der Tangente in diesem Punkt.	
	b)		Bewegt man den Punkt P_1 immer weiter auf P_0 zu, so ändert sich die Sekantensteigung. Je mehr man sich dem Punkt P_0 nähert, desto mehr nähert sich die Sekantensteigung der Tangentensteigung.
	c)	Die erste Ableitung einer Funktion an der Stelle x_0 ist die Steigung der Tangente im Punkt P (x_0 | $f(x_0)$) und somit auch die Steigung des Graphen von f(x) in diesem Punkt.	
	d)	Die Ableitungsfunktion f'(x) heißt deshalb Steigungsfunktion, weil sie in jedem Punkt die Steigung von f(x) repräsentiert.	

E3	Ergebnisse	
	a)	$t(x) = -4x + 10$ $n(x) = \frac{1}{4}x + \frac{3}{2}$
	b)	Das Dreieck hat eine Fläche von 8,5 Flächeneinheiten (FE).

E4	Ergebnis
	Funktionsgleichung: $f(x)=\frac{1}{2}x^3-\frac{1}{2}x^2-4x+4$
	Extrempunkte: $P_{min}(2\,\vert\,-2)$ $P_{max}\left(-\frac{4}{3}=-1,\bar{3}\,\vert\,\frac{196}{27}\approx 7,26\right)$
	Wendepunkt: $P_w\left(\frac{1}{3}=0,\bar{3}\,\vert\,\frac{71}{27}\approx 2,63\right)$
	Achsenschnittpunkte:
	$P_y(0\,\vert\,4)$ $P_{x1}(1\,\vert\,0)$ $P_{x2}\left(-\sqrt{8}\approx -2,83\,\vert\,0\right)$ $P_{x3}\left(\sqrt{8}\approx 2,83\,\vert\,0\right)$
	Graph siehe „Ausführliche Lösung“.

E5	Ergebnisse	
	a)	Der Graph von f(x) ist symmetrisch zur y – Achse, da nur gerade Exponenten auftreten.
	b)	$P_{min1}\left(-\sqrt{12}\approx -3,46\,\vert\,0\right)$ $P_{min2}\left(\sqrt{12}\approx 3,46\,\vert\,0\right)$ $P_{max}(0\,\vert\,4,5)$
	c)	$P_{w1}(2\,\vert\,2)\Rightarrow t_1(x)=-2x+6$ $P_{w2}(-2\,\vert\,2)\Rightarrow t_2(x)=2x+6$
	d)	$P_y(0\,\vert\,4,5)$ $P_{x1/2}\left(-\sqrt{12}\approx -3,46\,\vert\,0\right)$ $P_{x3/4}\left(\sqrt{12}\approx 3,46\,\vert\,0\right)$
	e)	Wertetabelle siehe „Ausführliche Lösung“.
	f)	Graph siehe „Ausführliche Lösung“.
	g)	streng monoton fallend in $\left]-\infty;-\sqrt{12}\right[$ streng monoton steigend in $\left]-\sqrt{12};0\right[$ streng monoton fallend in $\left]0;\sqrt{12}\right[$ streng monoton steigend in $\left]\sqrt{12};\infty\right[$
	h)	Linkskrümmung in $\left]-\infty;-2\right[$ Rechtskrümmung in $\left]-2;2\right[$ Linkskrümmung in $\left]2;\infty\right[$
	i)	$\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=\infty$ $\lim\limits_{x\to\infty} f(x)=\infty$

E6	Ergebnisse Graphen siehe ausführliche Lösung.	
	a)	Siehe ausführliche Lösung.
	b)	$K'(x)=3x^2-18x+40$
	c)	Für eine Patientenzahl von x = 3 (300 Patienten) ist die Kostenzunahme am geringsten. K’(3) = 13 bedeutet 130 € / Tag.

E7	Ergebnisse Graphen siehe ausführliche Lösung.	
	a)	$K'(x) = 3x^2 - 24x + 50$
	b)	Bei einer Ausbringung von 4 ME sind die Differentialkosten mit 2 GE/ME am geringsten.
	c)	K'(x) hat keine Nullstellen und ist eine nach oben geöffnete Parabel.
	d)	Für $4 \le x \le 9{,}1$ arbeitet der Betrieb mit Gewinn. $(x = ME)$
	e)	Gewinnzunahme: $[4 \le x \le 6{,}9]$ $(x = ME)$

E8	Ergebnisse	
	a)	Nach 0,7 s hat der Stein die Geschwindigkeit v(t) = 0.
	b)	Die maximale Steighöhe beträgt 2,56 m.

E9 Ergebnis

Funktionsgleichung: $f(x) = x^3 - 9x^2 + 15x + 9$

Extrempunkte: $P_{Min}(5\,|\,-16)\,;\,P_{Max}(1\,|\,16)$

Wendepunkt: $P_W(3\,|\,0)$

Wendetangente: $t(x) = -12x + 36$

Achsenschnittpunkte:

$P_y(0\,|\,9)$ $\quad P_{x1}(3\,|\,0)$ $\quad P_{x2}\left(3-\sqrt{12} \approx -0{,}46\,|\,0\right)$ $\quad P_{x3}\left(3+\sqrt{12} \approx 6{,}46\,|\,0\right)$

Symmetrie: keine

Krümmungsverhalten/Monotonie:

Rechtskrümmung in $]-\infty\,;3[$ Linkskrümmung in $]3\,;\infty[$

streng monoton wachsend in $]-\infty\,;1[$

streng monoton fallend in $]1;5[$

streng monoton wachsend in $]5\,;\infty[$

Randpunkte des Definitionsbereichs:

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty} x^3\left(1-\frac{9}{x}+\frac{15}{x^2}+\frac{9}{x^3}\right) = -\infty$$

$$\lim_{x\to\infty} f(x) = \lim_{x\to\infty} x^3\left(1-\frac{9}{x}+\frac{15}{x^2}+\frac{9}{x^3}\right) = \infty$$

Graph siehe „Ausführliche Lösung“.

Ausführliche Lösungen:

A1	**Aufgabe**	
	Parabel durch 3 Punkte.	
	a)	Bestimmen Sie die Funktionsgleichung f(x) der Parabel, die durch folgende Punkte verläuft: $P_1(-4\,|\,-2)$ $P_2(-2\,|\,-4)$ $P_3(2\,|\,4)$
	b)	Bestimmen Sie die Koordinaten des Scheitelpunktes.
	c)	Berechnen Sie die Achsenschnittpunkte von f(x).
	d)	Zeichnen Sie die Graphen von f(x) und f'(x) in ein Koordinatensystem.

A1 Ausführliche Lösung

a)

$P_1(-4\,|\,-2): f(-4) = 16a_2 - 4a_1 + 1a_0 = -2$

$P_2(-2\,|\,-4): f(-2) = 4a_2 - 2a_1 + 1a_0 = -4$

$P_2(2\,|\,4): f(2) = 4a_2 + 2a_1 + 1a_0 = 4$

a_0	a_1	a_2	
1	−4	16	−2
1	−2	4	−4 II − I
1	2	4	4 III − I
1	−4	16	−2
0	2	−12	−2 | : 2
0	6	−12	6 | : (−6)
1	−4	16	−2
0	1	−6	−1
0	−1	2	−1 III + II
1	−4	16	−2
0	1	−6	−1
0	0	−4	−2

$-4a_2 = -2 \,|\, : (-4)$

$\Leftrightarrow \boxed{a_2 = \frac{1}{2}}$

$a_1 - 6a_2 = -1 \Leftrightarrow a_1 - 6 \cdot \frac{1}{2} = -1$

$\Leftrightarrow a_1 - 3 = -1 \Leftrightarrow \boxed{a_1 = 2}$

$a_0 - 4a_1 + 16a_2 = -2 \Leftrightarrow a_0 - 4 \cdot 2 + 16 \cdot \frac{1}{2} = -2$

$\Leftrightarrow a_0 - 8 + 8 = -2 \Leftrightarrow \boxed{a_0 = -2}$

$$\underline{\underline{f(x) = \frac{1}{2}x^2 + 2x - 2}}$$

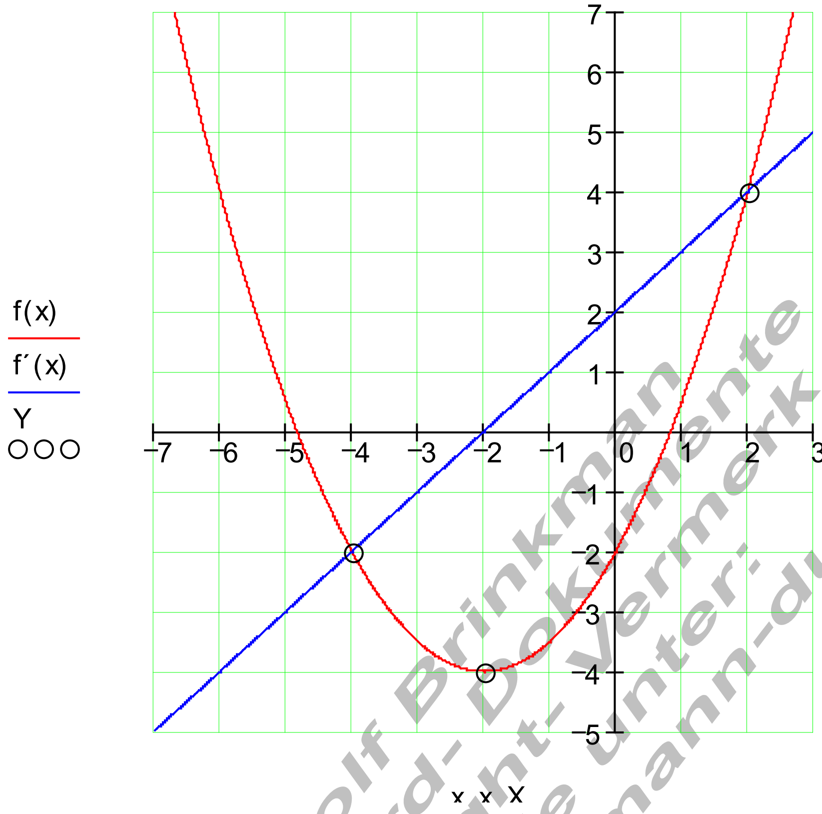
$P_1(-4\,|\,-2): f(-4) = \frac{1}{2} \cdot (-4)^2 + 2 \cdot (-4) - 2 = 8 - 8 - 2 = -2$

$P_2(-2\,|\,-4): f(-2) = \frac{1}{2} \cdot (-2)^2 + 2 \cdot (-2) - 2 = 2 - 4 - 2 = -4$

$P_3(2\,|\,4): f(2) = \frac{1}{2} \cdot 2^2 + 2 \cdot 2 - 2 = 2 + 4 - 2 = 4$

A1	Ausführliche Lösung	
	b)	Der Scheitelpunkt der Parabel ist ein Extrempunkt. $f(x)=\frac{1}{2}x^2+2x-2 \quad \Rightarrow f'(x)=x+2 \quad \Rightarrow f''(x)=1$ $f'(x)=0 \Leftrightarrow x+2=0 \Leftrightarrow x=-2$ ist mögliche Extremstelle. $f''(x)=f''(-2)=1>0 \Rightarrow$ rel. Min bei $x=-2$ $f(-2)=\frac{1}{2}\cdot 4-4-2=2-4-2=-4$ rel. Min = Scheitelpunkt: $P_{Min}(-2\,\vert\,-4)=\underline{\underline{P_{Sp}(-2\,\vert\,-4)}}$

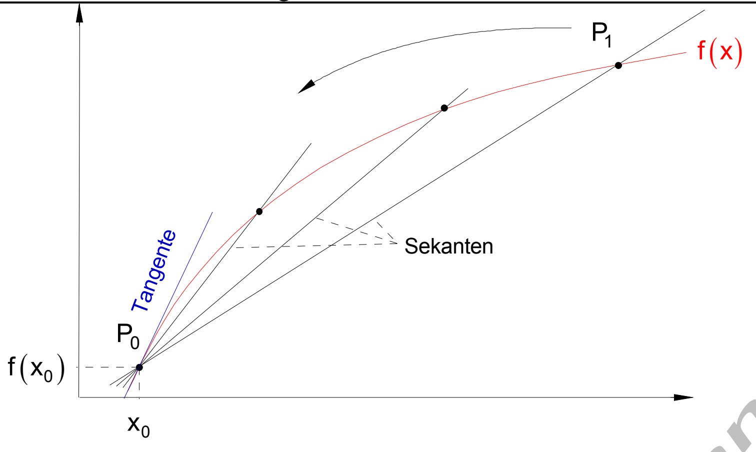
A1	Ausführliche Lösung	
	c)	$f(x)=\frac{1}{2}x^2+2x-2 \qquad f(0)=-2 \Rightarrow \underline{\underline{P_y(0\,\vert\,-2)}}$ $f(x)=0 \Leftrightarrow \frac{1}{2}x^2+2x-2=0$ $f(x)=0 \Leftrightarrow x^2+4x-4=0$ Normalform der quadratischen Gleichung $p=4;q=-4 \Rightarrow D=\left(\frac{p}{2}\right)^2-q=4+4=8 \Rightarrow \sqrt{D}=\sqrt{8}=2\cdot\sqrt{2}$ $x_{1/2}=-\frac{p}{2}\pm\sqrt{D}$ $\left\vert \begin{array}{l} x_1=-2+2\cdot\sqrt{2}\approx 0{,}83 \Rightarrow \underline{\underline{P_{x1}\left(-2+2\cdot\sqrt{2}\approx 0{,}83\,\vert\,0\right)}} \\ x_2=-2-2\cdot\sqrt{2}\approx -4{,}83 \Rightarrow \underline{\underline{P_{x2}\left(-2-2\cdot\sqrt{2}\approx -4{,}83\,\vert\,0\right)}} \end{array}\right.$

A1	Ausführliche Lösung
	d) 

A2	**Aufgabe**	
	Theoriefragen.	
	a)	Was verstehen Sie unter der Steigung eines Funktionsgraphen in einem Punkt?
	b)	Beschreiben Sie anschaulich (Skizze) und mit Worten, wie man bei einem Graphen von der Sekantensteigung zur Tangentensteigung gelangt.
	c)	Welche Bedeutung hat die erste Ableitung einer Funktion an der Stelle x_0?
	d)	Warum nennt man die Ableitungsfunktion auch Steigungsfunktion?

A2a	Ausführliche Lösung
	Bei einer linearen Funktion ist die Steigung in jedem Punkt des Graphen gleich. Sie lässt sich leicht über das Steigungsdreieck berechnen. Funktionen mit gekrümmten Grapen haben fast überall unterschiedliche Steigungen. Über das Steigungsdreieck lässt sich die mittlere Steigung, die Sekantensteigung bestimmen, repräsentiert durch den Differenzenquotienten. Erst die Grenzwertbildung führt von der Sekanten- zur Tangentensteigung. Deshalb ist die Steigung eines Funktionsgraphen in einem Punkt gleich der Steigung der Tangente in diesem Punkt. Man nennt sie auch momentane Änderungsrate.

A2b Ausführliche Lösung



Verbindet man zwei Punkte eines gekrümmten Graphen durch eine Gerade, so bildet diese die Sekante. Die Sekante stellt die mittlere Steigung des Graphen zwischen diesen beiden Punkten dar. Man sagt dazu auch mittlere Änderungsrate. Will man näherungsweise die Steigung in einem Punkt bestimmen, so müssen die beiden Sekantenpunkte möglichst nahe zusammenliegen. Sie dürfen aber nicht aufeinanderliegen.
Bewegt man nun den Punkt P_1 immer weiter auf P_0 zu, so ändert sich die Sekantensteigung. Je mehr man sich dem Punkt P_0 nähert, desto mehr nähert sich die Sekantensteigung der Tangentensteigung. Erst der Grenzübergang liefert den genauen Wert der Tangentensteigung. Diese repräsentiert die momentane Änderungsrate.

A2c Ausführliche Lösung

Die erste Ableitung einer Funktion an der Stelle x_0 ist die Steigung der Tangente im Punkt $P(x_0 \mid f(x_0))$ und somit auch die Steigung des Graphen von f(x) in diesem Punkt. Man sagt dazu auch momentane Änderungsrate an der Stelle x_0.

A2d Ausführliche Lösung

Die erste Ableitung einer Funktion an der Stelle x_0 ist die Steigung des Graphen von f(x) an dieser Stelle. Da eine stetige Funktion an fast jeder Stelle ableitbar ist, bilden die Ableitungswerte wiederum eine Funktion, die sogenannte Ableitungsfunktion f'(x). f'(x) heißt deshalb auch Steigungsfunktion, weil sie in jedem Punkt die Steigung von f(x) repräsentiert.

A3	**Aufgabe**	
	Gegeben ist die Funktion $f(x)=\frac{1}{16}x^4-\frac{3}{2}x^2+7$	
	a)	Die Gleichungen von Tangente und Normale sollen für $x_0 = 2$ berechnet werden.
	b)	Tangente und Normale bilden mit der x- Achse zusammen ein Dreieck. Berechnen Sie dessen Flächeninhalt.

A3 Ausführliche Lösung

a)

$$f(x)=\frac{1}{16}x^4-\frac{3}{2}x^2+7 \qquad x_0=2 \qquad f'(x)=\frac{1}{4}x^3-3x$$

$$f(x_0)=f(2)=\frac{1}{16}\cdot 16-\frac{3}{2}\cdot 4+7=1-6+7=2$$

$$f'(x_0)=f'(2)=\frac{1}{4}\cdot 8-3\cdot 2=2-6=-4$$

$$t(x)=f'(x_0)(x-x_0)+f(x_0)=-4(x-2)+2=-4x+8+2=\underline{\underline{-4x+10}}$$

$$n(x)=-\frac{1}{f'(x_0)}(x-x_0)+f(x_0)=\frac{1}{4}(x-2)+2=\frac{1}{4}x-\frac{1}{2}+2=\underline{\underline{\frac{1}{4}x+\frac{3}{2}}}$$

A3 Ausführliche Lösung

b)

$$\text{Dreiecksfläche} = A = \frac{g\cdot h}{2}$$

Tangente und Normale schneiden sich im Punkt $S(x_0 \mid f(x_0)) = S(2 \mid 2)$

Damit ist $h = 2\,LE$

g ist der Abstand der Nullstellen von $t(x)$ und $n(x)$

$$t(x)=0 \Leftrightarrow -4x+10=0 \Leftrightarrow 4x=10 \Leftrightarrow x_1=\frac{10}{4}=2{,}5$$

$$n(x)=0 \Leftrightarrow \frac{1}{4}x+\frac{3}{2}=0 \Leftrightarrow \frac{1}{4}x=-\frac{3}{2} \Leftrightarrow x_2=-\frac{12}{2}=-6$$

$$g=6+2{,}5=8{,}5 \Rightarrow A=\frac{8{,}5\cdot 2}{2}=\underline{\underline{8{,}5\,FE}}$$

A4	**Aufgabe**
	Der Graph einer ganzrationalen Funktion geht durch die Punkte $P_1(-1 \mid 7)$ $P_2(-2 \mid 6)$ $P_3(3 \mid 1)$ $P_4(-3 \mid -2)$ Berechnen Sie die Funktionsgleichung, die Extrempunkte, den Wendpunkt und die Achsenschnittpunkte. Stellen Sie eine Wertetabelle auf und zeichnen Sie den Graphen so genau wie möglich in ein geeignetes Koordinatensystem. Falls Ihnen zum Zeichnen Punkte fehlen, so berechnen Sie diese.

A4 Ausführliche Lösung

Berechnung der Funktionsgleichung

$f(x) = a_3x^3 + a_2x^2 + a_1x + a_0$

$$\begin{array}{llllll}
P_1(-1 \mid 7) & \Rightarrow & f(-1) = 7 & \Leftrightarrow & -1a_3 + 1a_2 - 1a_1 + 1a_0 & = 7 \\
P_2(-2 \mid 6) & \Rightarrow & f(-2) = 6 & \Leftrightarrow & -8a_3 + 4a_2 - 2a_1 + 1a_0 & = 6 \\
P_3(3 \mid 1) & \Rightarrow & f(3) = 1 & \Leftrightarrow & 27a_3 + 9a_2 + 3a_1 + 1a_0 & = 1 \\
P_4(-3 \mid 2) & \Rightarrow & f(-3) = 2 & \Leftrightarrow & -27a_3 + 9a_2 - 3a_1 + 1a_0 & = 2
\end{array}$$

a_0	a_1	a_2	a_3		
1	−1	1	−1	7	
1	−2	4	−8	6	II − I
1	3	9	27	1	III − I
1	−3	9	−27	2	IV − I
1	−1	1	−1	7	
0	−1	3	−7	−1	
0	4	8	28	−6	III + 4 · II
0	−2	8	−26	−9	IV − 2 · II
1	−1	1	−1	7	
0	−1	3	−7	−1	
0	0	20	0	−10	
0	0	2	−12	−7	

$20a_2 = -10 \mid 20 \Leftrightarrow a_2 = -\frac{1}{2}$

$2a_2 - 12a_3 = -7 \Rightarrow 2 \cdot \frac{1}{2} - 12a_3 = -7 \mid +1$

$\Leftrightarrow -12a_3 = -6 \mid (-12) \Leftrightarrow a_3 = \frac{1}{2}$

$-a_1 + 3a_2 - 7a_3 = -1$

$\Leftrightarrow -a_1 + 3 \cdot \left(-\frac{1}{2}\right) - 7 \cdot \frac{1}{2} = -1$

$\Leftrightarrow -a_1 - \frac{3}{2} - \frac{7}{2} = -1 \Leftrightarrow -a_1 - 5 = -1 \mid +5$

$\Leftrightarrow -a_1 = 4 \mid \cdot(-1) \Leftrightarrow a_1 = -4$

$a_0 - a_1 + a_2 - a_3 = 7 \Leftrightarrow a_0 + 4 - \frac{1}{2} - \frac{1}{2} = 7$

$\Leftrightarrow a_0 + 3 = 7 \mid -3 \Leftrightarrow a_0 = 4$

$$\underline{\underline{f(x) = \frac{1}{2}x^3 - \frac{1}{2}x^2 - 4x + 4}}$$

A4 Ausführliche Lösung

Extrempunkte

$$f(x)=\frac{1}{2}x^3-\frac{1}{2}x^2-4x+4 \Rightarrow f'(x)=\frac{3}{2}x^2-x-4 \Rightarrow f''(x)=3x-1$$

$$f'(x)=0 \Leftrightarrow \frac{3}{2}x^2-x-4=0 \mid \cdot\frac{2}{3} \Leftrightarrow x^2-\frac{2}{3}x-\frac{8}{3}=0 \Rightarrow p=-\frac{2}{3};\ q=-\frac{8}{3}$$

$$D=-\left(\frac{p}{2}\right)^2-q=\frac{1}{9}+\frac{8}{3}=\frac{25}{9} \Rightarrow \sqrt{D}=\sqrt{\frac{25}{9}}=\frac{5}{3}$$

$$x_{1/2}=-\frac{p}{2}\pm\sqrt{D} \quad \left| \begin{array}{l} x_1=\frac{1}{3}+\frac{5}{3}=2 \\ x_2=\frac{1}{3}-\frac{5}{3}=-\frac{4}{3} \end{array} \right.$$

$$f''(x_1)=f''(2)=3\cdot 2-1=6-1=5>0 \Rightarrow \text{rel. Min. bei } x_1=2$$

$$f''(x_2)=f''\left(-\frac{4}{3}\right)=3\cdot\left(-\frac{4}{3}\right)-1=-4-1=-5<0 \Rightarrow \text{rel. Max. bei } x_2=-\frac{4}{3}$$

$$f(x_1)=f(2)=\frac{1}{2}\cdot 8-\frac{1}{2}\cdot 4-4\cdot 2+4=4-2-8+4=-2 \Rightarrow \underline{\underline{P_{Min}(2\mid -2)}}$$

$$f(x_2)=f\left(-\frac{4}{3}\right)=-\frac{1}{2}\cdot\frac{64}{27}-\frac{1}{2}\cdot\frac{16}{9}+4\cdot\frac{4}{3}+4=-\frac{64}{54}-\frac{16}{18}+\frac{16}{3}+4$$

$$=-\frac{64}{54}-\frac{48}{54}+\frac{288}{54}+\frac{216}{54}=\frac{392}{54}=\frac{196}{27}$$

$$\Rightarrow \underline{\underline{P_{Max}\left(-\frac{4}{3}\approx 1{,}33 \mid \frac{196}{27}\approx 7{,}26\right)}}$$

A4 Ausführliche Lösung

Wendepunkt

$$f(x)=\frac{1}{2}x^3-\frac{1}{2}x^2-4x+4 \Rightarrow f'(x)=\frac{3}{2}x^2-x-4 \Rightarrow f''(x)=3x-1 \Rightarrow f'''(x)=3$$

$$f''(x)=0 \Leftrightarrow 3x-1=0 \mid +1 \Leftrightarrow 3x=1 \mid :3 \Leftrightarrow x_w=\frac{1}{3} \text{ mögliche Wendestelle}$$

$$f'''(x_w)=f'''\left(\frac{1}{3}\right)=3\neq 0 \Rightarrow x_w=\frac{1}{3} \text{ ist eine Wendestelle}$$

$$f(x_w)=f\left(\frac{1}{3}\right)=\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{27}-\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{9}-4\cdot\frac{1}{3}+4=\frac{1}{54}-\frac{1}{18}-\frac{4}{3}+4$$

$$=\frac{1}{54}-\frac{3}{54}-\frac{72}{54}+\frac{216}{54}=\frac{142}{54}=\frac{71}{27} \Rightarrow \underline{\underline{P_w\left(\frac{1}{3}\approx 0{,}33 \mid \frac{71}{27}\approx 2{,}63\right)}}$$

A4 Ausführliche Lösung

Achsenschnittpunkte

$f(x)=\frac{1}{2}x^3-\frac{1}{2}x^2-4x+4 \qquad f(0)=4 \Rightarrow \underline{\underline{P_y(0\,|\,4)}}$

$f(x)=0 \Leftrightarrow \frac{1}{2}x^3-\frac{1}{2}x^2-4x+4=0$ erste Nullstelle durch probieren

Horner – Schema:

$$\begin{array}{llcccc} & & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & -4 & 4 \\ x=1 & \downarrow & & \underline{\frac{1}{2}} & \underline{0} & \underline{-4} \\ & & \color{red}{\frac{1}{2}} & \color{red}{0} & \color{red}{-4} & 0 \end{array} \qquad f(1)=0 \Rightarrow \color{blue}{x_1=1}$$

Restpolynom:

$\color{red}{\frac{1}{2}}x^2\color{red}{-4}=0\,|+4 \Leftrightarrow \frac{1}{2}x^2=4\,|\cdot 2 \Leftrightarrow x^2=8 \Rightarrow \color{blue}{x_{2/3}=\pm\sqrt{8}}$

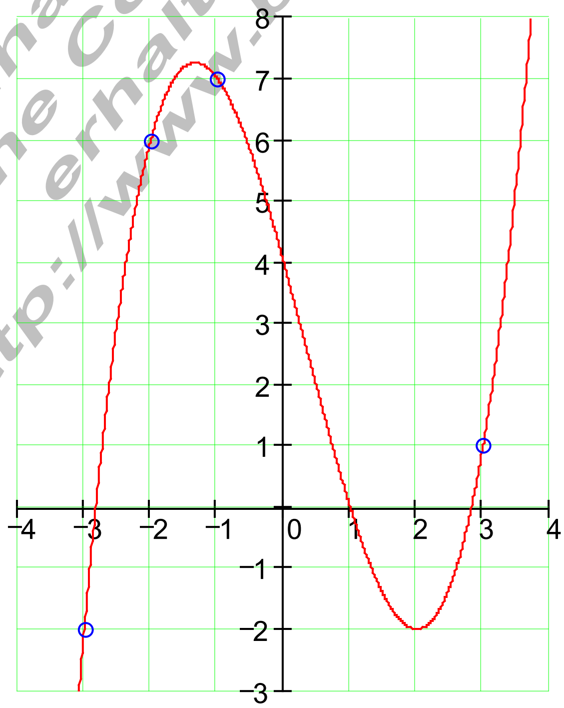
$\underline{\underline{P_{x1}(1\,|\,0)}} \qquad \underline{\underline{P_{x2/3}\left(\pm\sqrt{8}\approx 2,83\,|\,0\right)}}$

A4 Ausführliche Lösung

Wertetabelle

x	−3	−2,83	−2	−1,33	−1	0	0,33	1	2	2,83	3
f(x)	−2	0	6	7,26	7	4	2,63	0	−2	0	1

A4 Ausführliche Lösung



A5	**Aufgabe**	
	Gegeben ist eine ganzrationale Funktion 4. Grades: $f(x)=\frac{1}{32}x^4-\frac{3}{4}x^2+\frac{9}{2}$	
	a)	Ist der Funktionsgraph symmetrisch? Falls ja, welcher Art ist die Symmetrie? Begründen Sie Ihre Entscheidung.
	b)	Berechnen sie die relativen Extrema (Hochpunkte, Tiefpunkte).
	c)	Berechnen Sie die Wendepunkte und die Funktionsgleichungen der Wendetangenten.
	d)	Berechnen Sie die Achsenschnittpunkte.
	e)	Stellen Sie mit allen bisher bekannten Punkten eine Wertetabelle auf.
	f)	Zeichnen Sie den Graphen möglichst genau in ein Koordinatensystem und kennzeichnen Sie die markanten Punkte. (Falls nötig, erweitern Sie dazu Ihre Wertetabelle um einige Punkte. Gezeichnet werden soll im Intervall I = [-5 ; 5] Maßstab: 1 cm ist eine Einheit.)
	g)	Machen Sie eine Aussage über das Monotonieverhalten des Graphen, d.h. geben Sie die Intervalle für monoton steigend, bzw. monoton fallend an.
	h)	Machen Sie eine Aussage über das Krümmungsverhalten des Graphen, d.h. geben Sie die Intervalle für Rechts- bzw. Linkskrümmung an.
	i)	Bestimmen Sie die Randpunkte des Definitionsbereiches.

A5	Ausführliche Lösung	
	a)	Der Graph von f(x) ist symmetrisch zur y – Achse, da nur gerade Exponenten auftreten.

A5 Ausführliche Lösung

b) Extrempunkte

$$f(x)=\frac{1}{32}x^4-\frac{3}{4}x^2+\frac{9}{2}\Rightarrow f'(x)=\frac{1}{8}x^3-\frac{3}{2}x\Rightarrow f''(x)=\frac{3}{8}x^2-\frac{3}{2}$$

$$f'(x)=0\Leftrightarrow\frac{1}{8}x^3-\frac{3}{2}x=0\Leftrightarrow x\left(\frac{1}{8}x^2-\frac{3}{2}\right)=0\Rightarrow x_1=0$$

$$\frac{1}{8}x^2-\frac{3}{2}=0\Leftrightarrow\frac{1}{8}x^2=\frac{3}{2}\Leftrightarrow x^2=12\Leftrightarrow x_{2/3}=\pm\sqrt{12}$$

$x_1=0$ und $x_{2/3}=\pm\sqrt{12}$ sind Stellen mit waagerechter Tangente.

$$f''(x_1)=f''(0)=-\frac{3}{2}<0\Rightarrow \text{rel. Max. bei } x_1=0$$

$$f''(x_{2/3})=f''\left(\pm\sqrt{12}\right)=\frac{3}{8}\cdot12-\frac{3}{2}=\frac{36}{8}-\frac{3}{2}=3>0\Rightarrow \text{rel. Min. bei } x_{2/3}=\pm\sqrt{12}$$

$$f(x_1)=f(0)=\frac{9}{2}\qquad f(x_{2/3})=\frac{1}{32}\cdot144-\frac{3}{4}\cdot12+\frac{9}{2}=0$$

$$P_{max}(0\,|\,4{,}5)\qquad P_{min1}\left(-\sqrt{12}\approx-3{,}46\,|\,0\right)\qquad P_{min2}\left(\sqrt{12}\approx3{,}46\,|\,0\right)$$

A5 Ausführliche Lösung

c) Wendepunkte und Wendetangenten

$$f(x)=\frac{1}{32}x^4-\frac{3}{4}x^2+\frac{9}{2}\Rightarrow f'(x)=\frac{1}{8}x^3-\frac{3}{2}x\Rightarrow f''(x)=\frac{3}{8}x^2-\frac{3}{2}\Rightarrow f'''(x)=\frac{3}{4}x$$

$$f''(x)=0\Leftrightarrow\frac{3}{8}x^2-\frac{3}{2}=0\Leftrightarrow\frac{3}{8}x^2=\frac{3}{2}\Leftrightarrow x^2=4\Leftrightarrow x_{1/2}=\pm 2$$

$x_{1/2}=\pm 2$ sind mögliche Wendestellen.

$$f'''(x_{1/2})=f'''(\pm 2)=\frac{3}{4}\cdot(\pm 2)\neq 0\Rightarrow \text{Wendestellen bei } x_{1/2}=\pm 2$$

$$f(x_{1/2})=f(\pm 2)=\frac{1}{32}\cdot 16-\frac{3}{4}\cdot 4+\frac{9}{2}=\frac{1}{2}-3+\frac{9}{2}=2$$

$P_{W1}(-2\,|\,2)$ $\quad$ $P_{W2}(2\,|\,2)$ sind die Wendepunkte.

Wendetangenten:

$$x_0=-2\Rightarrow f(x_0)=f(-2)=2 \qquad f'(x_0)=f'(-2)=-\frac{1}{8}\cdot 8+\frac{3}{2}\cdot 2=2$$

$$t_1(x)=2(x+2)+2=\underline{\underline{2x+6}}$$

$$x_0=2\Rightarrow f(x_0)=f(2)=2 \qquad f'(x_0)=f'(2)=\frac{1}{8}\cdot 8-\frac{3}{2}\cdot 2=-2$$

$$t_2(x)=-2(x-2)+2=\underline{\underline{-2x+6}}$$

A5 Ausführliche Lösung

d) Achsenschnittpunkte

$$f(0)=\frac{9}{2}\Rightarrow \underline{\underline{P_y\left(0\,\middle|\,\frac{9}{2}\right)}}$$

$$f(x)=0\Leftrightarrow\frac{1}{32}x^4-\frac{3}{4}x^2+\frac{9}{2}=0 \text{ (biquadratische Gleichung)}$$

$$x^2=z\Rightarrow\frac{1}{32}z^2-\frac{3}{4}z+\frac{9}{2}=0\,|\cdot 32\Leftrightarrow z^2-24z+144=0$$

$$p=-24 \qquad q=144 \qquad \Rightarrow D=144-144=0\Rightarrow\sqrt{D}=\sqrt{0}=0$$

$$z_{1/2}=-\frac{p}{2}\pm\sqrt{D}=12\pm 0=12$$

$$z_1=x^2\Leftrightarrow 12=x^2\Leftrightarrow x_{1/2}=\pm\sqrt{12} \qquad z_2=x^2\Leftrightarrow 12=x^2\Leftrightarrow x_{3/4}=\pm\sqrt{12}$$

$$\underline{\underline{P_{x1/3}\left(\sqrt{12}\approx 3{,}46\,|\,0\right)}} \qquad \underline{\underline{P_{x1/3}\left(-\sqrt{12}\approx -3{,}46\,|\,0\right)}}$$

A5 Ausführliche Lösung

e) Wertetabelle

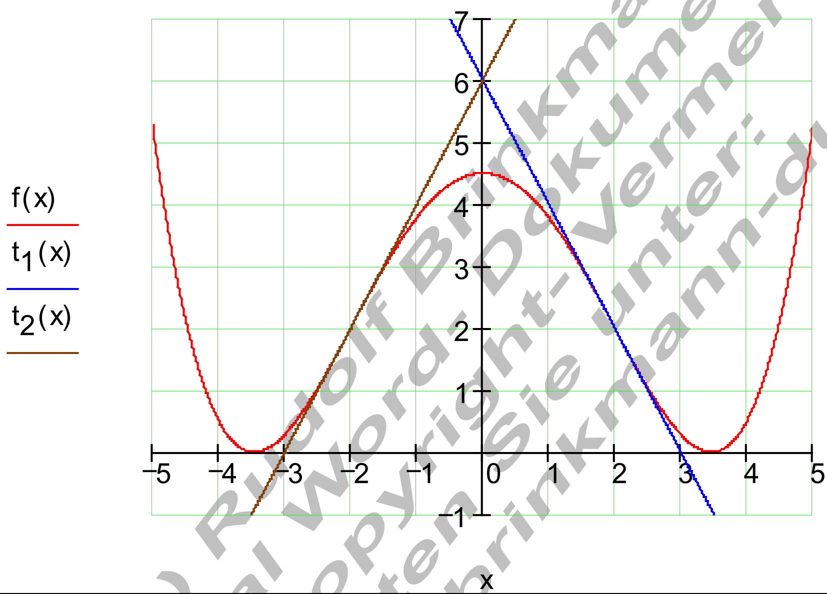
Funktionswerte wurden mit dem Taschenrechner berechnet.
Aus Symmetriegründen reicht es, nur die Funktionswerte für positive x-Werte zu berechnen.

x	-5	-4	$-\sqrt{12} \approx -3{,}46$	-3	-2	-1	0
$f(x)$	$5{,}28$	$0{,}5$	0	$0{,}28$	2	$3{,}78$	$4{,}5$

x	1	2	3	$\sqrt{12} \approx 3{,}46$	4	5
$f(x)$	$3{,}78$	2	$0{,}28$	0	$0{,}5$	$5{,}28$

A5 Ausführliche Lösung

f)



A5 Ausführliche Lösung

g) Monotonieverhalten

streng monoton fallend in $\left]-\infty\,;-\sqrt{12}\right[$

streng monoton wachsend in $\left]-\sqrt{12}\,;0\right[$

streng monoton fallend in $\left]0\,;\sqrt{12}\right[$

streng monoton wachsend in $\left]\sqrt{12}\,;\infty\right[$

Das Monotonieverhalten wurde aus dem Graphen abgelesen.
Änderungen erfolgen an den Extremstellen.

A5 Ausführliche Lösung

h) Krümmungsverhalten

Linkskrümmung in $\left]-\infty\,;-2\right[$ Rechtskrümmung in $\left]-2\,;2\right[$

Linkskrümmung in $\left]2\,;\infty\right[$

Das Krümmungsverhalten wurde aus dem Graphen abgelesen.
Änderungen erfolgen an den Wendestellen.

A5 Ausführliche Lösung

i) Randpunkte des Definitionsbereichs

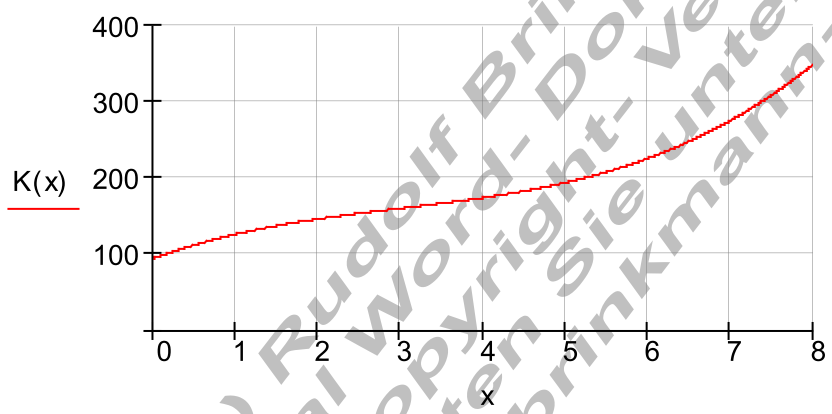
$$\lim_{x\to -\infty} f(x) = \lim_{x\to -\infty} x^4 \left[\frac{1}{32} - \underbrace{\frac{3}{4}\cdot\frac{1}{x^2}}_{\to 0} + \underbrace{\frac{9}{2}\cdot\frac{1}{x^4}}_{\to 0} \right] = \infty$$

$$\lim_{x\to \infty} f(x) = \lim_{x\to \infty} x^4 \left[\frac{1}{32} - \underbrace{\frac{3}{4}\cdot\frac{1}{x^2}}_{\to 0} + \underbrace{\frac{9}{2}\cdot\frac{1}{x^4}}_{0} \right] = \infty$$

A6 **Aufgabe**

Die Kostenfunktion K(x) eines Krankenhauses stellt den Zusammenhang zwischen der Patientenzahl x und den Gesamtkosten dar.
x = 1 bedeutet 100 Patienten, y = 1 bedeutet 1000 € / Tag.

$$K(x) = x^3 - 9x^2 + 40x + 94$$



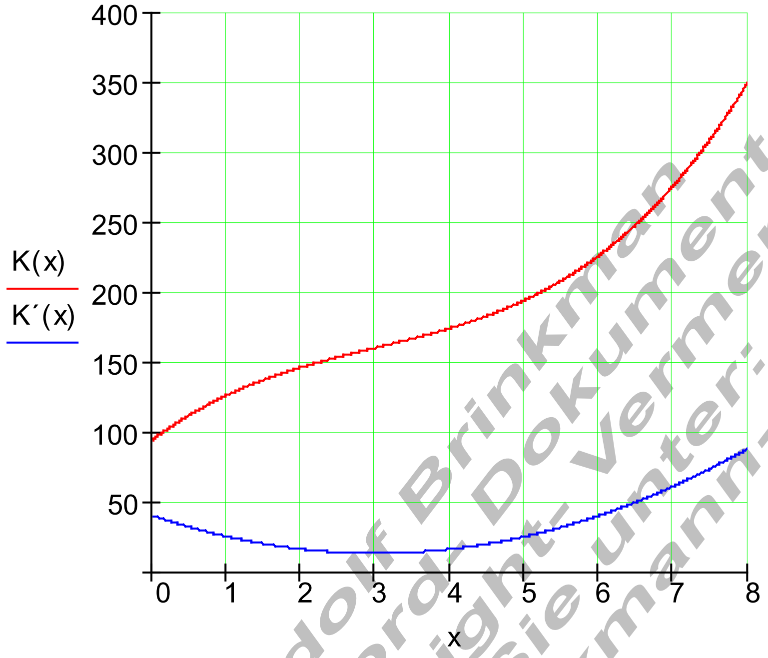
a) Übertragen Sie die Kostenfunktion in Ihr Heft.
Die Ableitung der Kostenfunktion bezeichnet man als ***Differenzialkosten*** oder auch als ***Grenzkosten***. Sie beschreibt die Kostenzunahme in Abhängigkeit von der Patientenzahl. (Steigung von K(x)).
Bestimmen Sie K'(x) und zeichnen Sie den Graphen in das Koordinatensystem.

b) Für welche Patientenzahl ist die Kostenzunahme am geringsten?
Berechnen Sie diesen Wert.

A6	Ausführliche Lösung
a)	$K(x) = x^3 - 9x^2 + 40x + 94 \Rightarrow K'(x) = 3x^2 - 18x + 40$

Wertetabelle:

x	0	1	2	3	4	5	6	7	8
K'(x)	40	25	16	13	16	25	40	61	88



A6	Ausführliche Lösung

b) Der Graph von K'(x) stellt eine Parabel dar, die die Kostenzunahme beschreibt.
Die geringste Kostenzunahme wird über den Scheitelpunkt der Parabel bestimmt.

$K(x) = x^3 - 9x^2 + 40x + 94 \Rightarrow K'(x) = 3x^2 - 18x + 40 \Rightarrow K''(x) = 6x - 18$

Waagerechte Tangente im Scheitelpunkt der Parabel.

$K''(x) = 0 \Leftrightarrow 6x - 18 = 0 \Rightarrow x = 3$

$K'(3) = 13$

Für eine Patientenzahl von x = 3 (300 Patienten) ist die Kostenzunahme am
geringsten. K'(3) = 13 bedeutet 130 € / Tag.
Oder anders ausgedrückt: Kommt zu den 300 Patienten einer dazu, so erhöhen sich die täglichen Kosten um 130 €.
Kontrolle:
Mit dem Umrechnungsfaktor 100 für x und 1000 für K(x) gilt:
Ein Patient mehr bei 300 Patienten bedeutet x = 3,01
Die Mehrkosten für einen zusätzlichen Patienten betragen:
K(3,01) – K(3) = 160,13 – 160 = 0,13
Multipliziert man diesen Wert mit 1000, so ergibt das 130 €/Tag.

A7 **Aufgabe**

Die Gesamtkosten eines Betriebes werden bei einer maximalen Ausbringungsmenge von 10 ME beschrieben durch K(x).
Der Verkaufspreis pro ME beträgt 28 GE.

$K(x) = x^3 - 12x^2 + 50x + 40$

a) Bestimmen Sie die Ableitung der Kostenfunktion (Differenzialkostenfunktion oder Grenzkostenfunktion) und zeichnen Sie den Graphen.
Beschreiben Sie den Graphen.

b) Berechnen Sie die minimalen Differenzialkosten

c) Beweisen Sie, dass die Differenzialkosten für jede Ausbringungsmenge positiv sind.

d) In welchem Bereich kann man mit Gewinn rechnen?

e) In welchem Bereich nimmt der Gewinn zu?

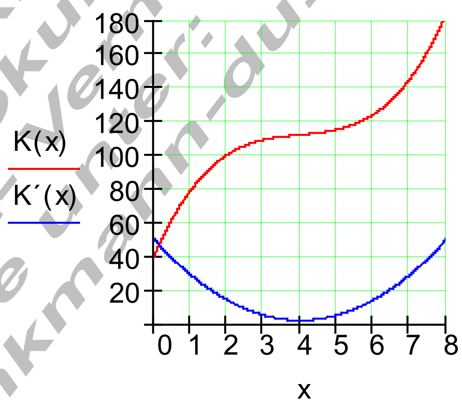
A7 Ausführliche Lösung

a) $K(x) = x^3 - 12x^2 + 50x + 40$

$K'(x) = 3x^2 - 24x + 50$

Der Graph der Grenzkostenfunktion ist eine nach oben geöffnete Parabel.

Im Scheitelpunkt dieser sind die Grenzkosten am geringsten.



A7 Ausführliche Lösung

b) Bedingung für die minimalen Differentialkosten: $K''(x) = 0$

$K(x) = x^3 - 12x^2 + 50x + 40$

$K'(x) = 3x^2 - 24x + 50$

$K''(x) = 6x - 24$

$K''(x) = 0 \Leftrightarrow 6x - 24 = 0 \Rightarrow x = 4$

$K'(4) = 2$

$\Rightarrow$ Bei einer Ausbringung von
4 ME sind die Differentialkosten mit 2 GE/ME am geringsten.

A7 Ausführliche Lösung

c) $K'(x) = 3x^2 - 24x + 50$ für $K'(4) = 2$ ist positiv

Wenn lt. Annahme für alle $x \in \mathbb{R}_+$ $K'(x)$ positiv sein soll,
darf es keine Nullstellen geben.
Wir untersuchen also $K'(x)$ auf Nullstellen:

$$K'(x) = 0 \Leftrightarrow 3x^2 - 24x + 50 = 0$$

$$\Rightarrow p = -8\,;\, q = \frac{50}{3}\,;\, D = \left(\frac{p}{2}\right)^2 - q = 16 - \frac{50}{3} < 0$$

$\Rightarrow$ keine Lösung.

Die Differentialkosten sind für jede Ausbringungsmenge positiv.
q.e.d.

A7 Ausführliche Lösung

d) Erlösfunktion: $E(x) = 28x$ (folgt aus Aufgabenstellung)

Gewinnfunktion: $G(x) = E(x) - K(x) = -x^3 + 12x^2 - 22x - 40$

Gewinn wird dort gemacht, wo die Gewinnfunktion positive Werte hat.
Wir probieren:

$G(5) = 25\,;\, G(4) = 0$ Nullstelle von $G(x)$ also $\underline{\underline{x_1 = 4}}$

HORNER

$$\begin{array}{c|cccc} & -1 & 12 & -22 & -40 \\ x = 4 & & \underline{-4} & \underline{32} & \underline{40} \\ & -1 & 8 & 10 & 0 \end{array}$$

$\Rightarrow -x^2 + 8x + 10 = 0$

$x_{2/3} = 4 \pm \sqrt{26} \Rightarrow \underline{\underline{x_2 \approx 9{,}1}}$

Für $\underline{\underline{4 \le x \le 9{,}1}}$ arbeitet der Betrieb mit Gewinn

A7 Ausführliche Lösung

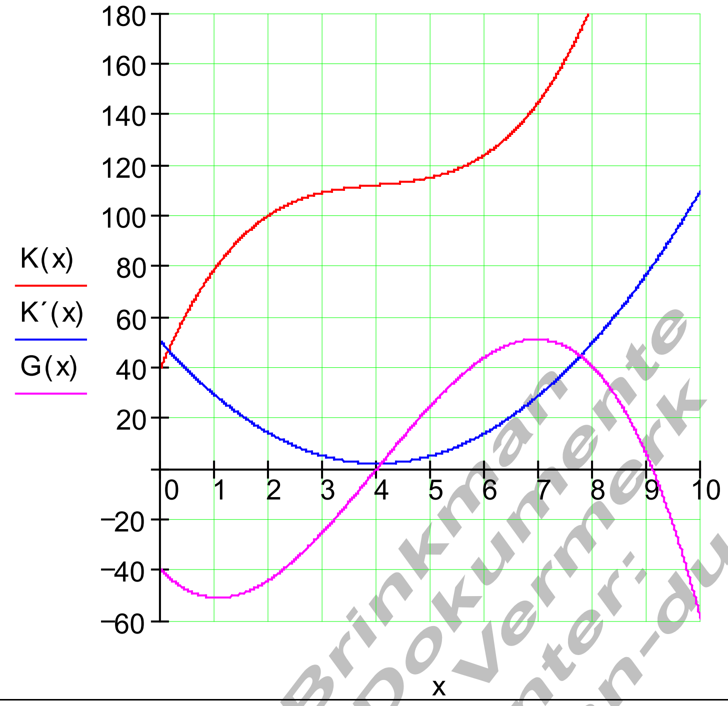
e) Gewinnzunahme erfolgt da, wo $G(x)$ positive Steigung hat und $G(x) > 0$ ist.

Also: $G(x) > 0 \wedge G'(x) > 0$

$$G'(x) = -3x^2 + 24x - 22 > 0 \text{ für } x \in \left[4 - \sqrt{\frac{26}{3}}\,;\, 4 + \sqrt{\frac{26}{3}}\right] \text{ oder } x \in [1{,}05\,;\,6{,}9]$$

Gewinnzunahme: $[4\,;\,9{,}1] \cap [1{,}05\,;\,6{,}9] = \underline{\underline{[4\,;\,6{,}9]}}$

A7 Die Graphen



A8 **Aufgabe**

Ein Stein wird mit der Anfangsgeschwindigkeit $v_0 = 7\,\frac{m}{s}$

senkrecht nach oben geworfen.

Für den Weg gilt: $s(t) = v_0 \cdot t - \frac{1}{2} g \cdot t^2$ mit $g = 10\,\frac{m}{s^2}$

Für die Geschwindigkeit: $v(t) = s'(t)$

a) Nach welcher Zeit t ist die Geschwindigkeit des Steins Null?

b) Berechnen Sie die maximale Steighöhe.

A8 Ausführliche Lösung

a) $s(t) = v_0 \cdot t - \frac{1}{2} g \cdot t^2$ mit $g = 10\,\frac{m}{s^2}$ $\qquad v_0 = 7\,\frac{m}{s}$

$v(t) = s'(t) = v_0 - gt$

$v(t) = 0 \Leftrightarrow v_0 - gt = 0 \Rightarrow t = 0{,}7\text{ s}$

Nach $\underline{\underline{0{,}7\text{ s}}}$ hat der Stein die Geschwindigkeit $v(t) = 0$

A8	Ausführliche Lösung	
	b)	Die maximale Steighöhe: $s(t) = -\frac{1}{2}gt + v_0$ ist eine nach unten geöffnete Parabel, deren Scheitel beschreibt die maximale Wurfhöhe. Bedingung für Scheitel: $s'(t) = v(t) = 0 \Leftrightarrow t = 0{,}7$ s siehe Teil a) Maximale Höhe: $s(0{,}7) = 2{,}45$ Die maximale Steighöhe beträgt $\underline{\underline{2{,}45 \text{ m}}}$

A9	**Aufgabe**
	Der Graph einer ganzrationalen Funktion geht durch die Punkte $P_1(-1 \mid -16)$ $P_2(2 \mid 11)$ $P_3(4 \mid -11)$ $P_4(6 \mid -9)$ Berechnen Sie die Funktionsgleichung, die Extrempunkte, Wendpunkt, Wendetangente und die Achsenschnittpunkte. Stellen Sie eine Wertetabelle auf und zeichnen Sie den Graphen so genau wie möglich in ein geeignetes Koordinatensystem. Machen Sie eine Symmetriebetrachtung und untersuchen Sie Krümmungsverhalten, Monotonie und Randpunkte des Definitionsbereiches.

A9	Ausführliche Lösung

Die vorgegebenen Punkte:

$P_1(-1|-16) \quad P_2(2|11) \quad P_3(4|-11) \quad P_4(6|-9)$

Die Funktionsgleichung:

$f(x) = a_3x^3 + a_2x^2 + a_1x + a_0$

Das Gleichungssystem:

$P_1(-1|-16) \Rightarrow f(-1) = -16 \Leftrightarrow -1a_3 + 1a_2 - 1a_1 + 1a_0 = -16$

$P_2(2|11) \Rightarrow f(2) = 11 \Leftrightarrow 8a_3 + 4a_2 + 2a_1 + 1a_0 = 11$

$P_3(4|-11) \Rightarrow f(4) = -11 \Leftrightarrow 64a_3 + 16a_2 + 4a_1 + 1a_0 = -11$

$P_4(6|-9) \Rightarrow f(6) = -9 \Leftrightarrow 216a_3 + 36a_2 + 6a_1 + 1a_0 = -9$

Der Gauß- Algorithmus:

a_0	a_1	a_2	a_3		
1	−1	1	−1	−16	
1	2	4	8	11	II − I
1	4	16	64	−11	III − I
1	6	36	216	−0	IV − I
1	−1	1	−1	−16	
0	3	3	9	27	: 3
0	5	15	65	5	: 5
0	7	35	217	7	: 7
1	−1	1	−1	−16	
0	1	1	3	9	
0	1	3	13	1	III − II
0	1	5	31	1	IV − II
1	−1	1	−1	−16	
0	1	1	3	9	
0	0	2	10	−8	
0	0	4	28	−8	IV − 2·III
1	−1	1	−1	−16	
0	1	1	3	9	
0	0	2	10	−8	
0	0	0	8	8	

$8a_3 = 8 \Leftrightarrow \boxed{a_3 = 1}$

$2a_2 + 10a_3 = -8$

$\Leftrightarrow 2a_2 + 10 = -8 \mid -10$

$\Leftrightarrow 2a_2 = -18 \mid :2 \Leftrightarrow \boxed{a_2 = -9}$

$a_1 + a_2 + 3a_3 = 9$

$\Leftrightarrow a_1 - 9 + 3 = 9 \mid +6$

$\Leftrightarrow \boxed{a_1 = 15}$

$a_0 - a_1 + a_2 - a_3 = -16$

$\Leftrightarrow a_0 - 15 - 9 - 1 = -16 \mid +25$

$\Leftrightarrow \boxed{a_0 = 9}$

$\underline{\underline{f(x) = x^3 - 9x^2 + 15x + 9}}$

A9	Ausführliche Lösung
	Die Extrempunkte: $f(x)=x^3-9x^2+15x+9 \Rightarrow f'(x)=3x^2-18x+15 \Rightarrow f''(x)=6x-18$ $f'(x)=0 \Leftrightarrow 3x^2-18x+15=0 \;\vert :3$ $\Leftrightarrow x^2-6x+5=0$ $p=-6 \qquad q=5 \qquad D=\left(\frac{p}{2}\right)^2-q=9-5=4 \Rightarrow \sqrt{D}=\sqrt{4}=2$ $x_{1/2}=-\frac{p}{2}\pm\sqrt{D}\;\Big\vert\; \begin{matrix} x_1=3+2=5 \\ x_2=3-2=1 \end{matrix}$ Stellen mit waagerechter Tangente $f''(x_1)=f''(5)=30-18=12>0 \Rightarrow$ rel. Min. bei $x_1=5$ $f''(x_2)=f''(1)=6-18=-12<0 \Rightarrow$ rel. Max. bei $x_2=1$ $f(x_1)=f(5)=125-225+75+9=-16 \Rightarrow \underline{\underline{P_{Min}(5\,\vert\,-16)}}$ $f(x_2)=f(1)=1-9+15+9=16 \qquad \Rightarrow \underline{\underline{P_{Max}(1\,\vert\,16)}}$

A9	Ausführliche Lösung
	Wendepunkt und Wendetangente: $f(x)=x^3-9x^2+15x+9 \Rightarrow f'(x)=3x^2-18x+15$ $\Rightarrow f''(x)=6x-18 \Rightarrow f'''(x)=6$ $f''(x)=0 \Leftrightarrow 6x-18=0 \;\vert +18$ $\Leftrightarrow 6x=18 \;\vert :6$ $\Leftrightarrow x=3$ ist mögliche Wendestelle $f'''(x)=f'''(3)=6\neq 0 \Rightarrow x=x_w=3$ ist Wendestelle $f(x_w)=f(3)=27-81+45+9=0 \Rightarrow \underline{\underline{P_w(3\,\vert\,0)}}$ Die Wendestelle $x_w=3$ ist Nullstelle. $t(x)=f'(x_w)(x-x_w)+f(x_w)$ $f'(x_w)=f'(3)=27-54+15=-12 \qquad f(x_w)=f(3)=0$ $\Rightarrow t(x)=-12(x-3)+0=\underline{\underline{-12x+36}}$

A9 Ausführliche Lösung

Die Achsenschnittpunkte von $f(x) = x^3 - 9x^2 + 15x + 9$

$f(0) = 9 \Rightarrow \underline{\underline{P_y(0\,|\,9)}}$

$f(x) = 0 \Leftrightarrow x^3 - 9x^2 + 15x + 9 = 0$

$P_w(3\,|\,0) \Rightarrow x_1 = 3$ ist bereits als Nullstelle bekannt $\Rightarrow \underline{\underline{P_{x1}(3\,|\,0)}}$

$$\begin{array}{lrrrr} & 1 & -9 & 15 & 9 \\ x = 3 & \downarrow & \underline{3} & \underline{-18} & \underline{-9} \\ & 1 & -6 & -3 & 0 \end{array} \quad \Rightarrow \text{Restpolynom } x^2 - 6x - 3 = 0$$

$p = -6 \qquad q = -3 \qquad D = \left(\frac{p}{2}\right)^2 - q = 9 + 3 = 12 \Rightarrow \sqrt{D} = \sqrt{12}$

$$x_{2/3} = -\frac{p}{2} \pm \sqrt{D} \left| \begin{array}{l} x_2 = 3 - \sqrt{12} \approx -0,46 \Rightarrow \underline{\underline{P_{x2}\left(3 - \sqrt{12} \approx -0,46\,|\,0\right)}} \\ x_3 = 3 + \sqrt{12} \approx 6,46 \Rightarrow \underline{\underline{P_{x3}\left(3 + \sqrt{12} \approx 6,46\,|\,0\right)}} \end{array} \right.$$

A9 Ausführliche Lösung

Wertetabelle : Bereits bekannt sind

$P_1(-1\,|\,-16)$ $\quad P_2(2\,|\,11)$ $\quad P_3(4\,|\,-11)$ $\quad P_4(6\,|\,-9)$

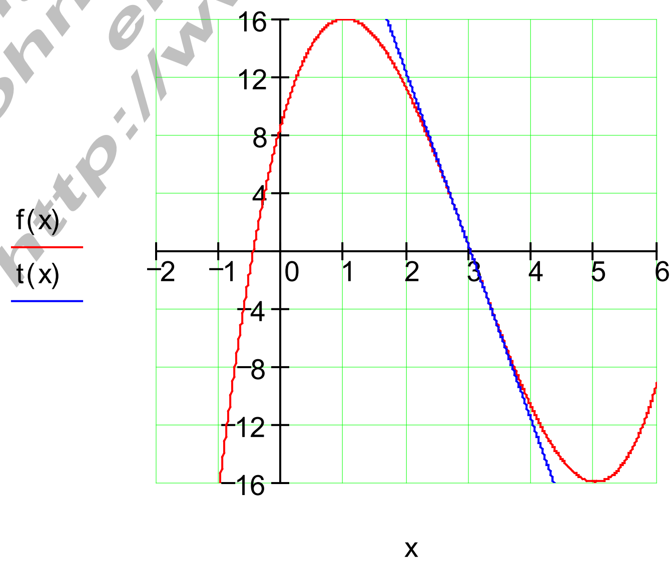
$P_{Min}(5\,|\,-16)$ $\quad P_{Max}(1\,|\,16)$ $\quad P_w(3\,|\,0)$

$P_{x1}(3\,|\,0)$ $\quad P_{x2}(-0,46\,|\,16)$ $\quad P_{x3}(6,46\,|\,0)$ $\quad P_y(0\,|\,9)$

Das sind genügend Punkte für die Wertetabelle.

x	−1	−0,46	0	1	2	3	4	5	6	6,46
f(x)	−16	0	9	16	11	0	−11	−16	−9	0

A9 Ausführliche Lösung



A9	Ausführliche Lösung
	Symmetriebetrachtung: Es gibt keine Symmetrie, da es weder nur gerade, noch nur ungerade Exponenten in der Funktionsgleichung von f(x) gibt. Krümmungsverhalten: Rechtskrümmung bis $P_w \Rightarrow I_1 = \{x \mid -\infty < x < 3\}_{\mathbb{R}}$ Linkskrümmung ab $P_w \Rightarrow I_2 = \{x \mid 3 < x < \infty\}_{\mathbb{R}}$ Monotonie: monoton steigend bis $P_{Max} \Rightarrow I_3 = \{x \mid -\infty < x < 1\}_{\mathbb{R}}$ monoton fallend von P_{Max} bis $P_{Min} \Rightarrow I_4 = \{x \mid 1 < x < 5\}_{\mathbb{R}}$ monoton steigend ab $P_{Min} \Rightarrow I_5 = \{x \mid 5 < x < \infty\}_{\mathbb{R}}$ Randpunkte des Definitionsbereichs: $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to-\infty} x^3\left(1-\frac{9}{x}+\frac{15}{x^2}+\frac{9}{x^3}\right) = -\infty$ $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to\infty} x^3\left(1-\frac{9}{x}+\frac{15}{x^2}+\frac{9}{x^3}\right) = \infty$