Lösungen Differenzialrechnung zur Vorbereitung der Klassenarbeit II

Ergebnisse:

E1	Ergebnisse	
	a)	$t(x) = -4x + 10 \qquad n(x) = \frac{1}{4}x + \frac{3}{2}$
	b)	Das Dreieck hat eine Fläche von 8,5 Flächeneinheiten (FE).

E2	Ergebnisse	
	a)	Die Funktion $f(x)$ hat an den Stellen $x_{1/2} = \pm 3$ die Steigung 2
	b)	$f'(x)$ hat an den Stellen $x_{1/2} = \pm 1{,}5$ die Steigung $-0{,}25$
	c)	$t_1(x) = -\frac{2}{3}\sqrt{3} \qquad t_2(x) = \frac{2}{3}\sqrt{3}$
	d)	$t(x) = -x$
	e)	$t(x) = \left(\frac{1}{3}u^2 - 1\right)x - \frac{2}{9}u^3$
	f)	$g(x) = -\frac{1}{2}x + \frac{3}{2}$

E3	Ergebnisse	
	a)	Der Graph von f(x) ist symmetrisch zur y – Achse, da nur gerade Exponenten auftreten.
	b)	$P_{min1}\left(-\sqrt{12} \approx -3{,}46 \mid 0\right) \qquad P_{min2}\left(\sqrt{12} \approx 3{,}46 \mid 0\right) \qquad P_{max}(0 \mid 4{,}5)$
	c)	$P_{w1}(2 \mid 2) \Rightarrow t_1(x) = -2x + 6 \qquad P_{w2}(-2 \mid 2) \Rightarrow t_2(x) = 2x + 6$
	d)	$P_y(0 \mid 4{,}5) \qquad P_{x1/2}\left(-\sqrt{12} \approx -3{,}46 \mid 0\right) \qquad P_{x3/4}\left(\sqrt{12} \approx 3{,}46 \mid 0\right)$
	e)	Wertetabelle siehe „Ausführliche Lösung“.
	f)	Graph siehe „Ausführliche Lösung“.
	g)	streng monoton fallend in $\left]-\infty; -\sqrt{12}\right[$ streng monoton wachsend in $\left]-\sqrt{12}; 0\right[$ streng monoton fallend in $\left]0; \sqrt{12}\right[$ streng monoton wachsend in $\left]\sqrt{12}; \infty\right[$
	h)	Linkskrümmung in $\left]-\infty; -2\right[$ Rechtskrümmung in $\left]-2; 2\right[$ Linkskrümmung in $\left]2; \infty\right[$
	i)	$\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = \infty \qquad \lim\limits_{x \to \infty} f(x) = \infty$

E4:	Ergebnis
	Funktionsgleichung: $f(x)=\frac{1}{2}x^3-\frac{1}{2}x^2-4x+4$ Extrempunkte: $P_{min}(2\,\vert\,-2)$ $P_{max}\left(-\frac{4}{3}=-1,\overline{3}\,\vert\,\frac{196}{27}\approx 7,26\right)$ Wendepunkt: $P_w\left(\frac{1}{3}=0,\overline{3}\,\vert\,\frac{71}{27}\approx 2,63\right)$ Achsenschnittpunkte: $P_y(0\,\vert\,4)$ $P_{x1}(1\,\vert\,0)$ $P_{x2}\left(-\sqrt{8}\approx -2,83\,\vert\,0\right)$ $P_{x3}\left(\sqrt{8}\approx 2,83\,\vert\,0\right)$ Graph siehe „Ausführliche Lösung“.

Ausführliche Lösungen:

A1	Ausführliche Lösung
a)	$f(x)=\frac{1}{16}x^4-\frac{3}{2}x^2+7 \qquad x_0=2 \qquad f'(x)=\frac{1}{4}x^3-3x$ $f(x_0)=f(2)=\frac{1}{16}\cdot 16-\frac{3}{2}\cdot 4+7=1-6+7=2$ $f'(x_0)=f'(2)=\frac{1}{4}\cdot 8-3\cdot 2=2-6=-4$ $t(x)=f'(x_0)(x-x_0)+f(x_0)=-4(x-2)+2=-4x+8+2=\underline{\underline{-4x+10}}$ $n(x)=-\frac{1}{f'(x_0)}(x-x_0)+f(x_0)=\frac{1}{4}(x-2)+2=\frac{1}{4}x-\frac{1}{2}+2=\underline{\underline{\frac{1}{4}x+\frac{3}{2}}}$

A1	Ausführliche Lösung
b)	Dreiecksfläche $=A=\frac{g\cdot h}{2}$ Tangente und Normale schneiden sich im Punkt $S(x_0 \mid f(x_0))=S(2 \mid 2)$ Damit ist $h=2\,LE$ g ist der Abstand der Nullstellen von $t(x)$ und $n(x)$ $t(x)=0 \Leftrightarrow -4x+10=0 \Leftrightarrow 4x=10 \Leftrightarrow x_1=\frac{10}{4}=2{,}5$ $n(x)=0 \Leftrightarrow \frac{1}{4}x+\frac{3}{2}=0 \Leftrightarrow \frac{1}{4}x=-\frac{3}{2} \Leftrightarrow x_2=-\frac{12}{2}=-6$ $g=6+2{,}5=8{,}5 \Rightarrow A=\frac{8{,}5\cdot 2}{2}=\underline{\underline{8{,}5\,FE}}$

A2	Ausführliche Lösung
a)	$f(x)=\frac{1}{9}x^3-x \Rightarrow f'(x)=\frac{1}{3}x^2-1$ Die Steigung bei x_0 hat den Wert 2 $\Rightarrow f'(x_0)=2 \Leftrightarrow \frac{1}{3}x_0^2-1=2 \Leftrightarrow \frac{1}{3}x_0^2=3 \Leftrightarrow x_0^2=9 \Rightarrow \underline{\underline{x_{01/2}=\pm 3}}$ Die Funktion $f(x)$ hat an den Stellen $x_{1/2}=\pm 3$ die Steigung 2

A2	Ausführliche Lösung
b)	$f'(x)=\frac{1}{3}x^2-1$ ist eine Parabel und damit achsensymmetrisch. Aus $f'(1{,}5)=-0{,}25$ folgt $f'(-1{,}5)=-0{,}25$ $f'(x)$ hat an den Stellen $\underline{\underline{x_{1/2}=\pm 1{,}5}}$ die Steigung $-0{,}25$

A2	Ausführliche Lösung	
	c)	$f'(x)=0 \Leftrightarrow \frac{1}{3}x^2-1=0 \Rightarrow x_{1/2}=\pm\sqrt{3}$ $f\left(\sqrt{3}\right)=-\frac{2}{3}\sqrt{3}\,;\, f\left(-\sqrt{3}\right)=\frac{2}{3}\sqrt{3} \Rightarrow \underline{\underline{P\left(\sqrt{3}\,\vert\,-\frac{2}{3}\sqrt{3}\right);Q\left(-\sqrt{3}\,\vert\,\frac{2}{3}\sqrt{3}\right)}}$ Die Tangenten sind Geraden, die parallel zur x – Achse verlaufen: $\underline{\underline{t_1(x)=-\frac{2}{3}\sqrt{3}\,;\,t_2(x)=\frac{2}{3}\sqrt{3}}}$

A2	Ausführliche Lösung	
	d)	$f(x)=\frac{1}{9}x^3-x \Rightarrow f'(x)=\frac{1}{3}x^2-1$ Gleichung der Tangente im Ursprung: $x_0=0$ $t(x)=f'(x_0)(x-x_0)+f(x_0)$ $f'(x_0)=f'(0)=-1 \qquad f(x_0)=f(0)=0$ $\Rightarrow t(x)=-1(x-0)+0=\underline{\underline{-x}}$

A2	Ausführliche Lösung	
	e)	$f(x)=\frac{1}{9}x^3-x \Rightarrow f'(x)=\frac{1}{3}x^2-1$ Gleichung der Tangente im Punkt $P(u\,\vert\,f(u))$ $t(x)=f'(u)(x-u)+f(u)$ $f'(u)=\frac{1}{3}u^2-1 \qquad f(u)=\frac{1}{9}u^3-u$ $t(x)=\left(\frac{1}{3}u^2-1\right)(x-u)+\frac{1}{9}u^3-u=\left(\frac{1}{3}u^2-1\right)x-u\left(\frac{1}{3}u^2-1\right)+\frac{1}{9}u^3-u$ $=\left(\frac{1}{3}u^2-1\right)x-\frac{1}{3}u^3+u+\frac{1}{9}u^3-u=\left(\frac{1}{3}u^2-1\right)x-\frac{3}{9}u^3+\frac{1}{9}u^3=\underline{\underline{\left(\frac{1}{3}u^2-1\right)x-\frac{2}{9}u^3}}$

A2	Ausführliche Lösung	
	f)	Die Gerade, die f(x) in P_x (3 | 0) schneidet, ist die Normale in diesem Punkt.

$$f(x)=\frac{1}{9}x^3-x \Rightarrow f'(x)=\frac{1}{3}x^2-1 \qquad P_x(3\,|\,0)\Rightarrow x_0=3$$

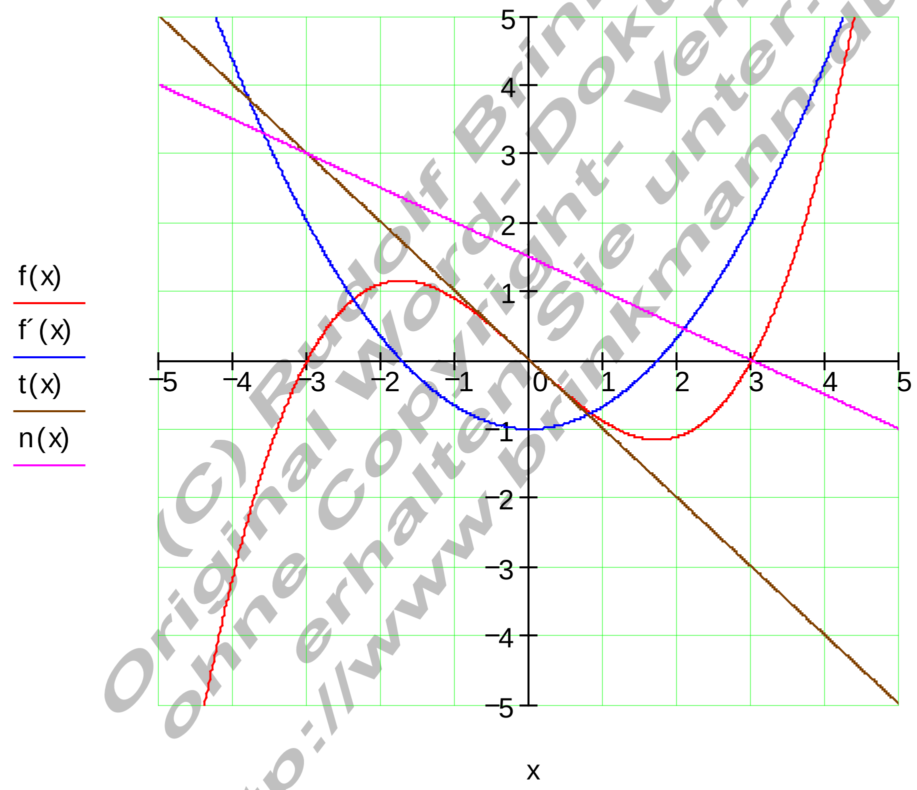
$$n(x)=-\frac{1}{f'(x_0)}(x-x_0)+f(x_0)$$

$$f'(x_0)=f'(3)=\frac{1}{3}\cdot 9-1=3-1=2$$

$$f(x_0)=f(3)=\frac{1}{9}\cdot 27-3=3-3=0$$

$$n(x)=-\frac{1}{2}(x-3)+0=\underline{\underline{-\frac{1}{2}x+\frac{3}{2}}}$$

A2	Ausführliche Lösung



A3	Ausführliche Lösung	
	a)	Der Graph von f(x) ist symmetrisch zur y – Achse, da nur gerade Exponenten auftreten.

A3 Ausführliche Lösung

b)

$$f(x)=\frac{1}{32}x^4-\frac{3}{4}x^2+\frac{9}{2}\Rightarrow f'(x)=\frac{1}{8}x^3-\frac{3}{2}x\Rightarrow f''(x)=\frac{3}{8}x^2-\frac{3}{2}$$

$$f'(x)=0\Leftrightarrow\frac{1}{8}x^3-\frac{3}{2}x=0\Leftrightarrow x\left(\frac{1}{8}x^2-\frac{3}{2}\right)=0\Rightarrow x_1=0$$

$$\frac{1}{8}x^2-\frac{3}{2}=0\Leftrightarrow\frac{1}{8}x^2=\frac{3}{2}\Leftrightarrow x^2=12\Leftrightarrow x_{2/3}=\pm\sqrt{12}$$

$x_1=0$ und $x_{2/3}=\pm\sqrt{12}$ sind Stellen mit waagerechter Tangente.

$$f''(x_1)=f''(0)=-\frac{3}{2}<0\Rightarrow\text{rel. Max. bei }x_1=0$$

$$f''(x_{2/3})=f''\left(\pm\sqrt{12}\right)=\frac{3}{8}\cdot12-\frac{3}{2}=\frac{36}{8}-\frac{3}{2}=3>0\Rightarrow\text{rel. Min. bei }x_{2/3}=\pm\sqrt{12}$$

$$f(x_1)=f(0)=\frac{9}{2}\qquad f(x_{2/3})=\frac{1}{32}\cdot144-\frac{3}{4}\cdot12+\frac{9}{2}=0$$

$$P_{max}(0\,|\,4{,}5)\qquad P_{min1}\left(-\sqrt{12}\approx-3{,}46\,|\,0\right)\qquad P_{min2}\left(\sqrt{12}\approx3{,}46\,|\,0\right)$$

A3 Ausführliche Lösung

c)

$$f(x)=\frac{1}{32}x^4-\frac{3}{4}x^2+\frac{9}{2}\Rightarrow f'(x)=\frac{1}{8}x^3-\frac{3}{2}x\Rightarrow f''(x)=\frac{3}{8}x^2-\frac{3}{2}\Rightarrow f'''(x)=\frac{3}{4}x$$

$$f''(x)=0\Leftrightarrow\frac{3}{8}x^2-\frac{3}{2}=0\Leftrightarrow\frac{3}{8}x^2=\frac{3}{2}\Leftrightarrow x^2=4\Leftrightarrow x_{1/2}=\pm2$$

$x_{1/2}=\pm2$ sind mögliche Wendestellen.

$$f'''(x_{1/2})=f'''(\pm2)=\frac{3}{4}\cdot(\pm2)\neq0\Rightarrow\text{Wendestellen bei }x_{1/2}=\pm2$$

$$f(x_{1/2})=f(\pm2)=\frac{1}{32}\cdot16-\frac{3}{4}\cdot4+\frac{9}{2}=\frac{1}{2}-3+\frac{9}{2}=2$$

$P_{W1}(-2\,|\,2)\quad P_{W2}(2\,|\,2)$ sind die Wendepunkte.

Wendetangenten:

$$x_0=-2\Rightarrow f(x_0)=f(-2)=2\qquad f'(x_0)=f'(-2)=-\frac{1}{8}\cdot8+\frac{3}{2}\cdot2=2$$

$$t_1(x)=2(x+2)+2=\underline{\underline{2x+6}}$$

$$x_0=2\Rightarrow f(x_0)=f(2)=2\qquad f'(x_0)=f'(2)=\frac{1}{8}\cdot8-\frac{3}{2}\cdot2=-2$$

$$t_2(x)=-2(x-2)+2=\underline{\underline{-2x+6}}$$

A3 Ausführliche Lösung

d)

$$f(0)=\frac{9}{2}\Rightarrow \underline{\underline{P_y\left(0\,|\,\frac{9}{2}\right)}}$$

$$f(x)=0\Leftrightarrow \frac{1}{32}x^4-\frac{3}{4}x^2+\frac{9}{2}=0 \text{ (biquadratische Gleichung)}$$

$$x^2=z\Rightarrow \frac{1}{32}z^2-\frac{3}{4}z+\frac{9}{2}=0|\cdot 32\Leftrightarrow z^2-24z+144=0$$

$$p=-24\qquad q=144\qquad \Rightarrow D=144-144=0\Rightarrow \sqrt{D}=\sqrt{0}=0$$

$$z_{1/2}=-\frac{p}{2}\pm\sqrt{D}=12\pm 0=12$$

$$z_1=x^2\Leftrightarrow 12=x^2\Leftrightarrow x_{1/2}=\pm\sqrt{12}\qquad z_2=x^2\Leftrightarrow 12=x^2\Leftrightarrow x_{3/4}=\pm\sqrt{12}$$

$$\underline{\underline{P_{x1/3}\left(\sqrt{12}\approx 3,46\,|\,0\right)}}\qquad \underline{\underline{P_{x1/3}\left(-\sqrt{12}\approx -3,46\,|\,0\right)}}$$

A3 Ausführliche Lösung

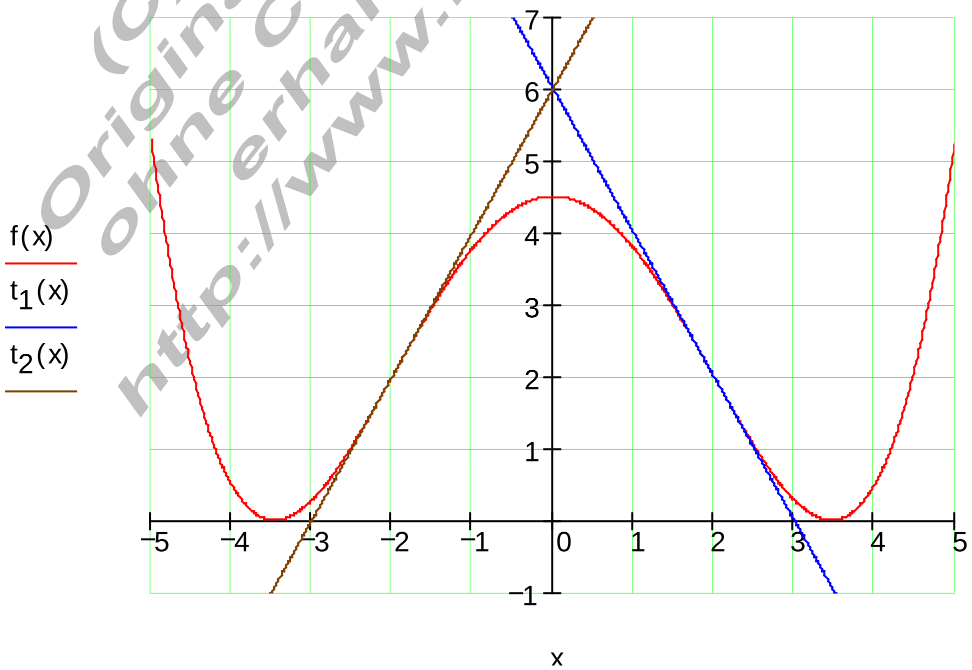
e) Funktionswerte wurden mit dem Taschenrechner berechnet.
Aus Symmetriegründen reicht es, nur die Funktionswerte für positive x-Werte zu berechnen.

x	-5	-4	$-\sqrt{12}\approx -3,46$	-3	-2	-1	0
$f(x)$	5,28	0,5	0	0,28	2	3,78	4,5

x	1	2	3	$\sqrt{12}\approx 3,46$	4	5
$f(x)$	3,78	2	0,28	0	0,5	5,28

A3 Ausführliche Lösung

f)



A3	Ausführliche Lösung	
	g)	streng monoton fallend in $\left]-\infty\,;-\sqrt{12}\right[$ streng monoton wachsend in $\left]-\sqrt{12}\,;0\right[$ streng monoton fallend in $\left]0\,;\sqrt{12}\right[$ streng monoton wachsend in $\left]\sqrt{12}\,;\infty\right[$ Das Monotonieverhalten wurde aus dem Graphen abgelesen. Änderungen erfolgen an den Extremstellen.

A3	Ausführliche Lösung	
	h)	Linkskrümmung in $\left]-\infty\,;-2\right[$ Rechtskrümmung in $\left]-2\,;2\right[$ Linkskrümmung in $\left]2\,;\infty\right[$ Das Krümmungsverhalten wurde aus dem Graphen abgelesen. Änderungen erfolgen an den Wendestellen.

A3	Ausführliche Lösung	
	i)	$\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to-\infty} x^4\left[\frac{1}{32}-\frac{3}{4}\cdot\underbrace{\frac{1}{x^2}}_{\to 0}+\frac{9}{2}\cdot\underbrace{\frac{1}{x^4}}_{\to 0}\right]=\infty$ $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to\infty} x^4\left[\frac{1}{32}-\frac{3}{4}\cdot\underbrace{\frac{1}{x^2}}_{\to 0}+\frac{9}{2}\cdot\underbrace{\frac{1}{x^4}}_{0}\right]=\infty$

A4 Ausführliche Lösung

Berechnung der Funktionsgleichung:

$$f(x) = a_3x^3 + a_2x^2 + a_1x + a_0$$

$$\begin{array}{llllllll}
P_1(-1\,|\,7) & \Rightarrow & f(-1) & = & 7 & \Leftrightarrow & -1a_3 + 1a_2 - 1a_1 + 1a_0 & = 7 \\
P_2(-2\,|\,6) & \Rightarrow & f(-2) & = & 6 & \Leftrightarrow & -8a_3 + 4a_2 - 2a_1 + 1a_0 & = 6 \\
P_3(3\,|\,1) & \Rightarrow & f(3) & = & 1 & \Leftrightarrow & 27a_3 + 9a_2 + 3a_1 + 1a_0 & = 1 \\
P_4(-3\,|\,2) & \Rightarrow & f(-3) & = & 2 & \Leftrightarrow & -27a_3 + 9a_2 - 3a_1 + 1a_0 & = 2
\end{array}$$

a_0	a_1	a_2	a_3		
1	–1	1	–1	7	
1	–2	4	–8	6	II – I
1	3	9	27	1	III – I
1	–3	9	–27	2	IV – I
1	–1	1	–1	7	
0	–1	3	–7	–1	
0	4	8	28	–6	III + 4 · II
0	–2	8	–26	–9	IV – 2 · II
1	–1	1	–1	7	
0	–1	3	–7	–1	
0	0	20	0	–10	
0	0	2	–12	–7	

$$20a_2 = -10\,|\,20 \Leftrightarrow a_2 = -\frac{1}{2}$$

$$2a_2 - 12a_3 = -7 \Rightarrow 2\cdot\frac{1}{2} - 12a_3 = -7\,|\,+1$$

$$\Leftrightarrow -12a_3 = -6\,|\,(-12) \Leftrightarrow a_3 = \frac{1}{2}$$

$$-a_1 + 3a_2 - 7a_3 = -1$$

$$\Leftrightarrow -a_1 + 3\cdot\left(-\frac{1}{2}\right) - 7\cdot\frac{1}{2} = -1$$

$$\Leftrightarrow -a_1 - \frac{3}{2} - \frac{7}{2} = -1 \Leftrightarrow -a_1 - 5 = -1\,|\,+5$$

$$\Leftrightarrow -a_1 = 4\,|\cdot(-1) \Leftrightarrow a_1 = -4$$

$$a_0 - a_1 + a_2 - a_3 = 7$$

$$\Leftrightarrow a_0 + 4 - \frac{1}{2} - \frac{1}{2} = 7$$

$$\Leftrightarrow a_0 + 3 = 7\,|\,-3 \Leftrightarrow a_0 = 4$$

$$\underline{\underline{f(x) = \frac{1}{2}x^3 - \frac{1}{2}x^2 - 4x + 4}}$$

A4 Ausführliche Lösung

Extrempunkte:

$$f(x)=\frac{1}{2}x^3-\frac{1}{2}x^2-4x+4 \Rightarrow f'(x)=\frac{3}{2}x^2-x-4 \Rightarrow f''(x)=3x-1$$

$$f'(x)=0 \Leftrightarrow \frac{3}{2}x^2-x-4=0\,|\cdot\frac{2}{3} \Leftrightarrow x^2-\frac{2}{3}x-\frac{8}{3}=0 \Rightarrow p=-\frac{2}{3};\, q=-\frac{8}{3}$$

$$D=-\left(\frac{p}{2}\right)^2-q=\frac{1}{9}+\frac{8}{3}=\frac{25}{9} \Rightarrow \sqrt{D}=\sqrt{\frac{25}{9}}=\frac{5}{3}$$

$$x_{1/2}=-\frac{p}{2}\pm\sqrt{D} \quad \left| \begin{array}{l} x_1=\frac{1}{3}+\frac{5}{3}=2 \\ x_2=\frac{1}{3}-\frac{5}{3}=-\frac{4}{3} \end{array} \right.$$

$$f''(x_1)=f''(2)=3\cdot2-1=6-1=5>0 \Rightarrow \text{rel. Min. bei } x_1=2$$

$$f''(x_2)=f''\left(-\frac{4}{3}\right)=3\cdot\left(-\frac{4}{3}\right)-1=-4-1=-5<0 \Rightarrow \text{rel. Max. bei } x_2=-\frac{4}{3}$$

$$f(x_1)=f(2)=\frac{1}{2}\cdot8-\frac{1}{2}\cdot4-4\cdot2+4=4-2-8+4=-2 \Rightarrow \underline{\underline{P_{Min}(2\,|\,-2)}}$$

$$f(x_2)=f\left(-\frac{4}{3}\right)=-\frac{1}{2}\cdot\frac{64}{27}-\frac{1}{2}\cdot\frac{16}{9}+4\cdot\frac{4}{3}+4=-\frac{64}{54}-\frac{16}{18}+\frac{16}{3}+4$$

$$=-\frac{64}{54}-\frac{48}{54}+\frac{288}{54}+\frac{216}{54}=\frac{392}{54}=\frac{196}{27} \Rightarrow \underline{\underline{P_{Max}\left(-\frac{4}{3}\approx1,33\,\middle|\,\frac{196}{27}\approx7,26\right)}}$$

A4 Ausführliche Lösung

Wendepunkt:

$$f(x)=\frac{1}{2}x^3-\frac{1}{2}x^2-4x+4 \Rightarrow f'(x)=\frac{3}{2}x^2-x-4 \Rightarrow f''(x)=3x-1 \Rightarrow f'''(x)=3$$

$$f''(x)=0 \Leftrightarrow 3x-1=0\,|+1 \Leftrightarrow 3x=1\,|:3 \Leftrightarrow x_w=\frac{1}{3} \text{ mögliche Wendestelle}$$

$$f'''(x_w)=f'''\left(\frac{1}{3}\right)=3\neq0 \Rightarrow x_w=\frac{1}{3} \text{ ist eine Wendestelle}$$

$$f(x_w)=f\left(\frac{1}{3}\right)=\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{27}-\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{9}-4\cdot\frac{1}{3}+4=\frac{1}{54}-\frac{1}{18}-\frac{4}{3}+4$$

$$=\frac{1}{54}-\frac{3}{54}-\frac{72}{54}+\frac{216}{54}=\frac{142}{54}=\frac{71}{27} \Rightarrow \underline{\underline{P_w\left(\frac{1}{3}\approx0,33\,\middle|\,\frac{71}{27}\approx2,63\right)}}$$

A4 Ausführliche Lösung

Achsenschnittpunkte:

$$f(x) = \frac{1}{2}x^3 - \frac{1}{2}x^2 - 4x + 4 \qquad f(0) = 4 \Rightarrow \underline{\underline{P_y(0 \mid 4)}}$$

$$f(x) = 0 \Leftrightarrow \frac{1}{2}x^3 - \frac{1}{2}x^2 - 4x + 4 = 0 \text{ erste Nullstelle durch probieren}$$

Horner – Schema:

$$\begin{array}{lcccc} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & -4 & 4 \\ x = 1 & \downarrow & \underline{\frac{1}{2}} & \underline{0} & \underline{-4} \quad f(1) = 0 \Rightarrow x_1 = 1 \\ & \frac{1}{2} & 0 & -4 & 0 \end{array}$$

Restpolynom:

$$\frac{1}{2}x^2 - 4 = 0 \mid +4 \Leftrightarrow \frac{1}{2}x^2 = 4 \mid \cdot 2 \Leftrightarrow x^2 = 8 \Rightarrow x_{2/3} = \pm\sqrt{8}$$

$$\underline{\underline{P_{x1}(1 \mid 0)}} \qquad \underline{\underline{P_{x2/3}\left(\pm\sqrt{8} \approx 2{,}83 \mid 0\right)}}$$

A4 Ausführliche Lösung

Wertetabelle:

x	−3	−2,83	−2	−1,33	−1	0	0,33	1	2	2,83	3
f(x)	−2	0	6	7,26	7	4	2,63	0	−2	0	1

A4 Ausführliche Lösung