Lösungen Differenzialrechnung zur Vorbereitung der Klassenarbeit II

Ergebnisse:

E1	Ergebnisse	
	a)	$t(x) = -4x + 10 \qquad n(x) = \frac{1}{4}x + \frac{3}{2}$
	b)	Das Dreieck hat eine Fläche von 8,5 Flächeneinheiten (FE).

E2	Ergebnisse	
	a)	Die Funktion $f(x)$ hat an den Stellen $x_{1/2} = \pm 3$ die Steigung 2
	b)	$f'(x)$ hat an den Stellen $x_{1/2} = \pm 1{,}5$ die Steigung $-0{,}25$
	c)	$t_1(x) = -\frac{2}{3}\sqrt{3} \qquad t_2(x) = \frac{2}{3}\sqrt{3}$
	d)	$t(x) = -x$
	e)	$t(x) = \left(\frac{1}{3}u^2 - 1\right)x - \frac{2}{9}u^3$
	f)	$g(x) = -\frac{1}{2}x + \frac{3}{2}$

E3	Ergebnisse	
	a)	Der Graph von f(x) ist symmetrisch zur y – Achse, da nur gerade Exponenten auftreten.
	b)	$P_{min1}\left(-\sqrt{12} \approx -3{,}46 \mid 0\right) \quad P_{min2}\left(\sqrt{12} \approx 3{,}46 \mid 0\right) \quad P_{max}(0 \mid 4{,}5)$
	c)	$P_{w1}(2 \mid 2) \Rightarrow t_1(x) = -2x + 6 \quad P_{w2}(-2 \mid 2) \Rightarrow t_2(x) = 2x + 6$
	d)	$P_y(0 \mid 4{,}5) \quad P_{x1/2}\left(-\sqrt{12} \approx -3{,}46 \mid 0\right) \quad P_{x3/4}\left(\sqrt{12} \approx 3{,}46 \mid 0\right)$
	e)	Wertetabelle siehe „Ausführliche Lösung“.
	f)	Graph siehe „Ausführliche Lösung“.
	g)	streng monoton fallend in $\left]-\infty; -\sqrt{12}\right[$ streng monoton wachsend in $\left]-\sqrt{12}; 0\right[$ streng monoton fallend in $\left]0; \sqrt{12}\right[$ streng monoton wachsend in $\left]\sqrt{12}; \infty\right[$
	h)	Linkskrümmung in $\left]-\infty; -2\right[$ Rechtskrümmung in $\left]-2; 2\right[$ Linkskrümmung in $\left]2; \infty\right[$
	i)	$\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = \infty \qquad \lim\limits_{x \to \infty} f(x) = \infty$

(C) Rudolf Brinkmann Original Word-Dokumente ohne Copyright-Vermerk erhalten Sie unter: http://www.brinkmann-du.de

E4:	Ergebnis
	Funktionsgleichung: $f(x)=\frac{1}{2}x^3-\frac{1}{2}x^2-4x+4$
	Extrempunkte: $P_{min}(2\,|\,-2)$ $P_{max}\left(-\frac{4}{3}=-1,\overline{3}\,|\,\frac{196}{27}\approx 7,26\right)$
	Wendepunkt: $P_w\left(\frac{1}{3}=0,\overline{3}\,|\,\frac{71}{27}\approx 2,63\right)$
	Achsenschnittpunkte:
	$P_y(0\,|\,4)$ $P_{x1}(1\,|\,0)$ $P_{x2}\left(-\sqrt{8}\approx -2,83\,|\,0\right)$ $P_{x3}\left(\sqrt{8}\approx 2,83\,|\,0\right)$
	Graph siehe „Ausführliche Lösung“.

(C) Rudolf Brinkmann
Original Word- Dokumente
ohne Copyright- Vermerk
erhalten Sie unter:
http://www.brinkmann-du.de

Ausführliche Lösungen:

A1	**Aufgabe**	
	Gegeben ist die Funktion $f(x)=\frac{1}{16}x^4-\frac{3}{2}x^2+7$	
	a)	Die Gleichungen von Tangente und Normale sollen für $x_0 = 2$ berechnet werden.
	b	Tangente und Normale bilden mit der x- Achse zusammen ein Dreieck. Berechnen Sie dessen Flächeninhalt.

A1	**Ausführliche Lösung**	
	a)	$f(x)=\frac{1}{16}x^4-\frac{3}{2}x^2+7 \qquad x_0=2 \qquad f'(x)=\frac{1}{4}x^3-3x$ $f(x_0)=f(2)=\frac{1}{16}\cdot 16-\frac{3}{2}\cdot 4+7=1-6+7=2$ $f'(x_0)=f'(2)=\frac{1}{4}\cdot 8-3\cdot 2=2-6=-4$ $t(x)=f'(x_0)(x-x_0)+f(x_0)=-4(x-2)+2=-4x+8+2=\underline{\underline{-4x+10}}$ $n(x)=-\frac{1}{f'(x_0)}(x-x_0)+f(x_0)=\frac{1}{4}(x-2)+2=\frac{1}{4}x-\frac{1}{2}+2=\underline{\underline{\frac{1}{4}x+\frac{3}{2}}}$

A1	**Ausführliche Lösung**	
	b)	Dreiecksfläche $= A=\frac{g\cdot h}{2}$ Tangente und Normale schneiden sich im Punkt $S(x_0 \mid f(x_0))=S(2\mid 2)$ Damit ist $h = 2LE$ g ist der Abstand der Nullstellen von $t(x)$ und $n(x)$ $t(x)=0 \Leftrightarrow -4x+10=0 \Leftrightarrow 4x=10 \Leftrightarrow x_1=\frac{10}{4}=2{,}5$ $n(x)=0 \Leftrightarrow \frac{1}{4}x+\frac{3}{2}=0 \Leftrightarrow \frac{1}{4}x=-\frac{3}{2} \Leftrightarrow x_2=-\frac{12}{2}=-6$ $g=6+2{,}5=8{,}5 \Rightarrow A=\frac{8{,}5\cdot 2}{2}=\underline{\underline{8{,}5FE}}$

(C) Rudolf Brinkmann Original Word-Dokumente ohne Copyright-Vermerk erhalten Sie unter: http://www.brinkmann-du.de

A2	**Aufgabe**	
	Gegeben ist die Funktion $f(x)=\frac{1}{9}x^3-x\,;\,x\in\mathbb{R}$	
	a)	An welchen Stellen hat f(x) die Steigung 2 ?
	b)	Die Steigung von $f'(x)$ an der Stelle $x=1{,}5$ ist $-0{,}25$. Geben Sie ohne Rechnung eine weitere Stelle mit der gleichen Steigung an. Begründen Sie Ihre Vermutung.
	c)	In welchen Punkten hat f(x) eine waagerechte Tangente? Geben Sie die Gleichung an.
	d)	Bestimmen Sie die Gleichung der Tangente an f(x) im Ursprung.
	e)	Bestimmen Sie die Gleichung der Tangente an f(x) im Punkt P (u | f(u)).
	f)	Welche Gerade schneidet f(x) in P_x (3 | 0) senkrecht ?

A2	**Ausführliche Lösung**	
	a)	$f(x)=\frac{1}{9}x^3-x\Rightarrow f'(x)=\frac{1}{3}x^2-1$ Die Steigung bei x_0 hat den Wert 2 $\Rightarrow f'(x_0)=2\Leftrightarrow\frac{1}{3}x_0^2-1=2\Leftrightarrow\frac{1}{3}x_0^2=3\Leftrightarrow x_0^2=9\Rightarrow \underline{\underline{x_{01/2}=\pm3}}$ Die Funktion $f(x)$ hat an den Stellen $x_{1/2}=\pm3$ die Steigung 2

A2	**Ausführliche Lösung**	
	b)	$f'(x)=\frac{1}{3}x^2-1$ ist eine Parabel und damit achsensymmetrisch. Aus $f'(1{,}5)=-0{,}25$ folgt $f'(-1{,}5)=-0{,}25$ $f'(x)$ hat an den Stellen $\underline{\underline{x_{1/2}=\pm1{,}5}}$ die Steigung $-0{,}25$

A2	**Ausführliche Lösung**	
	c)	$f'(x)=0\Leftrightarrow\frac{1}{3}x^2-1=0\Rightarrow x_{1/2}=\pm\sqrt{3}$ $f(\sqrt{3})=-\frac{2}{3}\sqrt{3}\,;\,f(-\sqrt{3})=\frac{2}{3}\sqrt{3}\Rightarrow \underline{\underline{P\left(\sqrt{3}\,\middle\|\,-\frac{2}{3}\sqrt{3}\right);Q\left(-\sqrt{3}\,\middle\|\,\frac{2}{3}\sqrt{3}\right)}}$ Die Tangenten sind Geraden, die parallel zur x – Achse verlaufen: $\underline{\underline{t_1(x)=-\frac{2}{3}\sqrt{3}\,;\,t_2(x)=\frac{2}{3}\sqrt{3}}}$

(C) Rudolf Brinkmann Original Word-Dokumente ohne Copyright-Vermerk erhalten Sie unter: http://www.brinkmann-du.de

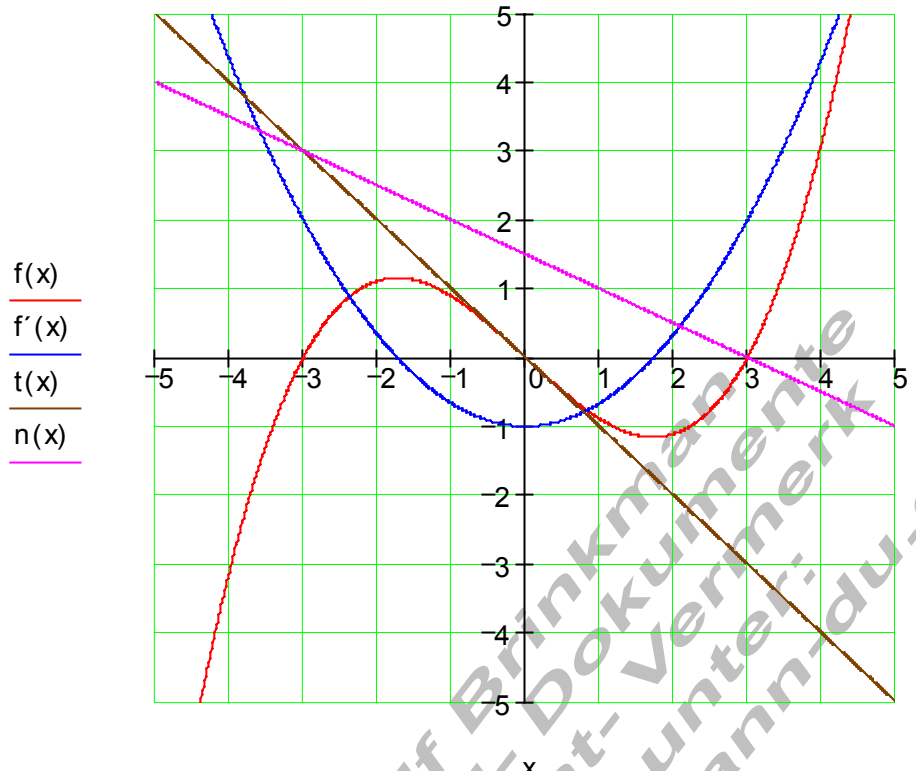
A2	**Ausführliche Lösung**
d)	$f(x)=\frac{1}{9}x^3-x \Rightarrow f'(x)=\frac{1}{3}x^2-1$
	Gleichung der Tangente im Ursprung: $x_0=0$
	$t(x)=f'(x_0)(x-x_0)+f(x_0)$
	$f'(x_0)=f'(0)=-1 \qquad f(x_0)=f(0)=0$
	$\Rightarrow t(x)=-1(x-0)+0=\underline{\underline{-x}}$

A2	**Ausführliche Lösung**
e)	$f(x)=\frac{1}{9}x^3-x \Rightarrow f'(x)=\frac{1}{3}x^2-1$
	Gleichung der Tangente im Punkt $P(u\,\vert\,f(u))$
	$t(x)=f'(u)(x-u)+f(u)$
	$f'(u)=\frac{1}{3}u^2-1 \qquad f(u)=\frac{1}{9}u^3-u$
	$t(x)=\left(\frac{1}{3}u^2-1\right)(x-u)+\frac{1}{9}u^3-u=\left(\frac{1}{3}u^2-1\right)x-u\left(\frac{1}{3}u^2-1\right)+\frac{1}{9}u^3-u$
	$=\left(\frac{1}{3}u^2-1\right)x-\frac{1}{3}u^3+u+\frac{1}{9}u^3-u=\left(\frac{1}{3}u^2-1\right)x-\frac{3}{9}u^3+\frac{1}{9}u^3=\underline{\underline{\left(\frac{1}{3}u^2-1\right)x-\frac{2}{9}u^3}}$

A2	**Ausführliche Lösung**
f)	Die Gerade, die f(x) in P_x (3 | 0) schneidet, ist die Normale in diesem Punkt.
	$f(x)=\frac{1}{9}x^3-x \Rightarrow f'(x)=\frac{1}{3}x^2-1 \qquad P_x(3\,\vert\,0) \Rightarrow x_0=3$
	$n(x)=-\frac{1}{f'(x_0)}(x-x_0)+f(x_0)$
	$f'(x_0)=f'(3)=\frac{1}{3}\cdot 9-1=3-1=2$
	$f(x_0)=f(3)=\frac{1}{9}\cdot 27-3=3-3=0$
	$n(x)=-\frac{1}{2}(x-3)+0=\underline{\underline{-\frac{1}{2}x+\frac{3}{2}}}$

(C) Rudolf Brinkman
Original Word-Dokumente
ohne Copyright-Vermerk
erhalten Sie unter:
http://www.brinkmann-du.de

A2	**Ausführliche Lösung**



(C) Rudolf Brinkmann
Original Word-Dokumente
ohne Copyright-Vermerk
erhalten Sie unter:
http://www.brinkmann-du.de

A3	**Aufgabe**	
	Gegeben ist eine ganzrationale Funktion 4. Grades: $f(x)=\frac{1}{32}x^4-\frac{3}{4}x^2+\frac{9}{2}$	
	a)	Ist der Funktionsgraph symmetrisch? Falls ja, welcher Art ist die Symmetrie? Begründen Sie Ihre Entscheidung.
	b)	Berechnen sie die relativen Extrema (Hochpunkte, Tiefpunkte).
	c)	Berechnen Sie die Wendepunkte und die Funktionsgleichungen der Wendetangenten.
	d)	Berechnen Sie die Achsenschnittpunkte.
	e)	Stellen Sie mit allen bisher bekannten Punkten eine Wertetabelle auf.
	f)	Zeichnen Sie den Graphen möglichst genau in ein Koordinatensystem und kennzeichnen Sie die markanten Punkte. (Falls nötig, erweitern Sie dazu Ihre Wertetabelle um einige Punkte. Gezeichnet werden soll im Intervall I = [-5 ; 5] Maßstab: 1 cm ist eine Einheit.)
	g)	Machen Sie eine Aussage über das Monotonieverhalten des Graphen, d.h. geben Sie die Intervalle für monoton wachsend, bzw. monoton fallend an.
	h)	Machen Sie eine Aussage über das Krümmungsverhalten des Graphen, d.h. geben Sie die Intervalle für Rechts- bzw. Linkskrümmung an.
	i)	Bestimmen Sie die Randpunkte des Definitionsbereiches.

A3	**Ausführliche Lösung**	
	a)	Der Graph von f(x) ist symmetrisch zur y – Achse, da nur gerade Exponenten auftreten.

A3	**Ausführliche Lösung**	
	b)	$f(x)=\frac{1}{32}x^4-\frac{3}{4}x^2+\frac{9}{2}\Rightarrow f'(x)=\frac{1}{8}x^3-\frac{3}{2}x\Rightarrow f''(x)=\frac{3}{8}x^2-\frac{3}{2}$ $f'(x)=0\Leftrightarrow\frac{1}{8}x^3-\frac{3}{2}x=0\Leftrightarrow x\left(\frac{1}{8}x^2-\frac{3}{2}\right)=0\Rightarrow x_1=0$ $\frac{1}{8}x^2-\frac{3}{2}=0\Leftrightarrow\frac{1}{8}x^2=\frac{3}{2}\Leftrightarrow x^2=12\Leftrightarrow x_{2/3}=\pm\sqrt{12}$ $x_1=0$ und $x_{2/3}=\pm\sqrt{12}$ sind Stellen mit waagerechter Tangente. $f''(x_1)=f''(0)=-\frac{3}{2}<0\Rightarrow$ rel. Max. bei $x_1=0$ $f''(x_{2/3})=f''(\pm\sqrt{12})=\frac{3}{8}\cdot 12-\frac{3}{2}=\frac{36}{8}-\frac{3}{2}=3>0\Rightarrow$ rel. Min. bei $x_{2/3}=\pm\sqrt{12}$ $f(x_1)=f(0)=\frac{9}{2}$ $\quad f(x_{2/3})=\frac{1}{32}\cdot 144-\frac{3}{4}\cdot 12+\frac{9}{2}=0$ $P_{max}(0\mid 4{,}5)$ $\quad P_{min1}(-\sqrt{12}\approx -3{,}46\mid 0)$ $\quad P_{min2}(\sqrt{12}\approx 3{,}46\mid 0)$

(C) Rudolf Brinkmann Original Word-Dokumente ohne Copyright-Vermerk erhalten Sie unter: http://www.brinkmann-du.de

A3	**Ausführliche Lösung**
c)	$f(x)=\frac{1}{32}x^4-\frac{3}{4}x^2+\frac{9}{2}\Rightarrow f'(x)=\frac{1}{8}x^3-\frac{3}{2}x\Rightarrow f''(x)=\frac{3}{8}x^2-\frac{3}{2}\Rightarrow f'''(x)=\frac{3}{4}x$
	$f''(x)=0\Leftrightarrow\frac{3}{8}x^2-\frac{3}{2}=0\Leftrightarrow\frac{3}{8}x^2=\frac{3}{2}\Leftrightarrow x^2=4\Leftrightarrow x_{1/2}=\pm2$
	$x_{1/2}=\pm2$ sind mögliche Wendestellen.
	$f'''(x_{1/2})=f'''(\pm2)=\frac{3}{4}\cdot(\pm2)\neq0\Rightarrow$ Wendestellen bei $x_{1/2}=\pm2$
	$f(x_{1/2})=f(\pm2)=\frac{1}{32}\cdot16-\frac{3}{4}\cdot4+\frac{9}{2}=\frac{1}{2}-3+\frac{9}{2}=2$
	$P_{W1}(-2\mid2)$ $P_{W2}(2\mid2)$ sind die Wendepunkte.
	Wendetangenten:
	$x_0=-2\Rightarrow f(x_0)=f(-2)=2$ $f'(x_0)=f'(-2)=-\frac{1}{8}\cdot8+\frac{3}{2}\cdot2=2$
	$t_1(x)=2(x+2)+2=\underline{\underline{2x+6}}$
	$x_0=2\Rightarrow f(x_0)=f(2)=2$ $f'(x_0)=f'(2)=\frac{1}{8}\cdot8-\frac{3}{2}\cdot2=-2$
	$t_2(x)=-2(x-2)+2=\underline{\underline{-2x+6}}$

A3	**Ausführliche Lösung**
d)	$f(0)=\frac{9}{2}\Rightarrow\underline{\underline{P_y\left(0\mid\frac{9}{2}\right)}}$
	$f(x)=0\Leftrightarrow\frac{1}{32}x^4-\frac{3}{4}x^2+\frac{9}{2}=0$ (biquadratische Gleichung)
	$x^2=z\Rightarrow\frac{1}{32}z^2-\frac{3}{4}z+\frac{9}{2}=0\mid\cdot32\Leftrightarrow z^2-24z+144=0$
	$p=-24$ $q=144$ $\Rightarrow D=144-144=0\Rightarrow\sqrt{D}=\sqrt{0}=0$
	$z_{1/2}=-\frac{p}{2}\pm\sqrt{D}=12\pm0=12$
	$z_1=x^2\Leftrightarrow12=x^2\Leftrightarrow x_{1/2}=\pm\sqrt{12}$ $z_2=x^2\Leftrightarrow12=x^2\Leftrightarrow x_{3/4}=\pm\sqrt{12}$
	$\underline{\underline{P_{x1/3}\left(\sqrt{12}\approx3{,}46\mid0\right)}}$ $\underline{\underline{P_{x1/3}\left(-\sqrt{12}\approx-3{,}46\mid0\right)}}$

(c) Rudolf Brinkmann Original Word-Dokumente ohne Copyright-Vermerk erhalten Sie unter: http://www.brinkmann-du.de

A3 Ausführliche Lösung

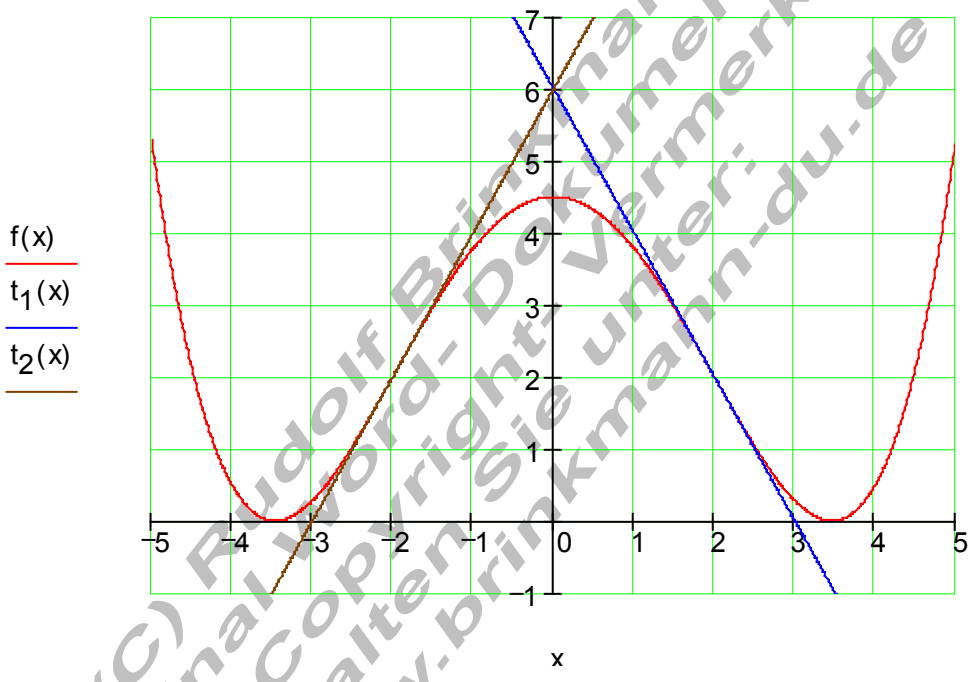
e) Funktionswerte wurden mit dem Taschenrechner berechnet.
Aus Symmetriegründen reicht es, nur die Funktionswerte für positive x-Werte zu berechnen.

x	-5	-4	$-\sqrt{12} \approx -3{,}46$	-3	-2	-1	0
$f(x)$	$5{,}28$	$0{,}5$	0	$0{,}28$	2	$3{,}78$	$4{,}5$

x	1	2	3	$\sqrt{12} \approx 3{,}46$	4	5
$f(x)$	$3{,}78$	2	$0{,}28$	0	$0{,}5$	$5{,}28$

A3 Ausführliche Lösung

f)



(C) Rudolf Brinkmann Original Word-Dokumente ohne Copyright-Vermerk erhalten Sie unter: http://www.brinkmann-du.de

A3 Ausführliche Lösung

g) streng monoton fallend in $\left]-\infty;-\sqrt{12}\right[$

streng monoton wachsend in $\left]-\sqrt{12};0\right[$

streng monoton fallend in $\left]0;\sqrt{12}\right[$

streng monoton wachsend in $\left]\sqrt{12};\infty\right[$

Das Monotonieverhalten wurde aus dem Graphen abgelesen.
Änderungen erfolgen an den Extremstellen.

A3 Ausführliche Lösung

h) Linkskrümmung in $\left]-\infty;-2\right[$ Rechtskrümmung in $\left]-2;2\right[$

Linkskrümmung in $\left]2;\infty\right[$

Das Krümmungsverhalten wurde aus dem Graphen abgelesen.
Änderungen erfolgen an den Wendestellen.

A3	**Ausführliche Lösung**
	i) $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to-\infty} x^4\left[\frac{1}{32} - \underbrace{\frac{3}{4}\cdot\frac{1}{x^2}}_{\to 0} + \underbrace{\frac{9}{2}\cdot\frac{1}{x^4}}_{\to 0}\right] = \infty$ $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to\infty} x^4\left[\frac{1}{32} - \underbrace{\frac{3}{4}\cdot\frac{1}{x^2}}_{\to 0} + \underbrace{\frac{9}{2}\cdot\frac{1}{x^4}}_{0}\right] = \infty$ Für große x- Werte, sowohl in negativer, wie auch positiver Richtung, werden die Funktionswerte in positiver Richtung immer größer. Man sagt, wenn die Werte für x- Betrag gegen unendlich streben, dann streben auch die Funktionswerte gegen plus unendlich.

(C) Rudolf Brinkmann
Original Word- Dokumente
ohne Copyright- Vermerk
erhalten Sie unter:
http://www.brinkmann-du.de

A4	**Aufgabe**
	Der Graph einer ganzrationalen Funktion geht durch die Punkte $P_1(-1\,|\,7)$ $P_2(-2\,|\,6)$ $P_3(3\,|\,1)$ $P_4(-3\,|\,-2)$ Berechnen Sie die Funktionsgleichung, die Extrempunkte, den Wendpunkt und die Achsenschnittpunkte. Stellen Sie eine Wertetabelle auf und zeichnen Sie den Graphen so genau wie möglich in ein geeignetes Koordinatensystem. Falls Ihnen zum Zeichnen Punkte fehlen, so berechnen Sie diese.

A4 Ausführliche Lösung

Berechnung der Funktionsgleichung:

$f(x) = a_3x^3 + a_2x^2 + a_1x + a_0$

$$
\begin{array}{llllll}
P_1(-1\,|\,7) & \Rightarrow & f(-1) & = & 7 & \Leftrightarrow & -1a_3 + 1a_2 - 1a_1 + 1a_0 = 7 \\
P_2(-2\,|\,6) & \Rightarrow & f(-2) & = & 6 & \Leftrightarrow & -8a_3 + 4a_2 - 2a_1 + 1a_0 = 6 \\
P_3(3\,|\,1) & \Rightarrow & f(3) & = & 1 & \Leftrightarrow & 27a_3 + 9a_2 + 3a_1 + 1a_0 = 1 \\
P_4(-3\,|\,2) & \Rightarrow & f(-3) & = & 2 & \Leftrightarrow & -27a_3 + 9a_2 - 3a_1 + 1a_0 = 2
\end{array}
$$

a_0	a_1	a_2	a_3		
1	−1	1	−1	7	
1	−2	4	−8	6	II − I
1	3	9	27	1	III − I
1	−3	9	−27	2	IV − I
1	−1	1	−1	7	
0	−1	3	−7	−1	
0	4	8	28	−6	III + 4 · II
0	−2	8	−26	−9	IV − 2 · II
1	−1	1	−1	7	
0	−1	3	−7	−1	
0	0	20	0	−10	
0	0	2	−12	−7	

$20a_2 = -10\,|\,20 \Leftrightarrow a_2 = -\frac{1}{2}$

$2a_2 - 12a_3 = -7 \Rightarrow 2 \cdot \frac{1}{2} - 12a_3 = -7\,|\,+1$

$\Leftrightarrow -12a_3 = -6\,|\,(-12) \Leftrightarrow a_3 = \frac{1}{2}$

$-a_1 + 3a_2 - 7a_3 = -1$

$\Leftrightarrow -a_1 + 3 \cdot \left(-\frac{1}{2}\right) - 7 \cdot \frac{1}{2} = -1$

$\Leftrightarrow -a_1 - \frac{3}{2} - \frac{7}{2} = -1 \Leftrightarrow -a_1 - 5 = -1\,|\,+5$

$\Leftrightarrow -a_1 = 4\,|\,\cdot(-1) \Leftrightarrow a_1 = -4$

$a_0 - a_1 + a_2 - a_3 = 7$

$\Leftrightarrow a_0 + 4 - \frac{1}{2} - \frac{1}{2} = 7$

$\Leftrightarrow a_0 + 3 = 7\,|\,-3 \Leftrightarrow a_0 = 4$

$$\underline{\underline{f(x) = \frac{1}{2}x^3 - \frac{1}{2}x^2 - 4x + 4}}$$

(C) Rudolf Brinkmann Original Word-Dokumente ohne Copyright-Vermerk erhalten Sie unter: http://www.brinkmann-du.de

A4	**Ausführliche Lösung**

Extrempunkte:

$$f(x)=\frac{1}{2}x^3-\frac{1}{2}x^2-4x+4 \Rightarrow f'(x)=\frac{3}{2}x^2-x-4 \Rightarrow f''(x)=3x-1$$

$$f'(x)=0 \Leftrightarrow \frac{3}{2}x^2-x-4=0 \,|\cdot\frac{2}{3} \Leftrightarrow x^2-\frac{2}{3}x-\frac{8}{3}=0 \Rightarrow p=-\frac{2}{3};\, q=-\frac{8}{3}$$

$$D=-\left(\frac{p}{2}\right)^2-q=\frac{1}{9}+\frac{8}{3}=\frac{25}{9} \Rightarrow \sqrt{D}=\sqrt{\frac{25}{9}}=\frac{5}{3}$$

$$x_{1/2}=-\frac{p}{2}\pm\sqrt{D} \quad \left| \begin{array}{l} x_1=\frac{1}{3}+\frac{5}{3}=2 \\ x_2=\frac{1}{3}-\frac{5}{3}=-\frac{4}{3} \end{array} \right.$$

$$f''(x_1)=f''(2)=3\cdot 2-1=6-1=5>0 \Rightarrow \text{rel. Min. bei } x_1=2$$

$$f''(x_2)=f''\left(-\frac{4}{3}\right)=3\cdot\left(-\frac{4}{3}\right)-1=-4-1=-5<0 \Rightarrow \text{rel. Max. bei } x_2=-\frac{4}{3}$$

$$f(x_1)=f(2)=\frac{1}{2}\cdot 8-\frac{1}{2}\cdot 4-4\cdot 2+4=4-2-8+4=-2 \Rightarrow \underline{\underline{P_{Min}(2\,|\,-2)}}$$

$$f(x_2)=f\left(-\frac{4}{3}\right)=-\frac{1}{2}\cdot\frac{64}{27}-\frac{1}{2}\cdot\frac{16}{9}+4\cdot\frac{4}{3}+4=-\frac{64}{54}-\frac{16}{18}+\frac{16}{3}+4$$

$$=-\frac{64}{54}-\frac{48}{54}+\frac{288}{54}+\frac{216}{54}=\frac{392}{54}=\frac{196}{27} \Rightarrow \underline{\underline{P_{Max}\left(-\frac{4}{3}\approx 1{,}33\,\middle|\,\frac{196}{27}\approx 7{,}26\right)}}$$

A4	**Ausführliche Lösung**

Wendepunkt:

$$f(x)=\frac{1}{2}x^3-\frac{1}{2}x^2-4x+4 \Rightarrow f'(x)=\frac{3}{2}x^2-x-4 \Rightarrow f''(x)=3x-1 \Rightarrow f'''(x)=3$$

$$f''(x)=0 \Leftrightarrow 3x-1=0\,|+1 \Leftrightarrow 3x=1\,|:3 \Leftrightarrow x_w=\frac{1}{3} \text{ mögliche Wendestelle}$$

$$f'''(x_w)=f'''\left(\frac{1}{3}\right)=3\neq 0 \Rightarrow x_w=\frac{1}{3} \text{ ist eine Wendestelle}$$

$$f(x_w)=f\left(\frac{1}{3}\right)=\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{27}\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{9}-4\cdot\frac{1}{3}+4=\frac{1}{54}-\frac{1}{18}-\frac{4}{3}+4$$

$$=\frac{1}{54}-\frac{3}{54}-\frac{72}{54}+\frac{216}{54}=\frac{142}{54}=\frac{71}{27} \Rightarrow \underline{\underline{P_w\left(\frac{1}{3}\approx 0{,}33\,\middle|\,\frac{71}{27}\approx 2{,}63\right)}}$$

(C) Rudolf Brinkman Original Word-Dokumente ohne Copyright-Vermerk erhalten Sie unter: http://www.brinkmann-du.de

A4 Ausführliche Lösung

Achsenschnittpunkte:

$$f(x)=\frac{1}{2}x^3-\frac{1}{2}x^2-4x+4 \qquad f(0)=4 \Rightarrow \underline{\underline{P_y(0\,|\,4)}}$$

$$f(x)=0 \Leftrightarrow \frac{1}{2}x^3-\frac{1}{2}x^2-4x+4=0 \text{ erste Nullstelle durch probieren}$$

Horner – Schema:

$$\begin{array}{lcccc} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & -4 & 4 \\ x=1 \downarrow & \underline{\frac{1}{2}} & \underline{0} & \underline{-4} & \\ & \frac{1}{2} & 0 & -4 & 0 \end{array} \qquad f(1)=0 \Rightarrow x_1=1$$

Restpolynom:

$$\frac{1}{2}x^2-4=0\,|+4 \Leftrightarrow \frac{1}{2}x^2=4\,|\cdot 2 \Leftrightarrow x^2=8 \Rightarrow x_{2/3}=\pm\sqrt{8}$$

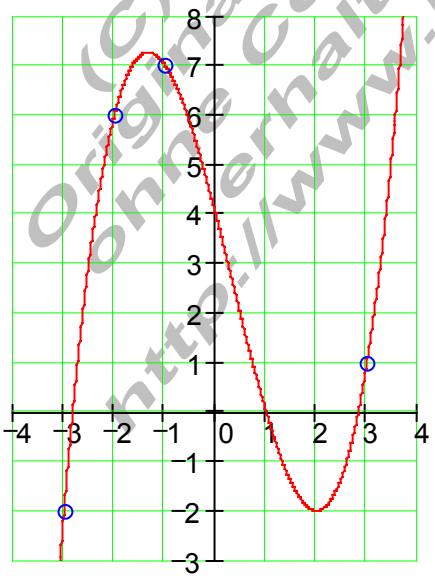
$$\underline{\underline{P_{x1}(1\,|\,0)}} \qquad \underline{\underline{P_{x2/3}\left(\pm\sqrt{8}\approx 2{,}83\,|\,0\right)}}$$

A4 Ausführliche Lösung

Wertetabelle:

x	−3	−2,83	−2	−1,33	−1	0	0,33	1	2	2,83	3
f(x)	−2	0	6	7,26	7	4	2,63	0	−2	0	1

A4 Ausführliche Lösung



(C) Rudolf Brinkman
Original Word- Dokumente
ohne Copyright- Vermerk
erhalten Sie unter:
http://www.brinkmann-du.de