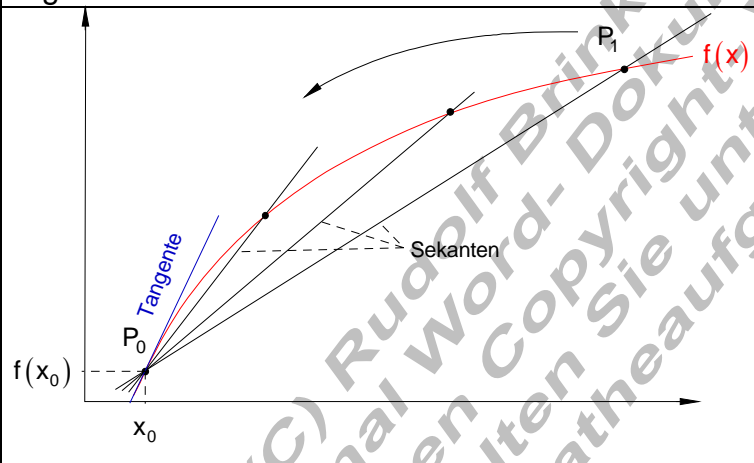


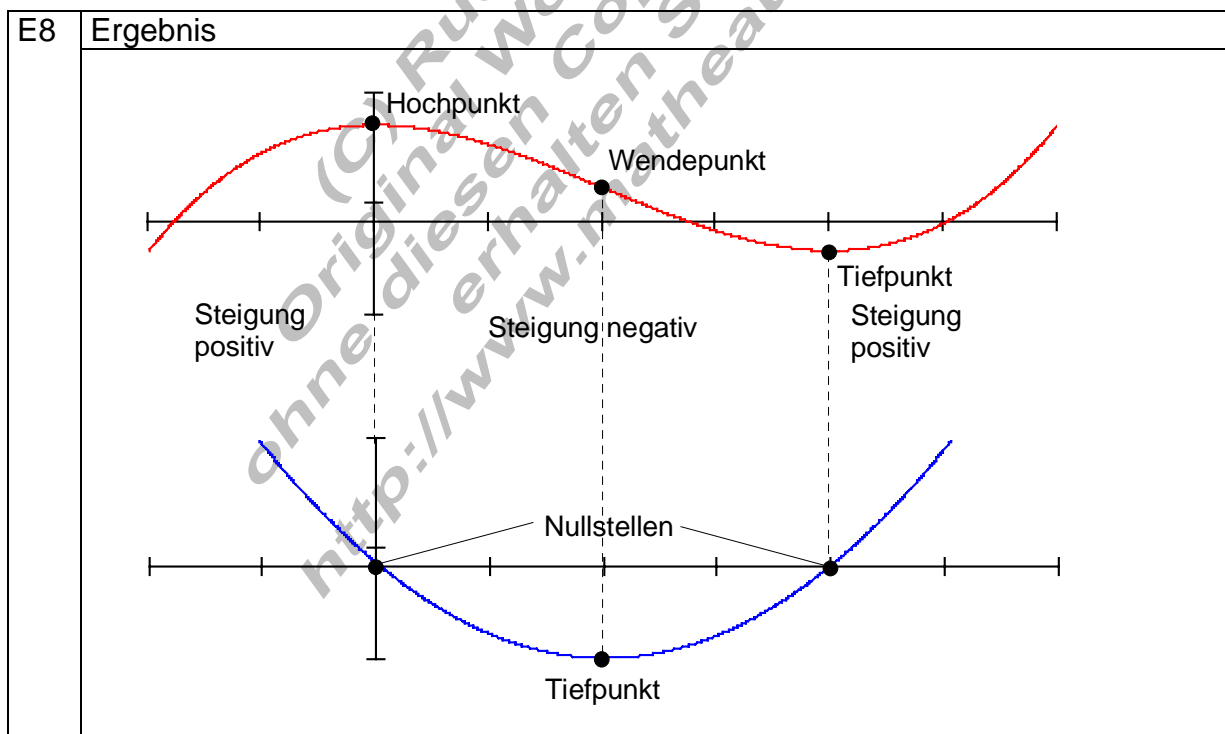
Lösungen Differenzialrechnung zur Vorbereitung der Klassenarbeit I

Ergebnisse:

E1	<p>Ergebnisse</p> <p>a) $f(x) = \frac{1}{2}x^2 + 2x - 2$</p> <p>b) rel. Min = Scheitelpunkt: $P_{\text{Min}}(-2 -4) = P_{\text{Sp}}(-2 -4)$</p> <p>c) $P_{x_1}(-2 + 2 \cdot \sqrt{2} \approx 0,83 0)$ $P_{x_2}(-2 - 2 \cdot \sqrt{2} \approx -4,83 0)$</p> <p>d) Siehe ausführliche Lösung.</p>
E2	<p>Ergebnis</p> <p>Die Steigung eines Funktionsgraphen in einem Punkt ist gleich der Steigung der Tangente in diesem Punkt.</p>
E3	<div style="display: flex; align-items: center;">  <div style="margin-left: 20px;"> <p>Bewegt man den Punkt P_1 immer weiter auf P_0 zu, so ändert sich die Sekantensteigung.</p> <p>Je mehr man sich dem Punkt P_0 nähert, desto mehr nähert sich die Sekantensteigung der Tangentensteigung.</p> </div> </div>
E4	<p>Ergebnis</p> <p>Die erste Ableitung einer Funktion an der Stelle x_0 ist die Steigung der Tangente im Punkt $P(x_0 f(x_0))$ und somit auch die Steigung des Graphen von $f(x)$ in diesem Punkt.</p>
E5	<p>Ergebnis</p> <p>Die Ableitungsfunktion $f'(x)$ heißt deshalb Steigungsfunktion, weil sie in jedem Punkt die Steigung von $f(x)$ repräsentiert.</p>

E6	Ergebnisse
	a) $f'(x) = 3$ $f''(x) = 0$ $f'''(x) = 0$
	b) $f'(x) = 15x^2 - 3$ $f''(x) = 30x$ $f'''(x) = 30$
	c) $f'(x) = 9x^2 + 4x + 1$ $f''(x) = 18x + 4$ $f'''(x) = 18$
	d) $f'(x) = 24x^2 + 24x + 6$ $f''(x) = 48x + 24$ $f'''(x) = 48$ Siehe ausführliche Lösung.
	e) $f'(x) = -4x^3 + 2$ $f''(x) = -12x^2$ $f'''(x) = -24x$
	f) $f'(x) = 4x^3 - 9$ $f''(x) = 12x^2$ $f'''(x) = 24x$
	g) $f'(x) = -3cx^2 - a - b - c^3 - 1$ $f''(x) = -6cx$ $f'''(x) = -6c$ Siehe ausführliche Lösung.
	h) $f'(x) = 12x^2 - 4x + 5$ $f''(x) = 24x - 4$ $f'''(x) = 24$
	i) $f'(x) = 20x^3 - 12x^2 + 6x - 2$ $f''(x) = 60x^2 - 24x + 6$ $f'''(x) = 120x - 24$
j) $f'(x) = -4x^3$ $f''(x) = -12x^2$ $f'''(x) = -24x$ Siehe ausführliche Lösung.	

E7	Ergebnis
	$t(x) = -5x + 6$ $n(x) = \frac{1}{5}x - \frac{22}{5}$ Siehe ausführliche Lösung.



Ausführliche Lösungen:

A1	Ausführliche Lösung a) $P_1(-4 -2) : f(-4) = 16a_2 - 4a_1 + 1a_0 = -2$ $P_2(-2 -4) : f(-2) = 4a_2 - 2a_1 + 1a_0 = -4$ $P_3(2 4) : f(2) = 4a_2 + 2a_1 + 1a_0 = 4$ <table style="display: inline-table; vertical-align: middle;"> <tr> <td style="border-right: 1px solid black; padding-right: 10px;">a_0</td> <td style="border-right: 1px solid black; padding-right: 10px;">a_1</td> <td style="border-right: 1px solid black; padding-right: 10px;">a_2</td> <td style="border-bottom: 1px solid black;"></td> </tr> <tr> <td style="border-right: 1px solid black; padding-right: 10px;">1</td> <td style="border-right: 1px solid black; padding-right: 10px;">-4</td> <td style="border-right: 1px solid black; padding-right: 10px;">16</td> <td style="border-bottom: 1px solid black;">-2</td> </tr> <tr> <td style="border-right: 1px solid black; padding-right: 10px;">1</td> <td style="border-right: 1px solid black; padding-right: 10px;">-2</td> <td style="border-right: 1px solid black; padding-right: 10px;">4</td> <td style="border-bottom: 1px solid black;">-4 II - I</td> </tr> <tr> <td style="border-right: 1px solid black; padding-right: 10px;">1</td> <td style="border-right: 1px solid black; padding-right: 10px;">2</td> <td style="border-right: 1px solid black; padding-right: 10px;">4</td> <td style="border-bottom: 1px solid black;">4 III - I</td> </tr> <tr> <td style="border-right: 1px solid black; padding-right: 10px;">1</td> <td style="border-right: 1px solid black; padding-right: 10px;">-4</td> <td style="border-right: 1px solid black; padding-right: 10px;">16</td> <td style="border-bottom: 1px solid black;">-2</td> </tr> <tr> <td style="border-right: 1px solid black; padding-right: 10px;">0</td> <td style="border-right: 1px solid black; padding-right: 10px;">2</td> <td style="border-right: 1px solid black; padding-right: 10px;">-12</td> <td style="border-bottom: 1px solid black;">-2 : 2</td> </tr> <tr> <td style="border-right: 1px solid black; padding-right: 10px;">0</td> <td style="border-right: 1px solid black; padding-right: 10px;">6</td> <td style="border-right: 1px solid black; padding-right: 10px;">-12</td> <td style="border-bottom: 1px solid black;">6 : (-6)</td> </tr> <tr> <td style="border-right: 1px solid black; padding-right: 10px;">1</td> <td style="border-right: 1px solid black; padding-right: 10px;">-4</td> <td style="border-right: 1px solid black; padding-right: 10px;">16</td> <td style="border-bottom: 1px solid black;">-2</td> </tr> <tr> <td style="border-right: 1px solid black; padding-right: 10px;">0</td> <td style="border-right: 1px solid black; padding-right: 10px;">1</td> <td style="border-right: 1px solid black; padding-right: 10px;">-6</td> <td style="border-bottom: 1px solid black;">-1</td> </tr> <tr> <td style="border-right: 1px solid black; padding-right: 10px;">0</td> <td style="border-right: 1px solid black; padding-right: 10px;">-1</td> <td style="border-right: 1px solid black; padding-right: 10px;">2</td> <td style="border-bottom: 1px solid black;">-1 III + II</td> </tr> <tr> <td style="border-right: 1px solid black; padding-right: 10px;">1</td> <td style="border-right: 1px solid black; padding-right: 10px;">-4</td> <td style="border-right: 1px solid black; padding-right: 10px;">16</td> <td style="border-bottom: 1px solid black;">-2</td> </tr> <tr> <td style="border-right: 1px solid black; padding-right: 10px;">0</td> <td style="border-right: 1px solid black; padding-right: 10px;">1</td> <td style="border-right: 1px solid black; padding-right: 10px;">-6</td> <td style="border-bottom: 1px solid black;">-1</td> </tr> <tr> <td style="border-right: 1px solid black; padding-right: 10px;">0</td> <td style="border-right: 1px solid black; padding-right: 10px;">0</td> <td style="border-right: 1px solid black; padding-right: 10px;">-4</td> <td style="border-bottom: 1px solid black;">-2</td> </tr> </table> $-4a_2 = -2 \quad : (-4)$ $\Leftrightarrow a_2 = \frac{1}{2}$ $a_1 - 6a_2 = -1 \Leftrightarrow a_1 - 6 \cdot \frac{1}{2} = -1$ $\Leftrightarrow a_1 - 3 = -1 \Leftrightarrow a_1 = 2$ $a_0 - 4a_1 + 16a_2 = -2 \Leftrightarrow a_0 - 4 \cdot 2 + 16 \cdot \frac{1}{2} = -2$ $\Leftrightarrow a_0 - 8 + 8 = -2 \Leftrightarrow a_0 = -2$ $f(x) = \frac{1}{2}x^2 + 2x - 2$ $P_1(-4 -2) : f(-4) = \frac{1}{2} \cdot (-4)^2 + 2 \cdot (-4) - 2 = 8 - 8 - 2 = -2$ $P_2(-2 -4) : f(-2) = \frac{1}{2} \cdot (-2)^2 + 2 \cdot (-2) - 2 = 2 - 4 - 2 = -4$ $P_3(2 4) : f(2) = \frac{1}{2} \cdot 2^2 + 2 \cdot 2 - 2 = 2 + 4 - 2 = 4$	a_0	a_1	a_2		1	-4	16	-2	1	-2	4	-4 II - I	1	2	4	4 III - I	1	-4	16	-2	0	2	-12	-2 : 2	0	6	-12	6 : (-6)	1	-4	16	-2	0	1	-6	-1	0	-1	2	-1 III + II	1	-4	16	-2	0	1	-6	-1	0	0	-4	-2
a_0	a_1	a_2																																																			
1	-4	16	-2																																																		
1	-2	4	-4 II - I																																																		
1	2	4	4 III - I																																																		
1	-4	16	-2																																																		
0	2	-12	-2 : 2																																																		
0	6	-12	6 : (-6)																																																		
1	-4	16	-2																																																		
0	1	-6	-1																																																		
0	-1	2	-1 III + II																																																		
1	-4	16	-2																																																		
0	1	-6	-1																																																		
0	0	-4	-2																																																		

A1	Ausführliche Lösung b) Der Scheitelpunkt der Parabel ist ein Extrempunkt. $f(x) = \frac{1}{2}x^2 + 2x - 2 \Rightarrow f'(x) = x + 2 \Rightarrow f''(x) = 1$ $f'(x) = 0 \Leftrightarrow x + 2 = 0 \Leftrightarrow x = -2$ ist mögliche Extremstelle. $f''(x) = f''(-2) = 1 > 0 \Rightarrow$ rel. Min bei $x = -2$ $f(-2) = \frac{1}{2} \cdot 4 - 4 - 2 = 2 - 4 - 2 = -4$ rel. Min = Scheitelpunkt: $P_{\text{Min}}(-2 -4) = \underline{\underline{P_{\text{Sp}}(-2 -4)}}$
----	---

A1	Ausführliche Lösung	<p>c)</p> $f(x) = \frac{1}{2}x^2 + 2x - 2 \quad f(0) = -2 \Rightarrow \underline{\underline{P_y(0 -2)}}$ $f(x) = 0 \Leftrightarrow \frac{1}{2}x^2 + 2x - 2 = 0$ $f(x) = 0 \Leftrightarrow x^2 + 4x - 4 = 0 \quad \text{Normalform der quadratischen Gleichung}$ $p = 4; q = -4 \Rightarrow D = \left(\frac{p}{2}\right)^2 - q = 4 + 4 = 8 \Rightarrow \sqrt{D} = \sqrt{8} = 2 \cdot \sqrt{2}$ $x_{1/2} = -\frac{p}{2} \pm \sqrt{D} \quad \left \begin{array}{l} x_1 = -2 + 2 \cdot \sqrt{2} \approx 0,83 \\ x_2 = -2 - 2 \cdot \sqrt{2} \approx -4,83 \end{array} \right. \Rightarrow \underline{\underline{P_{x_1}(-2 + 2 \cdot \sqrt{2} \approx 0,83 0)}}$ $\Rightarrow \underline{\underline{P_{x_2}(-2 - 2 \cdot \sqrt{2} \approx -4,83 0)}}$
----	----------------------------	--

A1	Ausführliche Lösung	<p>d)</p> <p> $f(x)$ $f'(x)$ Y $\circ \circ \circ$ </p> <p style="text-align: center;">x x X</p>
----	----------------------------	---

A6	<p>Ausführliche Lösung</p> <p>d) $f(x) = (2x+1)^3$</p> <p>1. Lösung durch ausmultiplizieren:</p> $f(x) = (2x+1)^3 = (2x+1) \underbrace{(2x+1)^2}_{\text{1. bin. Formel}} = (2x+1)(4x^2 + 4x + 1)$ $= 8x^3 + 8x^2 + 2x + 4x^2 + 4x + 1 = 8x^3 + 12x^2 + 6x + 1$ $f'(x) = \underline{24x^2 + 24x + 6} \quad f''(x) = \underline{48x + 24} \quad f'''(x) = \underline{48}$ <p>2. Lösung mit der Kettenregel:</p> $f'(x) = 3(2x+1)^2 \cdot 2 = 6(2x+1)^2 = 6(4x^2 + 4x + 1) = \underline{24x^2 + 24x + 6}$ $f''(x) = 2 \cdot 6(2x+1) \cdot 2 = 24(2x+1) = \underline{48x + 24}$ $f'''(x) = \underline{48}$
A6	<p>Ausführliche Lösung</p> <p>g) $f(x) = \underbrace{a+b+c^2}_{\text{Konstante}} - x - ax - bx - cx^3 - c^3x$</p> $f'(x) = -1 - a - b - 3cx^2 - c^3 = -3cx^2 - \underbrace{a+b+c^3-1}_{\text{Konstante}}$ $f''(x) = \underline{-6cx} \quad f'''(x) = \underline{-6c}$
A6	<p>Ausführliche Lösung</p> <p>j) $f(x) = (a^2 + x^2)(a^2 - x^2)$</p> <p>1. Lösung durch ausmultiplizieren (3. binomische Formel):</p> $f(x) = a^4 - x^4 \Rightarrow f'(x) = \underline{-4x^3} \Rightarrow f''(x) = \underline{-12x^2} \Rightarrow f'''(x) = \underline{-24x}$ <p>2. Lösung mit der Produktregel (aufwendig):</p> $f(x) = \underbrace{(a^2 + x^2)}_u \underbrace{(a^2 - x^2)}_v \Rightarrow u' = 2x \quad v' = -2x$ $f'(x) = u'v + uv' = 2x \cdot (a^2 - x^2) + (a^2 + x^2)(-2x)$ $= 2a^2x - 2x^3 - 2a^2x - 2x^3 = \underline{-4x^3}$ $f''(x) = \underline{-12x^2} \Rightarrow f'''(x) = \underline{-24x}$

A7 Ausführliche Lösung

$$f(x) = -x^2 - x + 2 \Rightarrow f'(x) = -2x - 1$$

Koordinaten des Punktes $P(2 | f(2))$:

$$f(2) = -2^2 - 2 + 2 = -4 - 2 + 2 = -4 \Rightarrow \underline{\underline{P(2 | -4)}}$$

Steigung in $P(2 | -4)$:

$$f'(2) = -2 \cdot 2 - 1 = -5 \Rightarrow \underline{\underline{m_t = -5}} \text{ (Tangentensteigung)}$$

Tangentengleichung:

$t(x) = m_t x + b_t = -5x + b_t$ Die Tangente verläuft durch den Punkt

$$P(2 | -4) \Rightarrow t(2) = -4 \Leftrightarrow -5 \cdot 2 + b_t = -4 \Leftrightarrow b_t = 6$$

$\Rightarrow \underline{\underline{t(x) = -5x + 6}}$ ist die Gleichung der Tangente durch $P(2 | -4)$

Normalengleichung:

$$m_n = -\frac{1}{m_t} = -\frac{1}{-5} = \frac{1}{5} \Rightarrow n(x) = \frac{1}{5}x + b_n \text{ Die Normale verläuft durch den Punkt}$$

$$P(2 | -4) \Rightarrow n(2) = -4 \Leftrightarrow \frac{1}{5} \cdot 2 + b_n = -4 \Leftrightarrow b_n = -\frac{22}{5}$$

$\Rightarrow \underline{\underline{n(x) = \frac{1}{5}x - \frac{22}{5}}}$ ist die Gleichung der Normalen durch $P(2 | -4)$

Alternativlösung mittels Formel:

Tangente und Normale an den Graphen von $f(x)$ durch den Punkt $P(x_0 | f(x_0))$

Gleichung der Tangente

$$t(x) = \underbrace{f'(x_0)}_{\text{Steigung}}(x - x_0) + f(x_0)$$

Gleichung der Normalen

$$n(x) = -\frac{1}{\underbrace{f'(x_0)}_{\text{Steigung}}}(x - x_0) + f(x_0); f'(x_0) \neq 0$$

$$f(x) = -x^2 - x + 2 \Rightarrow f'(x) = -2x - 1 \quad x_0 = 2$$

$$f'(x_0) = f'(2) = -4 - 1 = -5$$

$$f(x_0) = f(2) = -4 - 2 + 2 = -4$$

$$t(x) = -5(x - 2) - 4 = -5x + 10 - 4 = \underline{\underline{-5x + 6}}$$

$$n(x) = \frac{1}{5}(x - 2) - 4 = \frac{1}{5}x - \frac{2}{5} - 4 = \frac{1}{5}x - \frac{20}{5} - \frac{2}{5} = \underline{\underline{\frac{1}{5}x - \frac{22}{5}}}$$