Lösungen Training Differentialrechnung III (Tangente berechnen)

Ergebnisse:

E1	Ergebnis:
	$f(x)=x^3-6x^2+9x \qquad x_0=2 \Rightarrow P_0(2\mid 2) \qquad t(x)=-3x+8$

E2	Ergebnis:
	$f(x)=\frac{1}{4}x^3-\frac{9}{4}x^2+\frac{15}{4}x+\frac{9}{4} \qquad x_0=2 \Rightarrow P_0\left(2 \,\middle|\, \frac{11}{4}=2{,}75\right) \qquad t(x)=-\frac{9}{4}x+\frac{29}{4}$

E3	Ergebnis:
	$f(x)=\frac{1}{2}x^3-\frac{1}{2}x^2-4x+4 \qquad x_0=-1 \Rightarrow P_0(-1\mid 7) \qquad t(x)=-\frac{3}{2}x+\frac{11}{2}$

E4	Ergebnis:
	$f(x)=x^3+3x^2-2 \qquad x_0=1 \Rightarrow P_0(1\mid 2) \qquad t(x)=9x-7$

E5	Ergebnis:
	$f(x)=\frac{1}{2}x^3-\frac{1}{2}x^2-\frac{5}{2}x+3 \qquad x_0=1 \Rightarrow P_0\left(1 \,\middle|\, \frac{1}{2}=0{,}5\right) \qquad t(x)=-2x+\frac{5}{2}$

E6	Ergebnis:
	$f(x)=x^3-x^2-5x-2 \qquad x_0=-\frac{3}{2} \Rightarrow P_0\left(-\frac{3}{2} \,\middle|\, -\frac{1}{8}\right) \qquad t(x)=\frac{19}{4}x+7$

E7	Ergebnis:
	$f(x)=\frac{1}{4}x^3-\frac{5}{4}x^2+\frac{1}{2}x+2 \qquad x_0=3 \Rightarrow P_0(3\mid -1) \qquad t(x)=-\frac{1}{4}x-\frac{1}{4}$

E8	Ergebnis:
	$f(x)=x^3-\frac{3}{2}x^2-6x+2 \qquad x_0=1 \Rightarrow P_0\left(1 \,\middle|\, -\frac{9}{2}\right) \qquad t(x)=-6x+\frac{3}{2}$

E9	Ergebnis:
	$f(x)=\frac{1}{2}x^3-\frac{1}{2}x^2-4x+4 \qquad x_0=0 \Rightarrow P_0(0\mid 4) \qquad t(x)=-4x+4$

E10	Ergebnis:
	$f(x)=\frac{1}{3}x^3-\frac{1}{3}x^2-4x+4 \qquad x_0=1 \Rightarrow P_0(1\mid 0) \qquad t(x)=-\frac{11}{3}x+\frac{11}{3}$

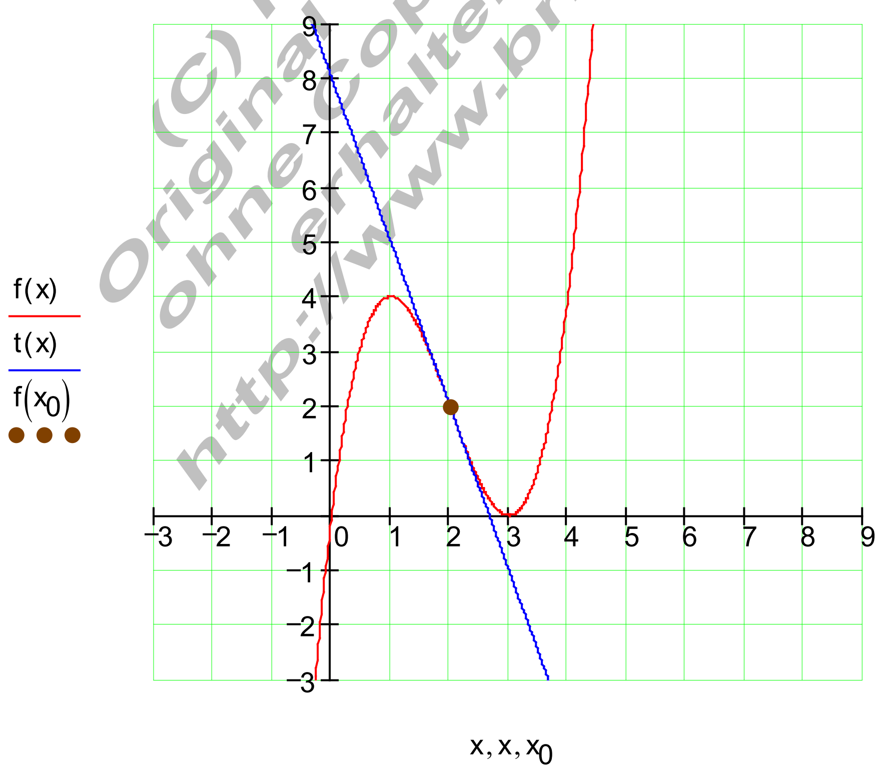
Ausführliche Lösungen:

Bemerkungen zur Tangente:
Die Steigung eines Graphen in einem Punkt, entspricht der Steigung der Tangente in diesem Punkt. Über die erste Ableitung, die ja der Steigungsfunktion entspricht, erhält man die Steigung der Tangente in diesem Punkt. Mithilfe der Punkt-Richtungsform der Geradengleichung erhält man die Gleichung der Tangente. Einfacher ist es die über die erste Ableitung hergeleitete Tangentengleichung zu verwenden.

A1	**Aufgabe**	
	Tangente an den Graphen von f(x) im Punkt $P_0(\ x_0 \mid f(x_0)\ )$. Ermitteln Sie die Koordinaten des Punktes P_0 und die Gleichung der Tangente durch diesen Punkt.	$f(x) = x^3 - 6x^2 + 9x \qquad x_0 = 2$

A1	**Ausführliche Lösung** (Berechnungen)
	$f(x) = x^3 - 6x^2 + 9x \qquad x_0 = 2 \qquad t(x) = f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0)$ $f'(x) = 3x^2 - 12x + 9 \Rightarrow f'(x_0) = f'(2) = 12 - 24 + 9 = -3$ $f(x_0) = f(2) = 8 - 24 + 18 = 2 \Rightarrow \underline{\underline{P_0(2 \mid 2)}}$ $t(x) = -3(x - 2) + 2 = -3x + 6 + 2 = \underline{\underline{-3x + 8}}$

A1	**Ausführliche Lösung** (Die Graphen)
	$f(x) = x^3 - 6x^2 + 9x \qquad x_0 = 2 \Rightarrow P_0(2 \mid 2) \qquad t(x) = -3x + 8$



A2 Aufgabe

Tangente an den Graphen von f(x) im Punkt $P_0(x_0 \mid f(x_0))$. Ermitteln Sie die Koordinaten des Punktes P_0 und die Gleichung der Tangente durch diesen Punkt.

$$f(x)=\frac{1}{4}x^3-\frac{9}{4}x^2+\frac{15}{4}x+\frac{9}{4} \qquad x_0=2$$

A2 **Ausführliche** Lösung (Berechnungen)

$$f(x)=\frac{1}{4}x^3-\frac{9}{4}x^2+\frac{15}{4}x+\frac{9}{4} \qquad x_0=2 \qquad t(x)=f'(x_0)(x-x_0)+f(x_0)$$

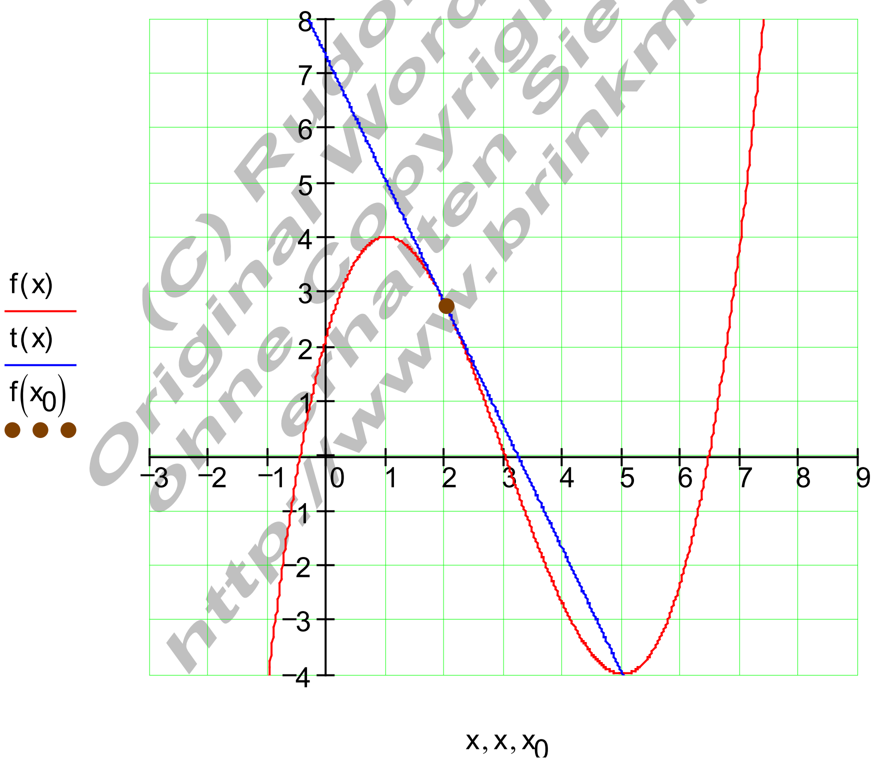
$$f'(x)=\frac{3}{4}x^2-\frac{9}{2}x+\frac{15}{4} \Rightarrow f'(x_0)=f'(2)=\frac{3}{4}\cdot 4-\frac{9}{2}\cdot 2+\frac{15}{4}=\frac{12}{4}-\frac{36}{4}+\frac{15}{4}=-\frac{9}{4}$$

$$f(x_0)=f(2)=\frac{1}{4}\cdot 8-\frac{9}{4}\cdot 4+\frac{15}{4}\cdot 2+\frac{9}{4}=\frac{8}{4}-\frac{36}{4}+\frac{30}{4}+\frac{9}{4}=\frac{11}{4} \Rightarrow \underline{\underline{P_0\left(2 \,\middle|\, \frac{11}{4}=2{,}75\right)}}$$

$$t(x)=-\frac{9}{4}(x-2)+\frac{11}{4}=-\frac{9}{4}x+\frac{18}{4}+\frac{11}{4}=\underline{\underline{-\frac{9}{4}x+\frac{29}{4}}}$$

A2 **Ausführliche Lösung** (Die Graphen)

$$f(x)=\frac{1}{4}x^3-\frac{9}{4}x^2+\frac{15}{4}x+\frac{9}{4} \qquad x_0=2 \Rightarrow P_0\left(2 \,\middle|\, \frac{11}{4}=2{,}75\right) \qquad t(x)=-\frac{9}{4}x+\frac{29}{4}$$



A3	**Aufgabe**	
	Tangente an den Graphen von f(x) im Punkt $P_0(x_0 \mid f(x_0))$. Ermitteln Sie die Koordinaten des Punktes P_0 und die Gleichung der Tangente durch diesen Punkt.	$f(x)=\frac{1}{2}x^3-\frac{1}{2}x^2-4x+4$ $\quad x_0=-1$

A3 Ausführliche Lösung (Berechnungen)

$$f(x)=\frac{1}{2}x^3-\frac{1}{2}x^2-4x+4 \qquad x_0=-1 \qquad t(x)=f'(x_0)(x-x_0)+f(x_0)$$

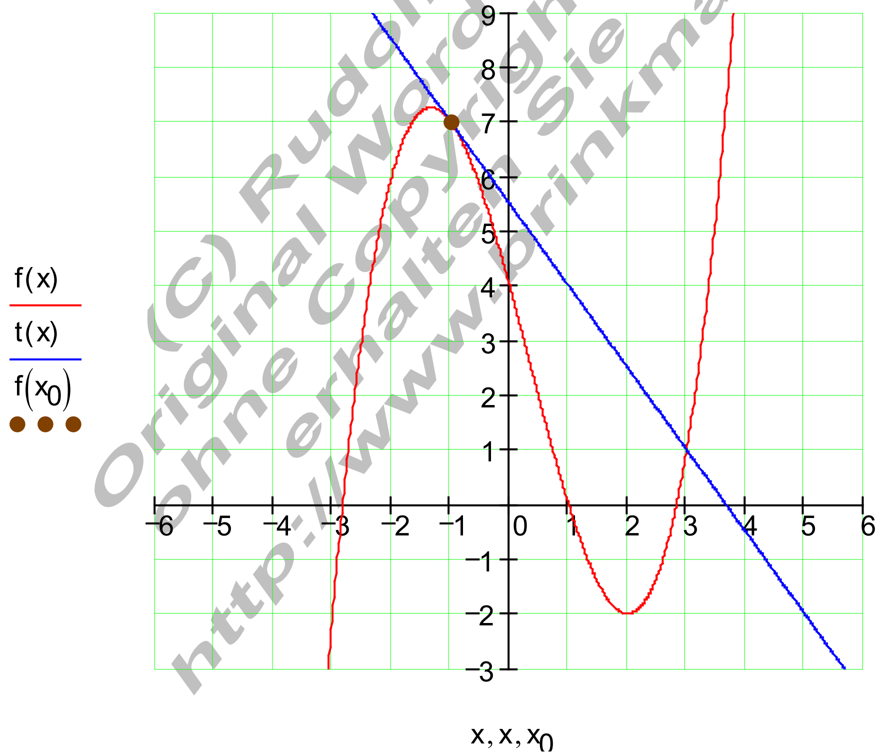
$$f'(x)=\frac{3}{2}x^2-x-4 \Rightarrow f'(x_0)=f'(-1)=\frac{3}{2}+1-4=\frac{3}{2}+\frac{2}{2}-\frac{8}{2}=-\frac{3}{2}$$

$$f(x_0)=f(-1)=\frac{1}{2}\cdot(-1)-\frac{1}{2}\cdot 1-4\cdot(-1)+4=-\frac{1}{2}-\frac{1}{2}+\frac{8}{2}+\frac{8}{2}=7 \Rightarrow \underline{\underline{P_0(-1\mid 7)}}$$

$$t(x)=-\frac{3}{2}(x+1)+7=-\frac{3}{2}x-\frac{3}{2}+\frac{14}{2}=\underline{\underline{-\frac{3}{2}x+\frac{11}{2}}}$$

A3 Ausführliche Lösung (Die Graphen)

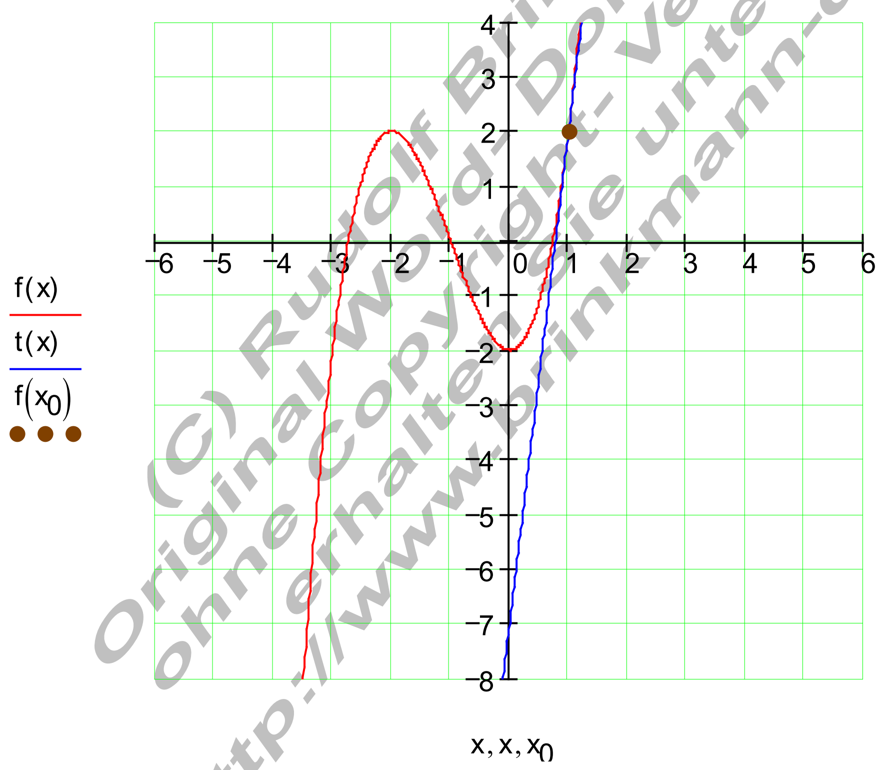
$$f(x)=\frac{1}{2}x^3-\frac{1}{2}x^2-4x+4 \qquad x_0=-1 \Rightarrow P_0(-1\mid 7) \qquad t(x)=-\frac{3}{2}x+\frac{11}{2}$$



A4	**Aufgabe**	
	Tangente an den Graphen von f(x) im Punkt $P_0(x_0 \mid f(x_0))$. Ermitteln Sie die Koordinaten des Punktes P_0 und die Gleichung der Tangente durch diesen Punkt.	$f(x) = x^3 + 3x^2 - 2 \qquad x_0 = 1$

A4	**Ausführliche Lösung** (Berechnungen)
	$f(x) = x^3 + 3x^2 - 2 \qquad x_0 = 1 \qquad t(x) = f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0)$
	$f'(x) = 3x^2 + 6x \Rightarrow f'(x_0) = f'(1) = 3 + 6 = 9$
	$f(x_0) = f(1) = 1^3 + 3 \cdot 1^2 - 2 = 1 + 3 - 2 = 2 \Rightarrow \underline{\underline{P_0(1 \mid 2)}}$
	$t(x) = 9(x - 1) + 2 = 9x - 9 + 2 = \underline{\underline{9x - 7}}$

A4	**Ausführliche Lösung** (Die Graphen)
	$f(x) = x^3 + 3x^2 - 2 \qquad x_0 = 1 \Rightarrow P_0(1 \mid 2) \qquad t(x) = 9x - 7$



A5 **Aufgabe**

Tangente an den Graphen von f(x) im Punkt $P_0(x_0 \mid f(x_0))$. Ermitteln Sie die Koordinaten des Punktes P_0 und die Gleichung der Tangente durch diesen Punkt.	$f(x) = \frac{1}{2}x^3 - \frac{1}{2}x^2 - \frac{5}{2}x + 3 \qquad x_0 = 1$

A5 **Ausführliche Lösung** (Berechnungen)

$$f(x) = \frac{1}{2}x^3 - \frac{1}{2}x^2 - \frac{5}{2}x + 3 \qquad x_0 = 1 \qquad t(x) = f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0)$$

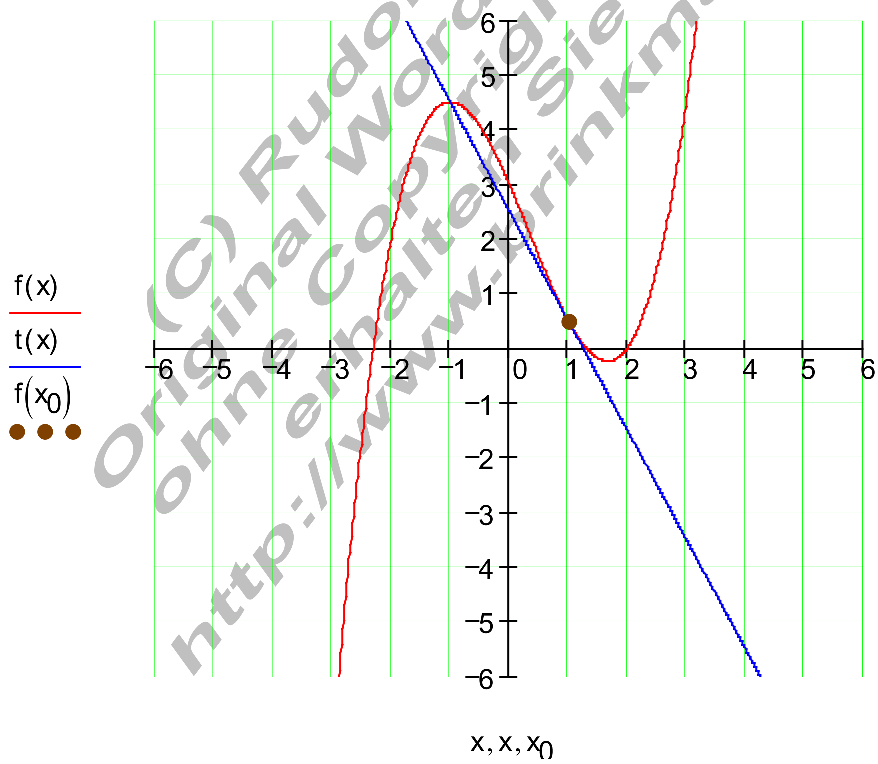
$$f'(x) = \frac{3}{2}x^2 - x - \frac{5}{2} \Rightarrow f'(x_0) = f'(1) = \frac{3}{2} - 1 - \frac{5}{2} = -2$$

$$f(x_0) = f(1) = \frac{1}{2} - \frac{1}{2} - \frac{5}{2} + 3 = -\frac{5}{2} + \frac{6}{2} = \frac{1}{2} \Rightarrow \underline{\underline{P_0\left(1 \,\middle|\, \frac{1}{2}\right)}}$$

$$t(x) = -2(x-1) + \frac{1}{2} = -2x + 2 + \frac{1}{2} = \underline{\underline{-2x + \frac{5}{2}}}$$

A5 **Ausführliche Lösung** (Die Graphen)

$$f(x) = \frac{1}{2}x^3 - \frac{1}{2}x^2 - \frac{5}{2}x + 3 \qquad x_0 = 1 \Rightarrow P_0\left(1 \,\middle|\, \frac{1}{2} = 0{,}5\right) \qquad t(x) = -2x + \frac{5}{2}$$



A6	**Aufgabe**	
	Tangente an den Graphen von f(x) im Punkt $P_0(\,x_0\,|\,f(x_0)\,)$. Ermitteln Sie die Koordinaten des Punktes P_0 und die Gleichung der Tangente durch diesen Punkt.	$f(x) = x^3 - x^2 - 5x - 2 \qquad x_0 = -\frac{3}{2}$

A6	**Ausführliche Lösung** (Berechnungen)

$$f(x) = x^3 - x^2 - 5x - 2 \qquad x_0 = -\frac{3}{2} \qquad t(x) = f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0)$$

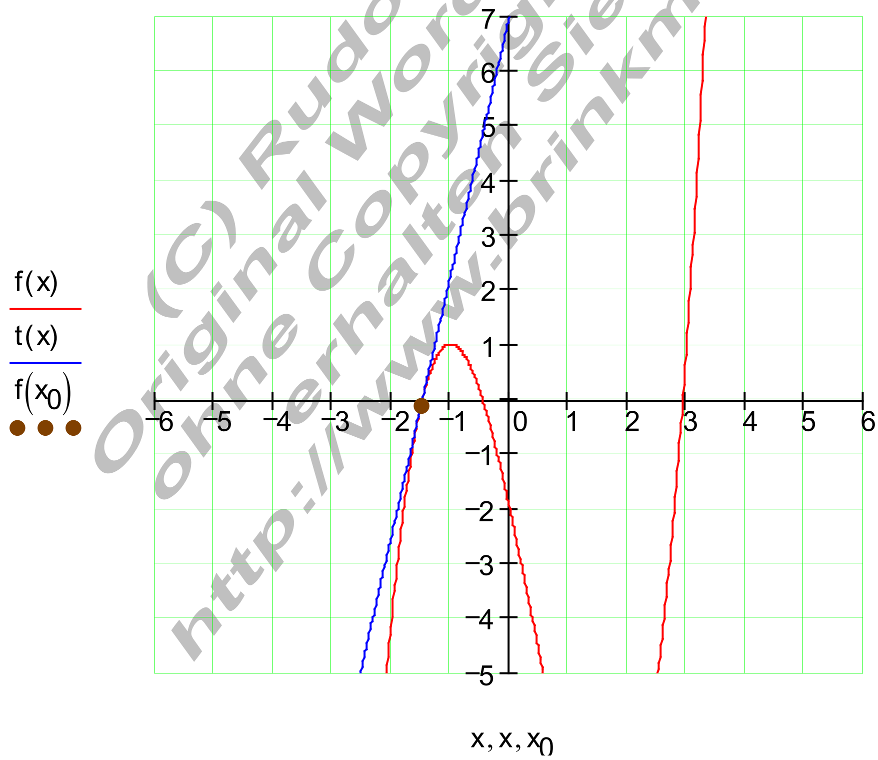
$$f'(x) = 3x^2 - 2x - 5 \Rightarrow f'(x_0) = f'\left(-\frac{3}{2}\right) = 3\cdot\frac{9}{4} - 2\cdot\left(-\frac{3}{2}\right) - 5 = \frac{27}{4} + \frac{12}{4} - \frac{20}{4} = \frac{19}{4}$$

$$f(x_0) = f\left(-\frac{3}{2}\right) = -\frac{27}{8} - \frac{9}{4} + \frac{15}{2} - 2 = -\frac{27}{8} - \frac{18}{8} + \frac{60}{8} - \frac{16}{8} = -\frac{1}{8} \Rightarrow \underline{\underline{P_0\left(-\frac{3}{2}\,\middle|\,-\frac{1}{8}\right)}}$$

$$t(x) = \frac{19}{4}\left(x + \frac{3}{2}\right) - \frac{1}{8} = \frac{19}{4}x + \frac{57}{8} - \frac{1}{8} = \frac{19}{4}x + \frac{56}{8} = \underline{\underline{\frac{19}{4}x + 7}}$$

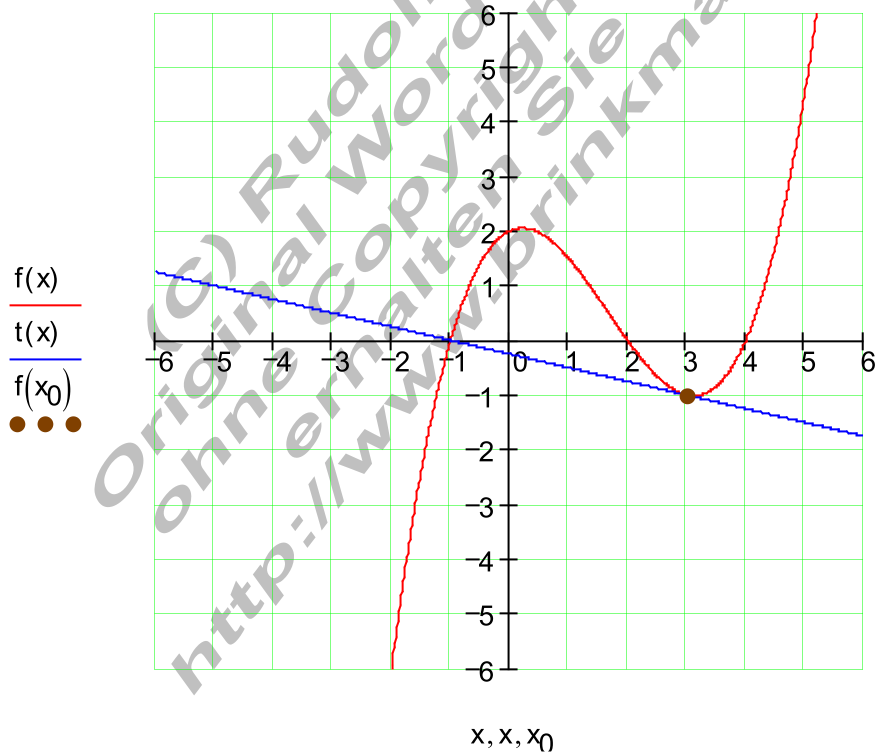
A6	**Ausführliche Lösung** (Die Graphen)

$$f(x) = x^3 - x^2 - 5x - 2 \qquad x_0 = -\frac{3}{2} \Rightarrow P_0\left(-\frac{3}{2}\,\middle|\,-\frac{1}{8}\right) \qquad t(x) = \frac{19}{4}x + 7$$



A7	**Aufgabe**	
	Tangente an den Graphen von f(x) im Punkt $P_0(x_0 \mid f(x_0))$. Ermitteln Sie die Koordinaten des Punktes P_0 und die Gleichung der Tangente durch diesen Punkt.	$f(x)=\frac{1}{4}x^3-\frac{5}{4}x^2+\frac{1}{2}x+2 \qquad x_0=3$

A7	**Ausführliche Lösung** (Berechnungen)
	$f(x)=\frac{1}{4}x^3-\frac{5}{4}x^2+\frac{1}{2}x+2 \qquad x_0=3 \qquad t(x)=f'(x_0)(x-x_0)+f(x_0)$
	$f'(x)=\frac{3}{4}x^2-\frac{5}{2}x+\frac{1}{2} \Rightarrow f'(x_0)=f'(3)=\frac{27}{4}-\frac{15}{2}+\frac{1}{2}=\frac{27}{4}-\frac{30}{4}+\frac{2}{4}=-\frac{1}{4}$
	$f(x_0)=f(3)=\frac{27}{4}-\frac{45}{4}+\frac{3}{2}+2=\frac{27}{4}-\frac{45}{4}+\frac{6}{4}+\frac{8}{4}=-\frac{4}{4}=-1 \Rightarrow \underline{\underline{P_0(3 \mid -1)}}$
	$t(x)=-\frac{1}{4}(x-3)-1=-\frac{1}{4}x+\frac{3}{4}-1=-\frac{1}{4}x+\frac{3}{4}-\frac{4}{4}=\underline{\underline{-\frac{1}{4}x-\frac{1}{4}}}$

A7	**Ausführliche Lösung** (Die Graphen)
	$f(x)=\frac{1}{4}x^3-\frac{5}{4}x^2+\frac{1}{2}x+2 \qquad x_0=3 \Rightarrow P_0(3 \mid -1) \qquad t(x)=-\frac{1}{4}x-\frac{1}{4}$
	

A8	**Aufgabe**	
	Tangente an den Graphen von f(x) im Punkt $P_0(x_0 \mid f(x_0))$. Ermitteln Sie die Koordinaten des Punktes P_0 und die Gleichung der Tangente durch diesen Punkt.	$f(x) = x^3 - \frac{3}{2}x^2 - 6x + 2 \qquad x_0 = 1$

A8 Ausführliche Lösung (Berechnungen)

$$f(x) = x^3 - \frac{3}{2}x^2 - 6x + 2 \qquad x_0 = 1 \qquad t(x) = f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0)$$

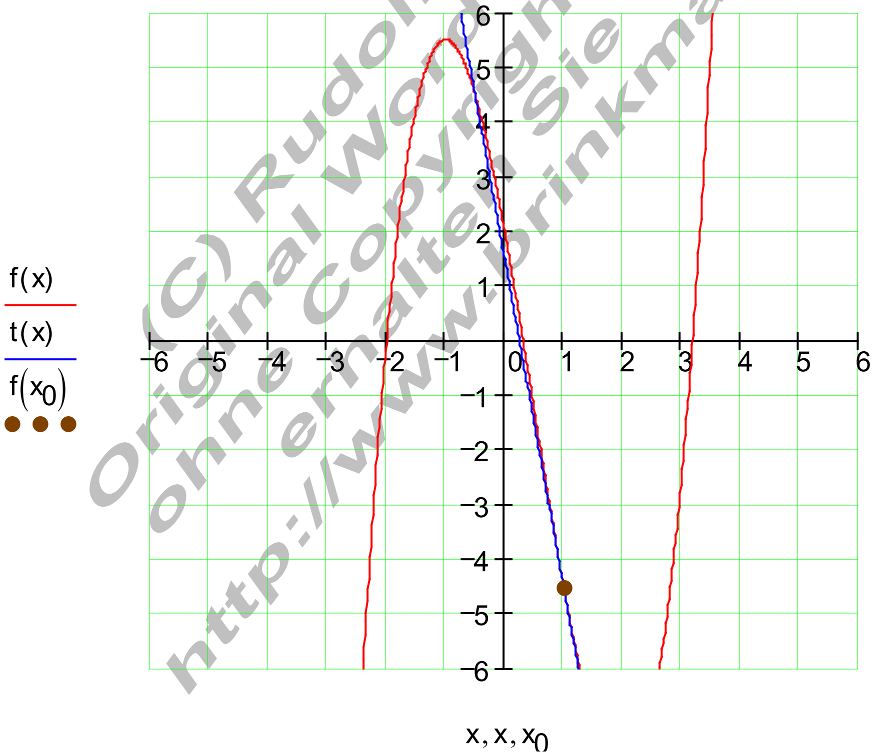
$$f'(x) = 3x^2 - 3x - 6 \Rightarrow f'(x_0) = f'(1) = 3 - 3 - 6 = -6$$

$$f(x_0) = f(1) = 1 - \frac{3}{2} - 6 + 2 = \frac{2}{2} - \frac{3}{2} - \frac{12}{2} + \frac{4}{2} = -\frac{9}{2} \Rightarrow \underline{\underline{P_0\left(1 \middle| -\frac{9}{2}\right)}}$$

$$t(x) = -6(x - 1) - \frac{9}{2} = -6x + 6 - \frac{9}{2} = -6x + \frac{12}{2} - \frac{9}{2} = \underline{\underline{-6x + \frac{3}{2}}}$$

A8 Ausführliche Lösung (Die Graphen)

$$f(x) = x^3 - \frac{3}{2}x^2 - 6x + 2 \qquad x_0 = 1 \Rightarrow P_0\left(1 \middle| -\frac{9}{2} = -4{,}5\right) \qquad t(x) = -6x + \frac{3}{2}$$



A9	**Aufgabe**	
	Tangente an den Graphen von f(x) im Punkt $P_0(x_0 \mid f(x_0))$. Ermitteln Sie die Koordinaten des Punktes P_0 und die Gleichung der Tangente durch diesen Punkt.	$f(x)=\frac{1}{2}x^3-\frac{1}{2}x^2-4x+4 \qquad x_0=0$

A9 Ausführliche Lösung (Berechnungen)

$$f(x)=\frac{1}{2}x^3-\frac{1}{2}x^2-4x+4 \qquad x_0=0 \qquad t(x)=f'(x_0)(x-x_0)+f(x_0)$$

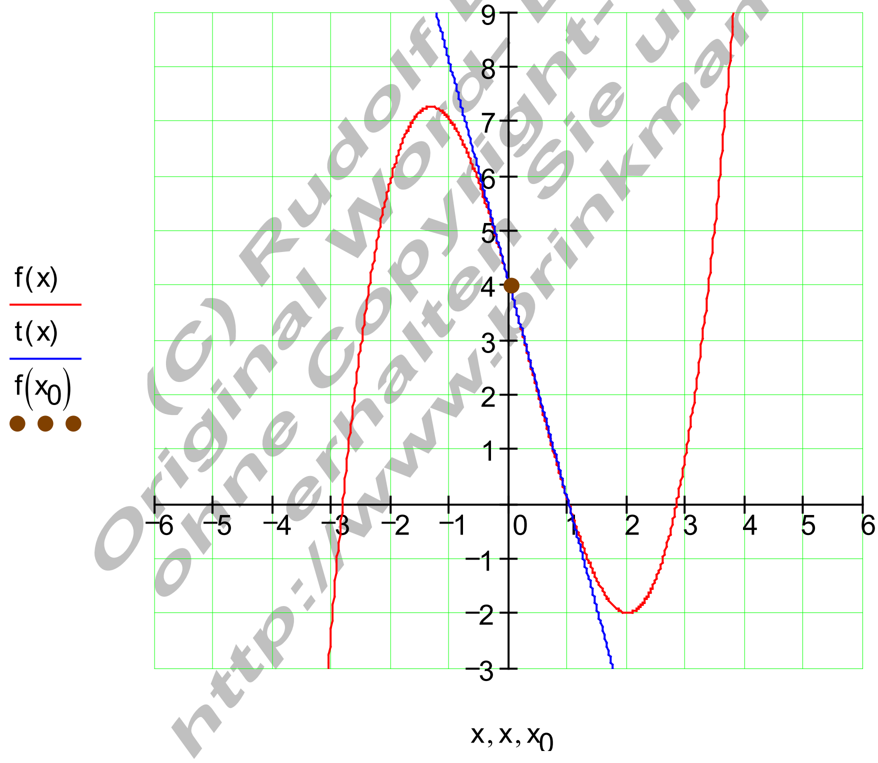
$$f'(x)=\frac{3}{2}x^2-x-4 \Rightarrow f'(x_0)=f'(0)=-4$$

$$f(x_0)=f(0)=4 \Rightarrow \underline{\underline{P_0(0\mid -4)}}$$

$$t(x)=-4(x-0)+4=\underline{\underline{-4x+4}}$$

A9 Ausführliche Lösung (Die Graphen)

$$f(x)=\frac{1}{2}x^3-\frac{1}{2}x^2-4x+4 \qquad x_0=0 \Rightarrow P_0(0\mid 4) \qquad t(x)=-4x+4$$



A10	**Aufgabe**	
	Tangente an den Graphen von f(x) im Punkt $P_0(x_0 \mid f(x_0))$. Ermitteln Sie die Koordinaten des Punktes P_0 und die Gleichung der Tangente durch diesen Punkt.	$f(x) = \frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{3}x^2 - 4x + 4 \qquad x_0 = 1$

A10 Ausführliche Lösung (Berechnungen)

$$f(x) = \frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{3}x^2 - 4x + 4 \qquad x_0 = 1 \qquad t(x) = f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0)$$

$$f'(x) = x^2 - \frac{2}{3}x - 4 \Rightarrow f'(x_0) = f'(1) = 1 - \frac{2}{3} - 4 = \frac{3}{3} - \frac{2}{3} - \frac{12}{3} = -\frac{11}{3}$$

$$f(x_0) = f(1) = \frac{1}{3} - \frac{1}{3} - 4 + 4 = \frac{1}{3} - \frac{1}{3} - \frac{12}{3} + \frac{12}{3} = 0 \Rightarrow \underline{\underline{P_0(1 \mid 0)}}$$

$$t(x) = -\frac{11}{3}(x - 1) + 0 = \underline{\underline{-\frac{11}{3}x + \frac{11}{3}}}$$

A10 Ausführliche Lösung (Die Graphen)

$$f(x) = \frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{3}x^2 - 4x + 4 \qquad x_0 = 1 \Rightarrow P_0(1 \mid 0) \qquad t(x) = -\frac{11}{3}x + \frac{11}{3}$$