

Lösungen Training Differentialrechnung II

Ergebnisse:

E1	Ergebnis: $f(x) = \frac{1}{4}x^3 - \frac{3}{2}x^2 + 5 \Rightarrow P_W(2 1)$
E2	Ergebnis: $f(x) = \frac{1}{2}x^3 - 4x^2 + 8x \Rightarrow P_W\left(\frac{8}{3} \mid \frac{64}{27}\right)$
E3	Ergebnis: $f(x) = \frac{1}{4}x^3 - \frac{3}{2}x^2 + 3x - 1 \Rightarrow P_W(2 1)$
E4	Ergebnis: $f(x) = -\frac{1}{4}x^3 + \frac{3}{2}x^2 + 1 \Rightarrow P_W(2 5)$
E5	Ergebnis: $f(x) = \frac{1}{3}x^3 + x^2 - 2x - 1 \Rightarrow P_W\left(-1 \mid \frac{5}{3}\right)$
E6	Ergebnis: $f(x) = \frac{1}{2}x^4 - 3x^2 + \frac{3}{2} \Rightarrow P_{W1/2}(\pm 1 -1)$
E7	Ergebnis: $f(x) = -\frac{1}{2}x^4 + 3x^2 - 1 \Rightarrow P_{W1/2}\left(\pm 1 \mid \frac{3}{2} = 1,5\right)$
E8	Ergebnis: $f(x) = \frac{1}{4}x^4 - x^3 + \frac{3}{2}x^2 - x + \frac{1}{2} \Rightarrow$ keine Wendepunkte.
E9	Ergebnis: $f(x) = -\frac{1}{4}x^4 + x^3 + 1 \Rightarrow P_{W1}(0 1) \quad P_{W2}(2 5)$
E10	Ergebnis: $f(x) = \frac{1}{12}x^4 - \frac{3}{2}x^2 - 1 \Rightarrow P_{W1/2}\left(\pm\sqrt{3} \approx 1,73 \mid -\frac{19}{4} = -4,75\right)$

Ausführliche Lösungen:

A1	<p>Ausführliche Lösung (Berechnungen)</p> <p>1. Funktionsgleichung mit Ableitungen:</p> $f(x) = \frac{1}{4}x^3 - \frac{3}{2}x^2 + 5 \quad f'(x) = \frac{3}{4}x^2 - 3x \quad f''(x) = \frac{3}{2}x - 3 \quad f'''(x) = \frac{3}{2}$ <p>2. Notwendige Bedingung für eine Wendestelle:</p> $f''(x) = 0 \Leftrightarrow \frac{3}{2}x - 3 = 0 \Leftrightarrow x = 2 \text{ ist mögliche Wendestelle.}$ <p>3. Nachweis über die dritte Ableitung ob eine Wendestelle vorliegt :</p> $f'''(x) = f'''(2) = \frac{3}{2} \neq 0 \Rightarrow x = x_W = 2 \text{ ist eine Wendestelle.}$ <p>4. Bestimmen des Wendepunktes durch Einsetzen der Wendestelle in $f(x)$</p> $f(x_W) = f(2) = \frac{1}{4} \cdot 2^3 - \frac{3}{2} \cdot 2^2 + 5 = \frac{8}{4} - \frac{12}{2} + 5 = 2 - 6 + 5 = 1 \Rightarrow \underline{\underline{P_W(2 1)}}$
----	---

A1	<p>Ausführliche Lösung (Die Graphen)</p> $f(x) = \frac{1}{4}x^3 - \frac{3}{2}x^2 + 5 \quad f'(x) = \frac{3}{4}x^2 - 3x \quad f''(x) = \frac{3}{2}x - 3 \quad f'''(x) = \frac{3}{2}$
	<p> $f(x)$ $f'(x)$ $f''(x)$ $f'''(x)$ </p> <p style="text-align: center;">x</p>

A2	<p>Ausführliche Lösung (Berechnungen)</p> <p><u>1. Funktionsgleichung mit Ableitungen:</u></p> $f(x) = \frac{1}{2}x^3 - 4x^2 + 8x \quad f'(x) = \frac{3}{2}x^2 - 8x + 8 \quad f''(x) = 3x - 8 \quad f'''(x) = 3$ <p><u>2. Notwendige Bedingung für eine Wendestelle:</u></p> $f''(x) = 0 \Leftrightarrow 3x - 8 = 0 \Leftrightarrow x = \frac{8}{3} \text{ ist mögliche Wendestelle.}$ <p><u>3. Nachweis über die dritte Ableitung ob eine Wendestelle vorliegt :</u></p> $f'''(x) = f''' \left(\frac{8}{3} \right) = 3 \neq 0 \Rightarrow x = x_W = \frac{8}{3} \text{ ist eine Wendestelle.}$ <p><u>4. Bestimmen des Wendepunktes durch Einsetzen der Wendestelle in $f(x)$</u></p> $f(x_W) = f \left(\frac{8}{3} \right) = \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{8}{3} \right)^3 - 4 \cdot \left(\frac{8}{3} \right)^2 + 8 \cdot \frac{8}{3} = \frac{1}{2} \cdot \frac{512}{27} - 4 \cdot \frac{64}{9} + 8 \cdot \frac{8}{3}$ $= \frac{256}{27} - \frac{768}{27} + \frac{576}{27} = \frac{64}{27} \Rightarrow P_W \left(\frac{8}{3} \approx 2,67 \mid \frac{64}{27} \approx 2,37 \right)$
----	---

A2	<p>Ausführliche Lösung (Die Graphen)</p> $f(x) = \frac{1}{2}x^3 - 4x^2 + 8x \quad f'(x) = \frac{3}{2}x^2 - 8x + 8 \quad f''(x) = 3x - 8 \quad f'''(x) = 3$
	<p> $f(x)$ $f'(x)$ $f''(x)$ $f'''(x)$ </p> <p style="text-align: center;">x</p>

A3	<p>Ausführliche Lösung (Berechnungen)</p> <p><u>1. Funktionsgleichung mit Ableitungen:</u></p> $f(x) = \frac{1}{4}x^3 - \frac{3}{2}x^2 + 3x - 1 \quad f'(x) = \frac{3}{4}x^2 - 3x + 3 \quad f''(x) = \frac{3}{2}x - 3 \quad f'''(x) = \frac{3}{2}$ <p><u>2. Notwendige Bedingung für eine Wendestelle:</u></p> $f''(x) = 0 \Leftrightarrow \frac{3}{2}x - 3 = 0 \Leftrightarrow x = 2 \text{ ist mögliche Wendestelle.}$ <p><u>3. Nachweis über die dritte Ableitung ob eine Wendestelle vorliegt :</u></p> $f'''(x) = f'''(2) = \frac{3}{2} \neq 0 \Rightarrow x = x_W = 2 \text{ ist eine Wendestelle.}$ <p><u>4. Bestimmen des Wendepunktes durch Einsetzen der Wendestelle in f(x)</u></p> $f(x_W) = f(2) = \frac{1}{4} \cdot 2^3 - \frac{3}{2} \cdot 2^2 + 3 \cdot 2 - 1 = \frac{8}{4} - \frac{12}{2} + 6 - 1 = 1 \Rightarrow \underline{\underline{P_W(2 1)}}$
----	---

A3	<p>Ausführliche Lösung (Die Graphen)</p> $f(x) = \frac{1}{4}x^3 - \frac{3}{2}x^2 + 3x - 1 \quad f'(x) = \frac{3}{4}x^2 - 3x + 3 \quad f''(x) = \frac{3}{2}x - 3 \quad f'''(x) = \frac{3}{2}$
	<p style="text-align: center;">x</p>

A4	<p>Ausführliche Lösung (Berechnungen)</p> <p><u>1. Funktionsgleichung mit Ableitungen:</u></p> $f(x) = -\frac{1}{4}x^3 + \frac{3}{2}x^2 + 1 \quad f'(x) = -\frac{3}{4}x^2 + 3x \quad f''(x) = -\frac{3}{2}x + 3 \quad f'''(x) = -\frac{3}{2}$ <p><u>2. Notwendige Bedingung für eine Wendestelle:</u></p> $f''(x) = 0 \Leftrightarrow -\frac{3}{2}x + 3 = 0 \Leftrightarrow x = 2 \text{ ist mögliche Wendestelle.}$ <p><u>3. Nachweis über die dritte Ableitung ob eine Wendestelle vorliegt :</u></p> $f'''(x) = f'''(2) = -\frac{3}{2} \neq 0 \Rightarrow x = x_W = 2 \text{ ist eine Wendestelle.}$ <p><u>4. Bestimmen des Wendepunktes durch Einsetzen der Wendestelle in f(x)</u></p> $f(x_W) = f(2) = -\frac{1}{4} \cdot 8 + \frac{3}{2} \cdot 4 + 1 = -2 + 6 + 1 \Rightarrow \underline{\underline{P_W(2 5)}}$
----	---

A4	<p>Ausführliche Lösung (Die Graphen)</p> $f(x) = -\frac{1}{4}x^3 + \frac{3}{2}x^2 + 1 \quad f'(x) = -\frac{3}{4}x^2 + 3x \quad f''(x) = -\frac{3}{2}x + 3 \quad f'''(x) = -\frac{3}{2}$
	<p>The graph displays four functions plotted on a coordinate system with a green grid. The x-axis is labeled 'x' and ranges from -4 to 8. The y-axis ranges from -4 to 10. A legend on the left identifies the curves: f(x) in red, f'(x) in blue, f''(x) in brown, and f'''(x) in magenta. The red curve f(x) starts at (-4, 9), reaches a local minimum at (0, 1), a local maximum at (4, 9), and ends at (6, 1). The blue curve f'(x) starts at (-4, -4), reaches a local maximum at (2, 3), and ends at (6, -4). The brown line f''(x) is a straight line with a negative slope, passing through (0, 3) and (2, 0). The magenta horizontal line f'''(x) is constant at y = -1.5.</p>

A5	<p>Ausführliche Lösung (Berechnungen)</p> <p><u>1. Funktionsgleichung mit Ableitungen:</u></p> $f(x) = \frac{1}{3}x^3 + x^2 - 2x - 1 \quad f'(x) = x^2 + 2x - 2 \quad f''(x) = 2x + 2 \quad f'''(x) = 2$ <p><u>2. Notwendige Bedingung für eine Wendestelle:</u></p> $f''(x) = 0 \Leftrightarrow 2x + 2 = 0 \Leftrightarrow x = -1 \text{ ist mögliche Wendestelle.}$ <p><u>3. Nachweis über die dritte Ableitung ob eine Wendestelle vorliegt :</u></p> $f'''(x) = f'''(-1) = 2 \neq 0 \Rightarrow x = x_W = -1 \text{ ist eine Wendestelle.}$ <p><u>4. Bestimmen des Wendepunktes durch Einsetzen der Wendestelle in f(x)</u></p> $f(x_W) = f(-1) = \frac{1}{3} \cdot (-1)^3 + (-1)^2 - 2 \cdot (-1) - 1 = -\frac{1}{3} + 1 + 2 - 1 = \frac{5}{3}$ $\Rightarrow P_W \left(-1 \mid \frac{5}{3} \approx 1,67 \right)$
----	---

A5	<p>Ausführliche Lösung (Die Graphen)</p> $f(x) = \frac{1}{3}x^3 + x^2 - 2x - 1 \quad f'(x) = x^2 + 2x - 2 \quad f''(x) = 2x + 2 \quad f'''(x) = 2$
	<p style="text-align: center;">x</p>

A6	<p>Ausführliche Lösung (Berechnungen)</p> <p><u>1. Funktionsgleichung mit Ableitungen:</u></p> $f(x) = \frac{1}{2}x^4 - 3x^2 + \frac{3}{2} \quad f'(x) = 2x^3 - 6x \quad f''(x) = 6x^2 - 6 \quad f'''(x) = 12x$ <p><u>2. Notwendige Bedingung für Wendestellen:</u></p> $f''(x) = 0 \Leftrightarrow 6x^2 - 6 = 0 \Leftrightarrow x^2 = 1 \Leftrightarrow x_{1/2} = \pm 1 \text{ sind mögliche Wendestellen.}$ <p><u>3. Nachweis über die dritte Ableitung ob eine Wendestelle vorliegt :</u></p> $f'''(x_1) = f'''(1) = 12 \cdot 1 = 12 \neq 0 \Rightarrow x_1 = x_{W1} = 1 \text{ ist eine Wendestelle.}$ $f'''(x_2) = f'''(-1) = 12 \cdot (-1) = -12 \neq 0 \Rightarrow x_2 = x_{W2} = -1 \text{ ist eine Wendestelle.}$ <p><u>4. Bestimmen der Wendepunkte durch Einsetzen der Wendestellen in $f(x)$</u></p> $f(x_{W1/2}) = f(\pm 1) = \frac{1}{2}(\pm 1)^4 - 3 \cdot (\pm 1)^2 + \frac{3}{2} = \frac{1}{2} - 3 + \frac{3}{2} = -1 \Rightarrow \underline{\underline{P_{W1/2}(\pm 1 -1)}}$
----	--

A6	<p>Ausführliche Lösung (Die Graphen)</p> $f(x) = \frac{1}{2}x^4 - 3x^2 + \frac{3}{2} \quad f'(x) = 2x^3 - 6x \quad f''(x) = 6x^2 - 6 \quad f'''(x) = 12x$ <div style="text-align: center;"> </div>
----	---

A7	<p>Ausführliche Lösung (Berechnungen)</p> <p>1. Funktionsgleichung mit Ableitungen:</p> $f(x) = -\frac{1}{2}x^4 + 3x^2 - 1 \quad f'(x) = -2x^3 + 6x \quad f''(x) = -6x^2 + 6 \quad f'''(x) = -12x$ <p>2. Notwendige Bedingung für Wendestellen:</p> $f''(x) = 0 \Leftrightarrow -6x^2 + 6 = 0 \Leftrightarrow x^2 = 1 \Leftrightarrow x_{1/2} = \pm 1 \text{ sind mögliche Wendestellen.}$ <p>3. Nachweis über die dritte Ableitung ob eine Wendestelle vorliegt :</p> $f'''(x_1) = f'''(1) = -12 \cdot 1 = -12 \neq 0 \Rightarrow x_1 = x_{W1} = 1 \text{ ist eine Wendestelle.}$ $f'''(x_2) = f'''(-1) = -12 \cdot (-1) = 12 \neq 0 \Rightarrow x_2 = x_{W2} = -1 \text{ ist eine Wendestelle.}$ <p>4. Bestimmen der Wendepunkte durch Einsetzen der Wendestellen in $f(x)$</p> $f(x_{W1/2}) = f(\pm 1) = -\frac{1}{2}(\pm 1)^4 + 3 \cdot (\pm 1)^2 - 1 = -\frac{1}{2} + 3 - 1 = \frac{3}{2} \Rightarrow P_{W1/2} \left(\pm 1 \mid \frac{3}{2} = 1,5 \right)$
----	--

A7	<p>Ausführliche Lösung (Die Graphen)</p> $f(x) = -\frac{1}{2}x^4 + 3x^2 - 1 \quad f'(x) = -2x^3 + 6x \quad f''(x) = -6x^2 + 6 \quad f'''(x) = -12x$
	<p>The graph displays four curves on a coordinate system with a green grid. The x-axis is labeled 'x' and ranges from -6 to 6. The y-axis ranges from -7 to 7. The curves are:</p> <ul style="list-style-type: none"> $f(x)$ (red curve): A quartic function with a local maximum at $x=0$ and local minima at $x=\pm 1$. $f'(x)$ (blue curve): A cubic function with a local maximum at $x=1$ and a local minimum at $x=-1$. $f''(x)$ (brown curve): A downward-opening parabola with its vertex at $x=0$. $f'''(x)$ (pink curve): A straight line passing through the origin with a negative slope. <p>Legend:</p> <ul style="list-style-type: none"> $f(x)$ (red line) $f'(x)$ (blue line) $f''(x)$ (brown line) $f'''(x)$ (pink line)

A8	<p>Ausführliche Lösung (Berechnungen)</p> <p><u>1. Funktionsgleichung mit Ableitungen:</u></p> $f(x) = \frac{1}{4}x^4 - x^3 + \frac{3}{2}x^2 - x + \frac{1}{2} \quad f'(x) = x^3 - 3x^2 + 3x - 1$ $f''(x) = 3x^2 - 6x + 3 \quad f'''(x) = 6x - 6$ <p><u>2. Notwendige Bedingung für Wendestellen:</u></p> $f''(x) = 0 \Leftrightarrow 3x^2 - 6x + 3 = 0 \Leftrightarrow x^2 - 2x + 1 = (x-1)^2 = 0$ $\Leftrightarrow x_{1/2} = 1 \text{ sind mögliche Wendestellen.}$ <p><u>3. Nachweis über die dritte Ableitung ob eine Wendestelle vorliegt :</u></p> $f'''(x_{1/2}) = f'''(1) = 6 \cdot 1 - 6 = 0 \Rightarrow x_{1/2} = 1 \text{ ist keine Wendestelle.}$ <p>Der Graph von $f(x)$ hat keine Wendestellen.</p>
----	---

A8	<p>Ausführliche Lösung (Die Graphen)</p> $f(x) = \frac{1}{4}x^4 - x^3 + \frac{3}{2}x^2 - x + \frac{1}{2} \quad f'(x) = x^3 - 3x^2 + 3x - 1$ $f''(x) = 3x^2 - 6x + 3 \quad f'''(x) = 6x - 6$

A9	<p>Ausführliche Lösung (Berechnungen)</p> <p><u>1. Funktionsgleichung mit Ableitungen:</u></p> $f(x) = -\frac{1}{4}x^4 + x^3 + 1 \quad f'(x) = -x^3 + 3x^2 \quad f''(x) = -3x^2 + 6x \quad f'''(x) = -6x + 6$ <p><u>2. Notwendige Bedingung für Wendestellen:</u></p> $f''(x) = 0 \Leftrightarrow -3x^2 + 6x = 0 \Leftrightarrow x(-3x + 6) = 0$ $\Leftrightarrow x_1 = 0 \quad \vee \quad x_2 = 2 \text{ sind mögliche Wendestellen.}$ <p><u>3. Nachweis über die dritte Ableitung ob eine Wendestelle vorliegt :</u></p> $f'''(x_1) = f'''(0) = 6 \neq 0 \Rightarrow x_1 = x_{W1} = 0 \text{ ist eine Wendestelle.}$ $f'''(x_2) = f'''(2) = -6 \cdot 2 + 6 = -6 \neq 0 \Rightarrow x_2 = x_{W2} = 2 \text{ ist eine Wendestelle.}$ <p><u>4. Bestimmen der Wendepunkte durch Einsetzen der Wendestellen in f(x)</u></p> $f(x_{W1}) = f(0) = 1 \Rightarrow \underline{\underline{P_{W1}(0 1)}}$ $f(x_{W2}) = f(2) = -\frac{1}{4} \cdot 16 + 8 + 1 = 5 \Rightarrow \underline{\underline{P_{W2}(2 5)}}$
----	---

A9	<p>Ausführliche Lösung (Die Graphen)</p> $f(x) = -\frac{1}{4}x^4 + x^3 + 1 \quad f'(x) = -x^3 + 3x^2 \quad f''(x) = -3x^2 + 6x \quad f'''(x) = -6x + 6$ <div style="display: flex; align-items: center;"> <div style="margin-right: 20px;"> <p><u>f(x)</u></p> <p><u>f'(x)</u></p> <p><u>f''(x)</u></p> <p><u>f'''(x)</u></p> </div> </div> <p style="text-align: center;">x</p>
----	---

A10	<p>Ausführliche Lösung (Berechnungen)</p> <p><u>1. Funktionsgleichung mit Ableitungen:</u></p> $f(x) = \frac{1}{12}x^4 - \frac{3}{2}x^2 - 1 \quad f'(x) = \frac{1}{3}x^3 - 3x \quad f''(x) = x^2 - 3 \quad f'''(x) = 2x$ <p><u>2. Notwendige Bedingung für Wendestellen:</u></p> $f''(x) = 0 \Leftrightarrow x^2 - 3 = 0 \Leftrightarrow x^2 = 3 \Leftrightarrow x = \sqrt{3}$ $\Leftrightarrow x_{1/2} = \pm\sqrt{3} \text{ sind mögliche Wendestellen.}$ <p><u>3. Nachweis über die dritte Ableitung ob eine Wendestelle vorliegt :</u></p> $f'''(x_1) = f'''(\sqrt{3}) = 2 \cdot \sqrt{3} \neq 0 \Rightarrow x_1 = x_{W1} = \sqrt{3} \text{ ist eine Wendestelle.}$ $f'''(x_2) = f'''(-\sqrt{3}) = -2 \cdot \sqrt{3} \neq 0 \Rightarrow x_2 = x_{W2} = -\sqrt{3} \text{ ist eine Wendestelle.}$ <p><u>4. Bestimmen der Wendepunkte durch Einsetzen der Wendestellen in f(x)</u></p> $f(x_{W1/2}) = f(\pm\sqrt{3}) = \frac{1}{12}(\pm\sqrt{3})^4 - \frac{3}{2}(\pm\sqrt{3})^2 - 1 = \frac{1}{12} \cdot 9 - \frac{3}{2} \cdot 3 - 1$ $= \frac{3}{4} - \frac{9}{2} - 1 = \frac{3}{4} - \frac{18}{4} - \frac{4}{4} = -\frac{19}{4} \Rightarrow P_{W1/2} \left(\pm\sqrt{3} \mid -\frac{19}{4} = -4,75 \right)$
-----	--

A10	<p>Ausführliche Lösung (Die Graphen)</p> $f(x) = \frac{1}{12}x^4 - \frac{3}{2}x^2 - 1 \quad f'(x) = \frac{1}{3}x^3 - 3x \quad f''(x) = x^2 - 3 \quad f'''(x) = 2x$