Lösungen Training Differentialrechnung II (Wendepunktberechnung)

Ergebnisse:

E1	Ergebnis:
	$f(x)=\frac{1}{4}x^3-\frac{3}{2}x^2+5\Rightarrow P_W(2\,|\,1)$

E2	Ergebnis:
	$f(x)=\frac{1}{2}x^3-4x^2+8x\Rightarrow P_W\left(\frac{8}{3}\,\middle|\,\frac{64}{27}\right)$

E3	Ergebnis:
	$f(x)=\frac{1}{4}x^3-\frac{3}{2}x^2+3x-1\Rightarrow P_W(2\,|\,1)$

E4	Ergebnis:
	$f(x)=-\frac{1}{4}x^3+\frac{3}{2}x^2+1\Rightarrow P_W(2\,|\,5)$

E5	Ergebnis:
	$f(x)=\frac{1}{3}x^3+x^2-2x-1\Rightarrow P_W\left(-1\,\middle|\,\frac{5}{3}\right)$

E6	Ergebnis:
	$f(x)=\frac{1}{2}x^4-3x^2+\frac{3}{2}\Rightarrow P_{W1/2}(\pm1\,|\,-1)$

E7	Ergebnis:
	$f(x)=-\frac{1}{2}x^4+3x^2-1\Rightarrow P_{W1/2}\left(\pm1\,\middle|\,\frac{3}{2}=1{,}5\right)$

E8	Ergebnis:
	$f(x)=\frac{1}{4}x^4-x^3+\frac{3}{2}x^2-x+\frac{1}{2}\Rightarrow$ keine Wendepunkte.

E9	Ergebnis:
	$f(x)=-\frac{1}{4}x^4+x^3+1\Rightarrow P_{W1}(0\,|\,1)\quad P_{W2}(2\,|\,5)$

E10	Ergebnis:
	$f(x)=\frac{1}{12}x^4-\frac{3}{2}x^2-1\Rightarrow P_{W1/2}\left(\pm\sqrt{3}\approx1{,}73\,\middle|\,-\frac{19}{4}=-4{,}75\right)$

Ausführliche Lösungen:

Bemerkungen zum Wendepunkt:
Um den Wendepunkt zu bestimmen, ist die Funktion 3 mal abzuleiten.
Mögliche Wendestellen findet man dort, wo die 2. Ableitung Null ist.
Über die dritte Ableitung wird nachgewiesen, ob tatsächlich eine Wendestelle vorliegt. Die Dritte Ableitung muss an dieser Stelle ungleich Null sein.
Im Wendepunkt hat die Steigung eines Graphen im Intervall zwischen relativem Minima und relativem Maxima einen Extremwert. Dort ist die Steigung betragsmäßig am größten. Eine Ausnahme bildet der Sattelpunkt. Das ist ein Wendepunkt mit waagerechter Tangente.

A1	**Aufgabe**	
	Untersuchen Sie die folgenden ganzrationalen Funktionen auf Wendestellen und bestimmen Sie ggf. die Wendepunkte.	$f(x)=\frac{1}{4}x^3-\frac{3}{2}x^2+5$

A1 **Ausführliche Lösung** (Berechnungen)

1. Funktionsgleichung mit Ableitungen:

$$f(x)=\frac{1}{4}x^3-\frac{3}{2}x^2+5 \qquad f'(x)=\frac{3}{4}x^2-3x \qquad f''(x)=\frac{3}{2}x-3 \qquad f'''(x)=\frac{3}{2}$$

2. Notwendige Bedingung für eine Wendestelle:

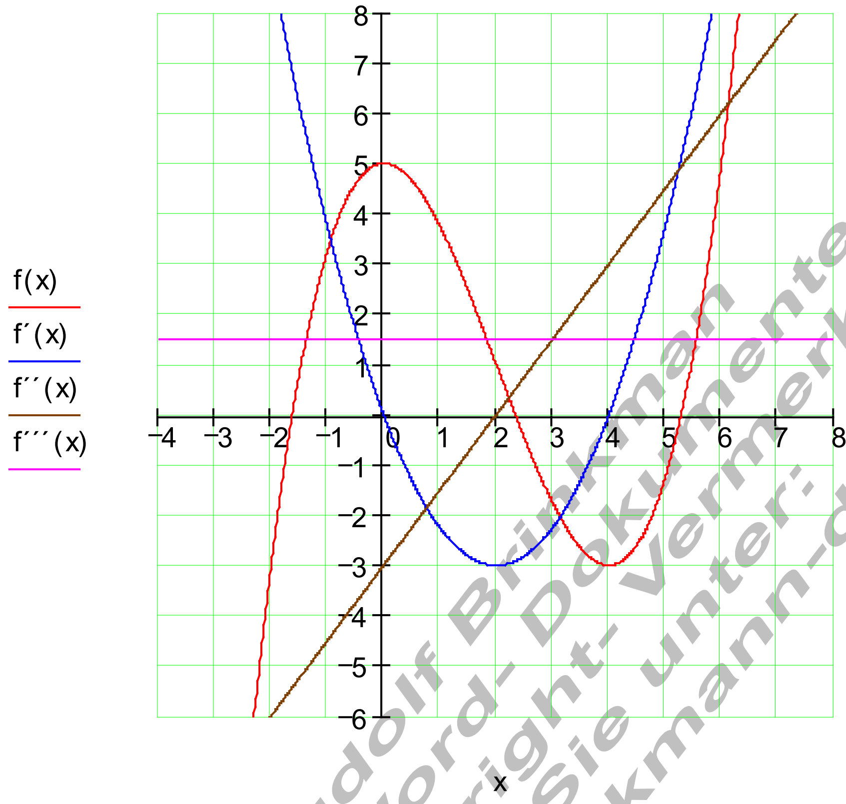
$f''(x)=0 \Leftrightarrow \frac{3}{2}x-3=0 \Leftrightarrow x=2$ ist mögliche Wendestelle.

3. Nachweis über die dritte Ableitung ob eine Wendestelle vorliegt :

$f'''(x)=f'''(2)=\frac{3}{2}\neq 0 \Rightarrow x=x_W=2$ ist eine Wendestelle.

4. Bestimmen des Wendepunktes durch Einsetzen der Wendestelle in $f(x)$

$$f(x_W)=f(2)=\frac{1}{4}\cdot 2^3-\frac{3}{2}\cdot 2^2+5=\frac{8}{4}-\frac{12}{2}+5=2-6+5=1\Rightarrow \underline{\underline{P_W(2\,|\,1)}}$$

A1	**Ausführliche Lösung** (Die Graphen)
	$f(x)=\frac{1}{4}x^3-\frac{3}{2}x^2+5$ $\quad f'(x)=\frac{3}{4}x^2-3x$ $\quad f''(x)=\frac{3}{2}x-3$ $\quad f'''(x)=\frac{3}{2}$
	

A2	**Aufgabe**	
	Untersuchen Sie die folgenden ganzrationalen Funktionen auf Wendestellen und bestimmen Sie ggf. die Wendepunkte.	$f(x)=\frac{1}{2}x^3-4x^2+8x$

A2 **Ausführliche Lösung** (Berechnungen)

1. Funktionsgleichung mit Ableitungen:

$$f(x)=\frac{1}{2}x^3-4x^2+8x \qquad f'(x)=\frac{3}{2}x^2-8x+8 \qquad f''(x)=3x-8 \qquad f'''(x)=3$$

2. Notwendige Bedingung für eine Wendestelle:

$f''(x)=0 \Leftrightarrow 3x-8=0 \Leftrightarrow x=\frac{8}{3}$ ist mögliche Wendestelle.

3. Nachweis über die dritte Ableitung ob eine Wendestelle vorliegt :

$f'''(x)=f'''\left(\frac{8}{3}\right)=3\neq 0 \Rightarrow x=x_W=\frac{8}{3}$ ist eine Wendestelle.

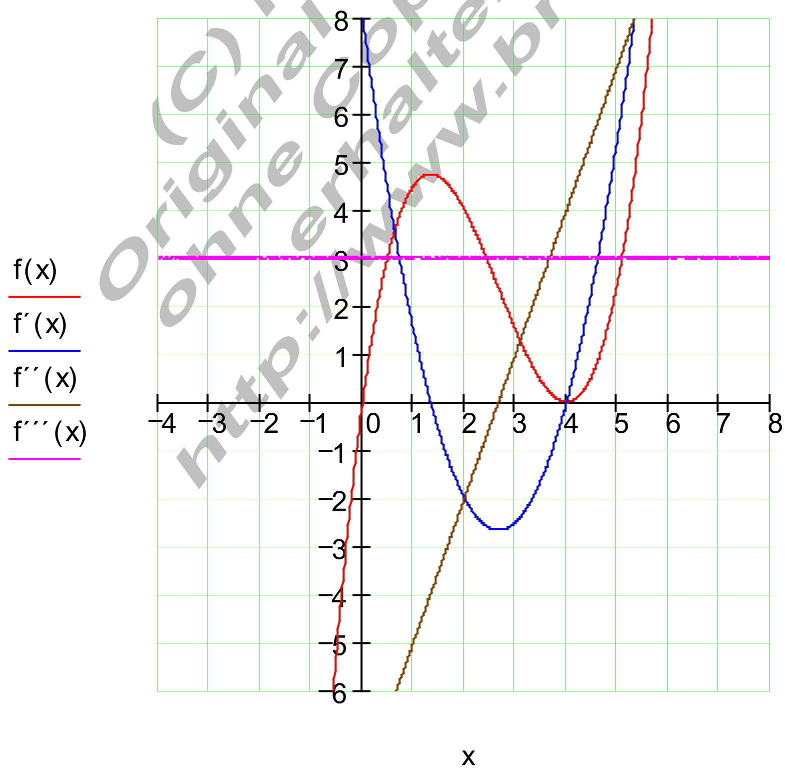
4. Bestimmen des Wendepunktes durch Einsetzen der Wendestelle in $f(x)$

$$f(x_W)=f\left(\frac{8}{3}\right)=\frac{1}{2}\cdot\left(\frac{8}{3}\right)^3-4\cdot\left(\frac{8}{3}\right)^2+8\cdot\frac{8}{3}=\frac{1}{2}\cdot\frac{512}{27}-4\cdot\frac{64}{9}+8\cdot\frac{8}{3}$$

$$=\frac{256}{27}-\frac{768}{27}+\frac{576}{27}=\frac{64}{27}\Rightarrow \underline{\underline{P_W\left(\frac{8}{3}\approx 2,67\,\middle|\,\frac{64}{27}\approx 2,37\right)}}$$

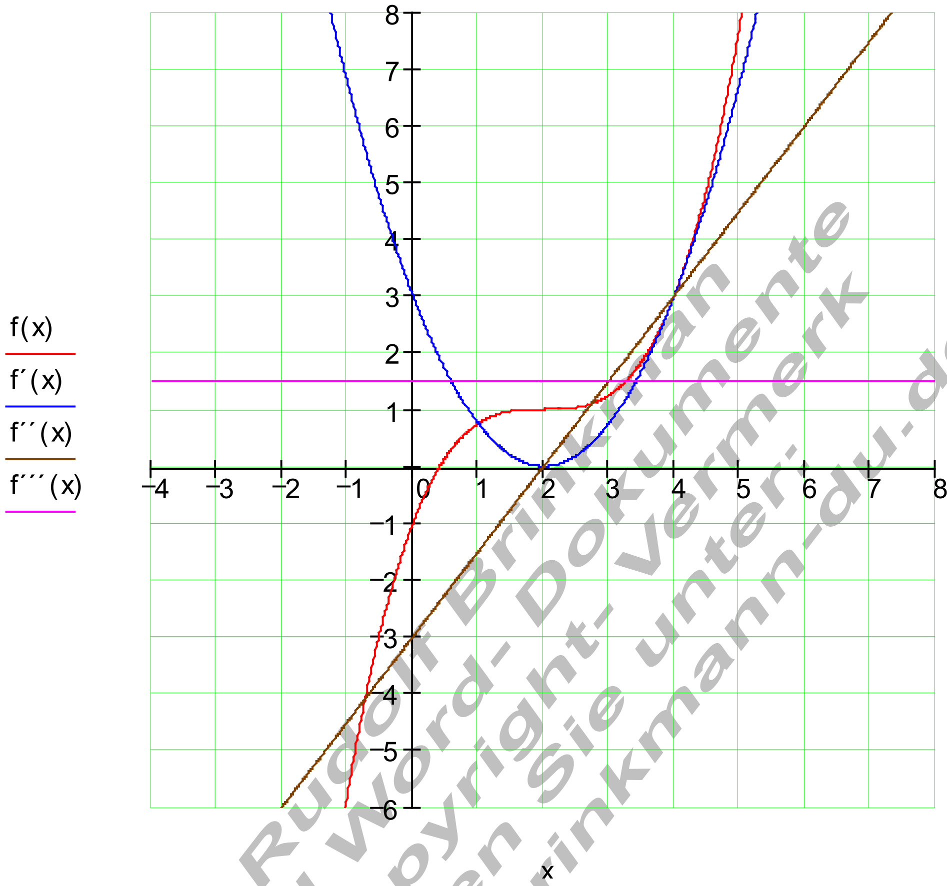
A2 **Ausführliche Lösung** (Die Graphen)

$$f(x)=\frac{1}{2}x^3-4x^2+8x \qquad f'(x)=\frac{3}{2}x^2-8x+8 \qquad f''(x)=3x-8 \qquad f'''(x)=3$$



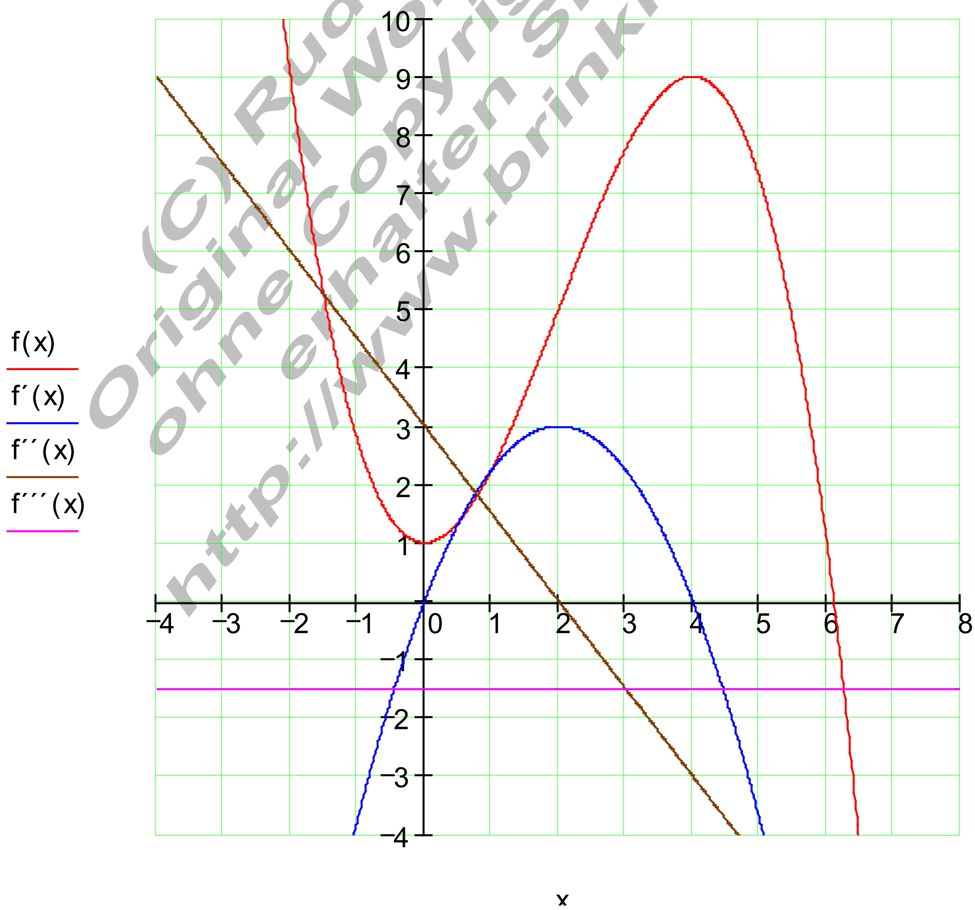
A3	**Aufgabe**	
	Untersuchen Sie die folgenden ganzrationalen Funktionen auf Wendestellen und bestimmen Sie ggf. die Wendepunkte.	$f(x)=\frac{1}{4}x^3-\frac{3}{2}x^2+3x-1$

A3	**Ausführliche Lösung** (Berechnungen)
	1. Funktionsgleichung mit Ableitungen: $f(x)=\frac{1}{4}x^3-\frac{3}{2}x^2+3x-1 \quad f'(x)=\frac{3}{4}x^2-3x+3 \quad f''(x)=\frac{3}{2}x-3 \quad f'''(x)=\frac{3}{2}$ 2. Notwendige Bedingung für eine Wendestelle: $f''(x)=0 \Leftrightarrow \frac{3}{2}x-3=0 \Leftrightarrow x=2$ ist mögliche Wendestelle. 3. Nachweis über die dritte Ableitung ob eine Wendestelle vorliegt: $f'''(x)=f'''(2)=\frac{3}{2}\neq 0 \Rightarrow x=x_W=2$ ist eine Wendestelle. 4. Bestimmen des Wendepunktes durch Einsetzen der Wendestelle in $f(x)$ $f(x_W)=f(2)=\frac{1}{4}\cdot 2^3-\frac{3}{2}\cdot 2^2+3\cdot 2-1=\frac{8}{4}-\frac{12}{2}+6-1=1 \Rightarrow \underline{\underline{P_W(2\,\vert\,1)}}$

A3	**Ausführliche Lösung** (Die Graphen)
	$f(x)=\frac{1}{4}x^3-\frac{3}{2}x^2+3x-1$ $\quad f'(x)=\frac{3}{4}x^2-3x+3$ $\quad f''(x)=\frac{3}{2}x-3$ $\quad f'''(x)=\frac{3}{2}$
	

A4	**Aufgabe**	
	Untersuchen Sie die folgenden ganzrationalen Funktionen auf Wendestellen und bestimmen Sie ggf. die Wendepunkte.	$f(x)=-\frac{1}{4}x^3+\frac{3}{2}x^2+1$

A4	**Ausführliche Lösung** (Berechnungen)
	1. Funktionsgleichung mit Ableitungen:
	$f(x)=-\frac{1}{4}x^3+\frac{3}{2}x^2+1 \quad f'(x)=-\frac{3}{4}x^2+3x \quad f''(x)=-\frac{3}{2}x+3 \quad f'''(x)=-\frac{3}{2}$
	2. Notwendige Bedingung für eine Wendestelle:
	$f''(x)=0 \Leftrightarrow -\frac{3}{2}x+3=0 \Leftrightarrow x=2$ ist mögliche Wendestelle.
	3. Nachweis über die dritte Ableitung ob eine Wendestelle vorliegt :
	$f'''(x)=f'''(2)=-\frac{3}{2}\neq 0 \Rightarrow x=x_W=2$ ist eine Wendestelle.
	4. Bestimmen des Wendepunktes durch Einsetzen der Wendestelle in $f(x)$
	$f(x_W)=f(2)=-\frac{1}{4}\cdot 8+\frac{3}{2}\cdot 4+1=-2+6+1 \Rightarrow \underline{\underline{P_W(2\mid 5)}}$

A4	**Ausführliche Lösung** (Die Graphen)
	$f(x)=-\frac{1}{4}x^3+\frac{3}{2}x^2+1 \quad f'(x)=-\frac{3}{4}x^2+3x \quad f''(x)=-\frac{3}{2}x+3 \quad f'''(x)=-\frac{3}{2}$
	

A5	**Aufgabe**	
	Untersuchen Sie die folgenden ganzrationalen Funktionen auf Wendestellen und bestimmen Sie ggf. die Wendepunkte.	$f(x)=\frac{1}{3}x^3+x^2-2x-1$

A5 **Ausführliche Lösung** (Berechnungen)

1. Funktionsgleichung mit Ableitungen:

$$f(x)=\frac{1}{3}x^3+x^2-2x-1 \quad f'(x)=x^2+2x-2 \quad f''(x)=2x+2 \quad f'''(x)=2$$

2. Notwendige Bedingung für eine Wendestelle:

$f''(x)=0 \Leftrightarrow 2x+2=0 \Leftrightarrow x=-1$ ist mögliche Wendestelle.

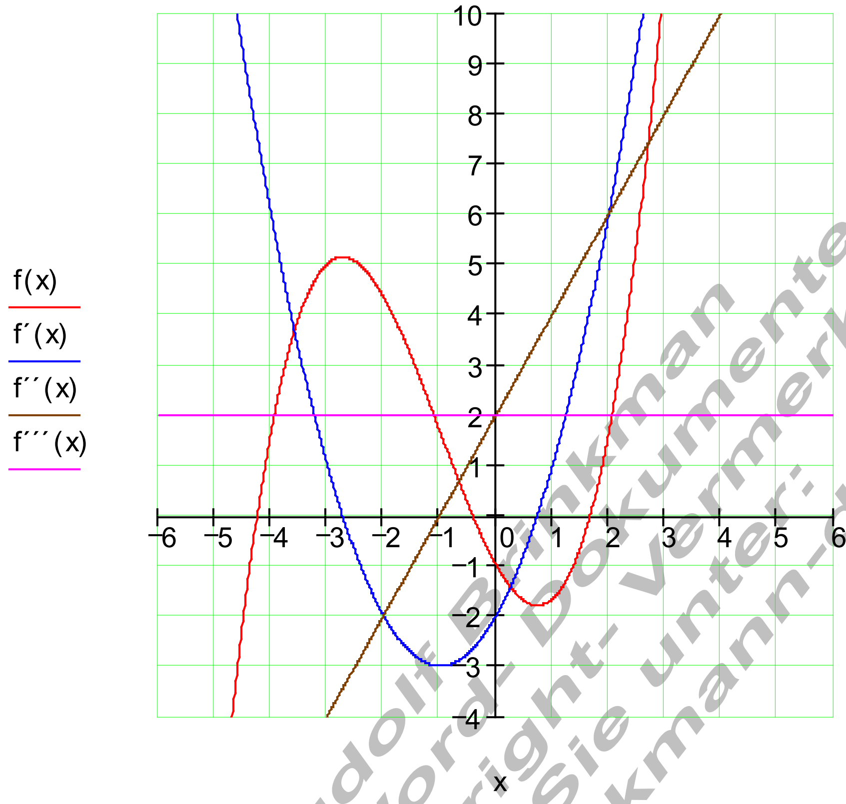
3. Nachweis über die dritte Ableitung ob eine Wendestelle vorliegt :

$f'''(x)=f'''(-1)=2\neq 0 \Rightarrow x=x_W=-1$ ist eine Wendestelle.

4. Bestimmen des Wendepunktes durch Einsetzen der Wendestelle in $f(x)$

$$f(x_W)=f(-1)=\frac{1}{3}\cdot(-1)^3+(-1)^2-2\cdot(-1)-1=-\frac{1}{3}+1+2-1=\frac{5}{3}$$

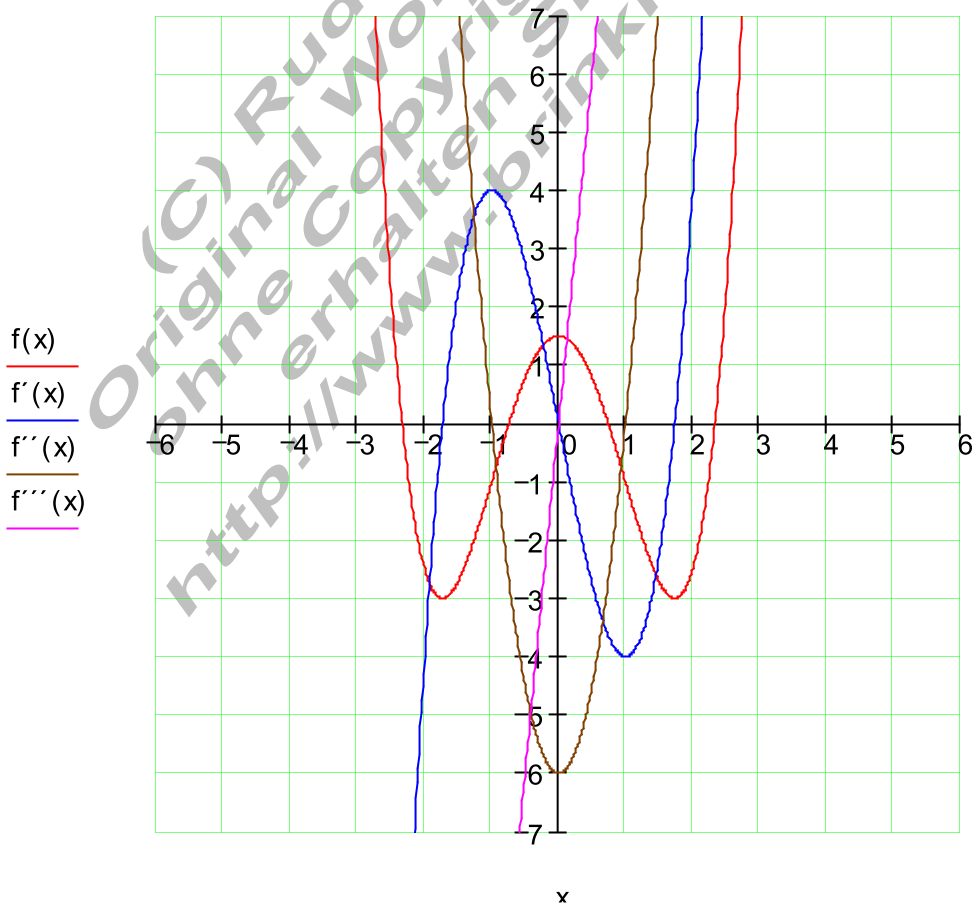
$$\Rightarrow P_W\left(-1\,\middle|\,\frac{5}{3}\approx 1{,}67\right)$$

A5	**Ausführliche Lösung** (Die Graphen)
	$f(x)=\frac{1}{3}x^3+x^2-2x-1 \quad f'(x)=x^2+2x-2 \quad f''(x)=2x+2 \quad f'''(x)=2$
	

A6	**Aufgabe**	
	Untersuchen Sie die folgenden ganzrationalen Funktionen auf Wendestellen und bestimmen Sie ggf. die Wendepunkte.	$f(x)=\frac{1}{2}x^4-3x^2+\frac{3}{2}$

A6	**Ausführliche Lösung** (Berechnungen)
	1. Funktionsgleichung mit Ableitungen:
	$f(x)=\frac{1}{2}x^4-3x^2+\frac{3}{2}$ $\quad f'(x)=2x^3-6x$ $\quad f''(x)=6x^2-6$ $\quad f'''(x)=12x$
	2. Notwendige Bedingung für Wendestellen:
	$f''(x)=0 \Leftrightarrow 6x^2-6=0 \Leftrightarrow x^2=1 \Leftrightarrow x_{1/2}=\pm1$ sind mögliche Wendestellen.
	3. Nachweis über die dritte Ableitung ob eine Wendestelle vorliegt :
	$f'''(x_1)=f'''(1)=12\cdot1=12\neq0 \Rightarrow x_1=x_{W1}=1$ ist eine Wendestelle.
	$f'''(x_2)=f'''(-1)=12\cdot(-1)=-12\neq0 \Rightarrow x_2=x_{W2}=-1$ ist eine Wendestelle.
	4. Bestimmen der Wendepunkte durch Einsetzen der Wendestellen in $f(x)$
	$f(x_{W1/2})=f(\pm1)=\frac{1}{2}(\pm1)^4-3\cdot(\pm1)^2+\frac{3}{2}=\frac{1}{2}-3+\frac{3}{2}=-1 \Rightarrow \underline{\underline{P_{W1/2}(\pm1 \mid -1)}}$

A6	**Ausführliche Lösung** (Die Graphen)
	$f(x)=\frac{1}{2}x^4-3x^2+\frac{3}{2}$ $\quad f'(x)=2x^3-6x$ $\quad f''(x)=6x^2-6$ $\quad f'''(x)=12x$



A7	**Aufgabe**	
	Untersuchen Sie die folgenden ganzrationalen Funktionen auf Wendestellen und bestimmen Sie ggf. die Wendepunkte.	$f(x) = -\frac{1}{2}x^4 + 3x^2 - 1$

A7 Ausführliche Lösung (Berechnungen)

1. Funktionsgleichung mit Ableitungen:

$$f(x) = -\frac{1}{2}x^4 + 3x^2 - 1 \quad f'(x) = -2x^3 + 6x \quad f''(x) = -6x^2 + 6 \quad f'''(x) = -12x$$

2. Notwendige Bedingung für Wendestellen:

$f''(x) = 0 \Leftrightarrow -6x^2 + 6 = 0 \Leftrightarrow x^2 = 1 \Leftrightarrow x_{1/2} = \pm 1$ sind mögliche Wendestellen.

3. Nachweis über die dritte Ableitung ob eine Wendestelle vorliegt:

$f'''(x_1) = f'''(1) = -12 \cdot 1 = -12 \neq 0 \Rightarrow x_1 = x_{W1} = 1$ ist eine Wendestelle.

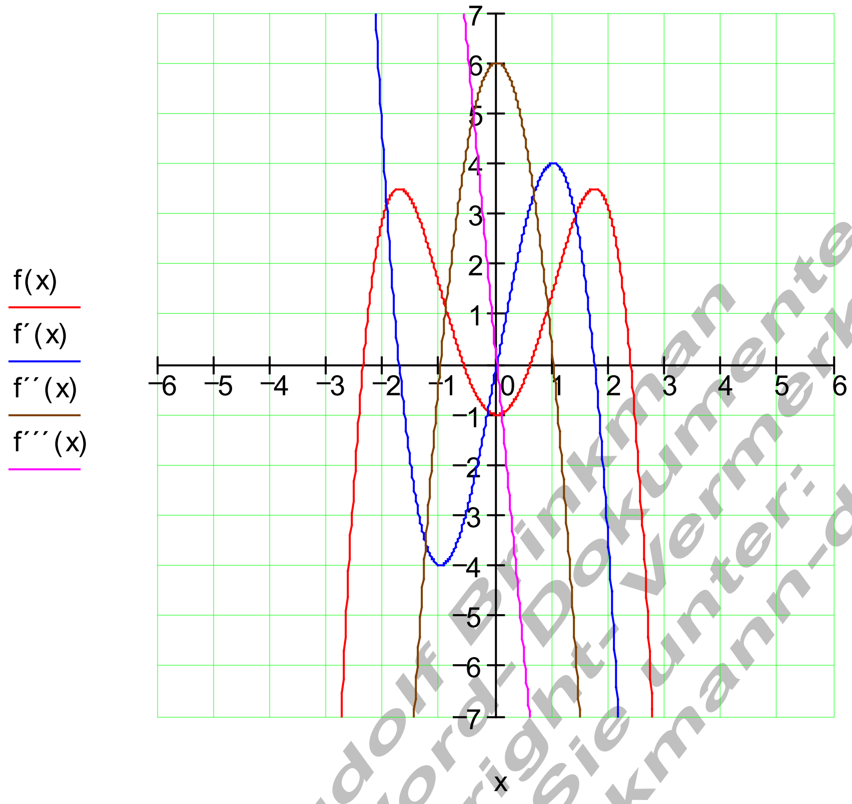
$f'''(x_2) = f'''(-1) = -12 \cdot (-1) = 12 \neq 0 \Rightarrow x_2 = x_{W2} = -1$ ist eine Wendestelle.

4. Bestimmen der Wendepunkte durch Einsetzen der Wendestellen in $f(x)$

$$f(x_{W1/2}) = f(\pm 1) = -\frac{1}{2}(\pm 1)^4 + 3 \cdot (\pm 1)^2 - 1 = -\frac{1}{2} + 3 - 1 = \frac{3}{2} \Rightarrow \underline{\underline{P_{W1/2}\left(\pm 1 \;\middle|\; \frac{3}{2} = 1{,}5\right)}}$$

A7 **Ausführliche Lösung** (Die Graphen)

$f(x) = -\frac{1}{2}x^4 + 3x^2 - 1 \quad f'(x) = -2x^3 + 6x \quad f''(x) = -6x^2 + 6 \quad f'''(x) = -12x$



A8 **Aufgabe**

Untersuchen Sie die folgenden ganzrationalen Funktionen auf Wendestellen und bestimmen Sie ggf. die Wendepunkte.

$f(x) = \frac{1}{4}x^4 - x^3 + \frac{3}{2}x^2 - x + \frac{1}{2}$

A8 **Ausführliche Lösung** (Berechnungen)

1. Funktionsgleichung mit Ableitungen:

$f(x) = \frac{1}{4}x^4 - x^3 + \frac{3}{2}x^2 - x + \frac{1}{2} \quad f'(x) = x^3 - 3x^2 + 3x - 1$

$f''(x) = 3x^2 - 6x + 3 \quad f'''(x) = 6x - 6$

2. Notwendige Bedingung für Wendestellen:

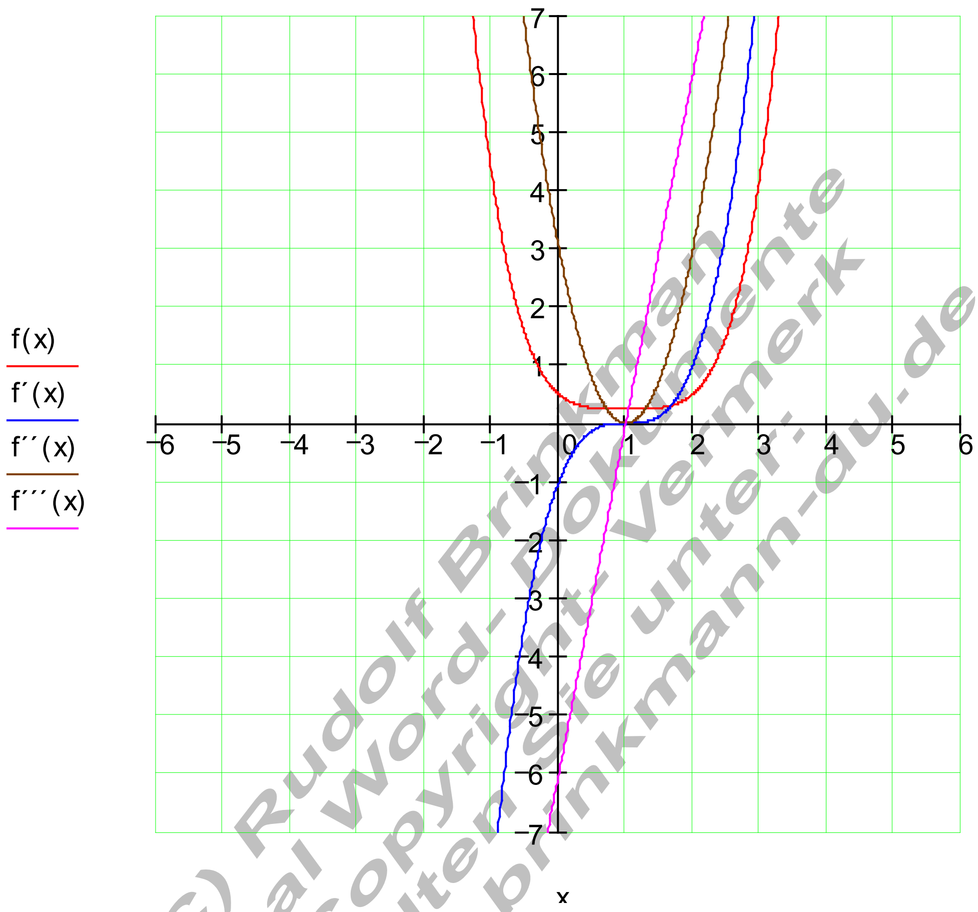
$f''(x) = 0 \Leftrightarrow 3x^2 - 6x + 3 = 0 \Leftrightarrow x^2 - 2x + 1 = (x-1)^2 = 0$

$\Leftrightarrow x_{1/2} = 1$ sind mögliche Wendestellen.

3. Nachweis über die dritte Ableitung ob eine Wendestelle vorliegt :

$f'''(x_{1/2}) = f'''(1) = 6 \cdot 1 - 6 = 0 \Rightarrow x_{1/2} = 1$ ist keine Wendestelle.

Der Graph von $f(x)$ hat keine Wendestellen.

A8	**Ausführliche Lösung** (Die Graphen)
	$f(x) = \frac{1}{4}x^4 - x^3 + \frac{3}{2}x^2 - x + \frac{1}{2} \quad f'(x) = x^3 - 3x^2 + 3x - 1$ $f''(x) = 3x^2 - 6x + 3 \quad f'''(x) = 6x - 6$
	

A9	**Aufgabe**	
	Untersuchen Sie die folgenden ganzrationalen Funktionen auf Wendestellen und bestimmen Sie ggf. die Wendepunkte.	$f(x) = -\frac{1}{4}x^4 + x^3 + 1$

A9 **Ausführliche Lösung** (Berechnungen)

1. Funktionsgleichung mit Ableitungen:

$f(x) = -\frac{1}{4}x^4 + x^3 + 1 \quad f'(x) = -x^3 + 3x^2 \quad f''(x) = -3x^2 + 6x \quad f'''(x) = -6x + 6$

2. Notwendige Bedingung für Wendestellen:

$f''(x) = 0 \Leftrightarrow -3x^2 + 6x = 0 \Leftrightarrow x(-3x + 6) = 0$

$\Leftrightarrow x_1 = 0 \quad \vee \quad x_2 = 2$ sind mögliche Wendestellen.

3. Nachweis über die dritte Ableitung ob eine Wendestelle vorliegt :

$f'''(x_1) = f'''(0) = 6 \neq 0 \Rightarrow x_1 = x_{W1} = 0$ ist eine Wendestelle.

$f'''(x_2) = f'''(2) = -6 \cdot 2 + 6 = -6 \neq 0 \Rightarrow x_2 = x_{W2} = 2$ ist eine Wendestelle.

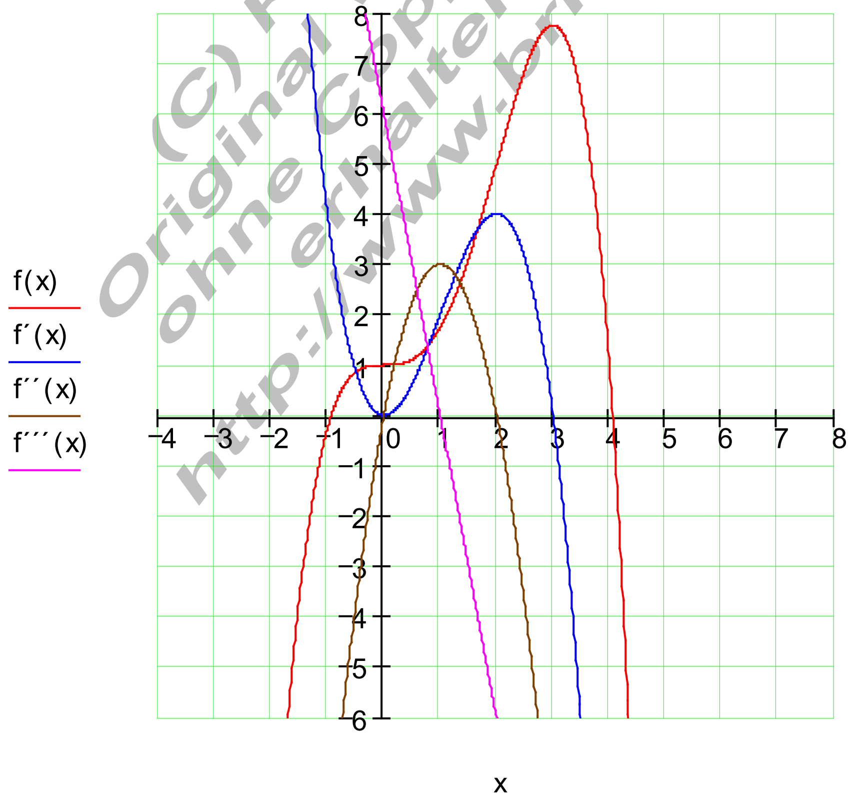
4. Bestimmen der Wendepunkte durch Einsetzen der Wendestellen in $f(x)$

$f(x_{W1}) = f(0) = 1 \Rightarrow \underline{\underline{P_{W1}(0\,|\,1)}}$

$f(x_{W2}) = f(2) = -\frac{1}{4} \cdot 16 + 8 + 1 = 5 \Rightarrow \underline{\underline{P_{W2}(2\,|\,5)}}$

A9 **Ausführliche Lösung** (Die Graphen)

$f(x) = -\frac{1}{4}x^4 + x^3 + 1 \quad f'(x) = -x^3 + 3x^2 \quad f''(x) = -3x^2 + 6x \quad f'''(x) = -6x + 6$



A10	**Aufgabe**	
	Untersuchen Sie die folgenden ganzrationalen Funktionen auf Wendestellen und bestimmen Sie ggf. die Wendepunkte.	$f(x)=\frac{1}{12}x^4-\frac{3}{2}x^2-1$

A10 Ausführliche Lösung (Berechnungen)

1. Funktionsgleichung mit Ableitungen:

$$f(x)=\frac{1}{12}x^4-\frac{3}{2}x^2-1 \quad f'(x)=\frac{1}{3}x^3-3x \quad f''(x)=x^2-3 \quad f'''(x)=2x$$

2. Notwendige Bedingung für Wendestellen:

$$f''(x)=0 \Leftrightarrow x^2-3=0 \Leftrightarrow x^2=3 \Leftrightarrow |x|=\sqrt{3}$$

$\Leftrightarrow x_{1/2}=\pm\sqrt{3}$ sind mögliche Wendestellen.

3. Nachweis über die dritte Ableitung ob eine Wendestelle vorliegt :

$f'''(x_1)=f'''(\sqrt{3})=2\cdot\sqrt{3}\neq 0 \Rightarrow x_1=x_{W1}=\sqrt{3}$ ist eine Wendestelle.

$f'''(x_2)=f'''(-\sqrt{3})=-2\cdot\sqrt{3}\neq 0 \Rightarrow x_2=x_{W2}=-\sqrt{3}$ ist eine Wendestelle.

4. Bestimmen der Wendepunkte durch Einsetzen der Wendestellen in $f(x)$

$$f(x_{W1/2})=f(\pm\sqrt{3})=\frac{1}{12}(\pm\sqrt{3})^4-\frac{3}{2}(\pm\sqrt{3})^2-1=\frac{1}{12}\cdot 9-\frac{3}{2}\cdot 3-1$$

$$=\frac{3}{4}-\frac{9}{2}-1=\frac{3}{4}-\frac{18}{4}-\frac{4}{4}=-\frac{19}{4}\Rightarrow \underline{\underline{P_{W1/2}\left(\pm\sqrt{3}\ \middle|\ -\frac{19}{4}=-4{,}75\right)}}$$

A10	**Ausführliche Lösung** (Die Graphen)
	$f(x)=\frac{1}{12}x^4-\frac{3}{2}x^2-1 \quad f'(x)=\frac{1}{3}x^3-3x \quad f''(x)=x^2-3 \quad f'''(x)=2x$