Lösungen Training Differentialrechnung II

Ergebnisse:

E1	Ergebnis:
	$f(x)=\frac{1}{4}x^3-\frac{3}{2}x^2+5 \Rightarrow P_W(2\mid 1)$

E2	Ergebnis:
	$f(x)=\frac{1}{2}x^3-4x^2+8x \Rightarrow P_W\left(\frac{8}{3}\,\middle|\,\frac{64}{27}\right)$

E3	Ergebnis:
	$f(x)=\frac{1}{4}x^3-\frac{3}{2}x^2+3x-1 \Rightarrow P_W(2\mid 1)$

E4	Ergebnis:
	$f(x)=-\frac{1}{4}x^3+\frac{3}{2}x^2+1 \Rightarrow P_W(2\mid 5)$

E5	Ergebnis:
	$f(x)=\frac{1}{3}x^3+x^2-2x-1 \Rightarrow P_W\left(-1\,\middle|\,\frac{5}{3}\right)$

E6	Ergebnis:
	$f(x)=\frac{1}{2}x^4-3x^2+\frac{3}{2} \Rightarrow P_{W1/2}(\pm 1\mid -1)$

E7	Ergebnis:
	$f(x)=-\frac{1}{2}x^4+3x^2-1 \Rightarrow P_{W1/2}\left(\pm 1\,\middle|\,\frac{3}{2}=1{,}5\right)$

E8	Ergebnis:
	$f(x)=\frac{1}{4}x^4-x^3+\frac{3}{2}x^2-x+\frac{1}{2} \Rightarrow$ keine Wendepunkte.

E9	Ergebnis:
	$f(x)=-\frac{1}{4}x^4+x^3+1 \Rightarrow P_{W1}(0\mid 1) \quad P_{W2}(2\mid 5)$

E10	Ergebnis:
	$f(x)=\frac{1}{12}x^4-\frac{3}{2}x^2-1 \Rightarrow P_{W1/2}\left(\pm\sqrt{3}\approx 1{,}73\,\middle|\,-\frac{19}{4}=-4{,}75\right)$

Ausführliche Lösungen:

A1 Ausführliche Lösung (Berechnungen)

1. Funktionsgleichung mit Ableitungen:

$$f(x)=\frac{1}{4}x^3-\frac{3}{2}x^2+5 \qquad f'(x)=\frac{3}{4}x^2-3x \qquad f''(x)=\frac{3}{2}x-3 \qquad f'''(x)=\frac{3}{2}$$

2. Notwendige Bedingung für eine Wendestelle:

$f''(x)=0 \Leftrightarrow \frac{3}{2}x-3=0 \Leftrightarrow x=2$ ist mögliche Wendestelle.

3. Nachweis über die dritte Ableitung ob eine Wendestelle vorliegt :

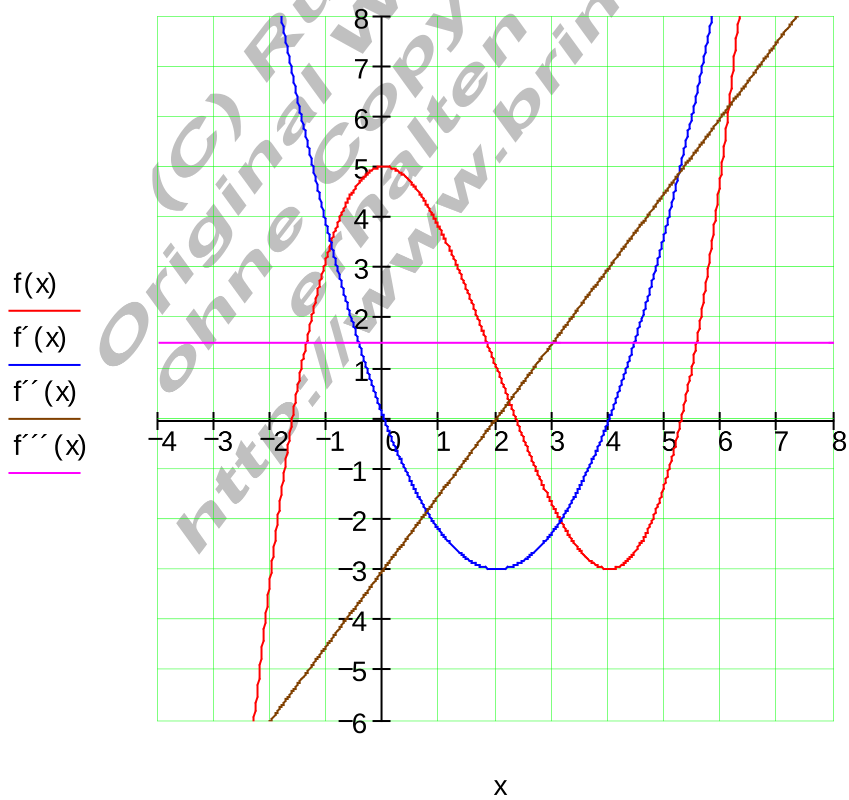
$f'''(x)=f'''(2)=\frac{3}{2}\neq 0 \Rightarrow x=x_W=2$ ist eine Wendestelle.

4. Bestimmen des Wendepunktes durch Einsetzen der Wendestelle in $f(x)$

$$f(x_W)=f(2)=\frac{1}{4}\cdot 2^3-\frac{3}{2}\cdot 2^2+5=\frac{8}{4}-\frac{12}{2}+5=2-6+5=1\Rightarrow \underline{\underline{P_W(2\,|\,1)}}$$

A1 Ausführliche Lösung (Die Graphen)

$$f(x)=\frac{1}{4}x^3-\frac{3}{2}x^2+5 \qquad f'(x)=\frac{3}{4}x^2-3x \qquad f''(x)=\frac{3}{2}x-3 \qquad f'''(x)=\frac{3}{2}$$



A2 Ausführliche Lösung (Berechnungen)

1. Funktionsgleichung mit Ableitungen:

$$f(x)=\frac{1}{2}x^3-4x^2+8x \qquad f'(x)=\frac{3}{2}x^2-8x+8 \qquad f''(x)=3x-8 \qquad f'''(x)=3$$

2. Notwendige Bedingung für eine Wendestelle:

$$f''(x)=0 \Leftrightarrow 3x-8=0 \Leftrightarrow x=\frac{8}{3}$$ ist mögliche Wendestelle.

3. Nachweis über die dritte Ableitung ob eine Wendestelle vorliegt :

$$f'''(x)=f'''\left(\frac{8}{3}\right)=3\neq 0 \Rightarrow x=x_W=\frac{8}{3}$$ ist eine Wendestelle.

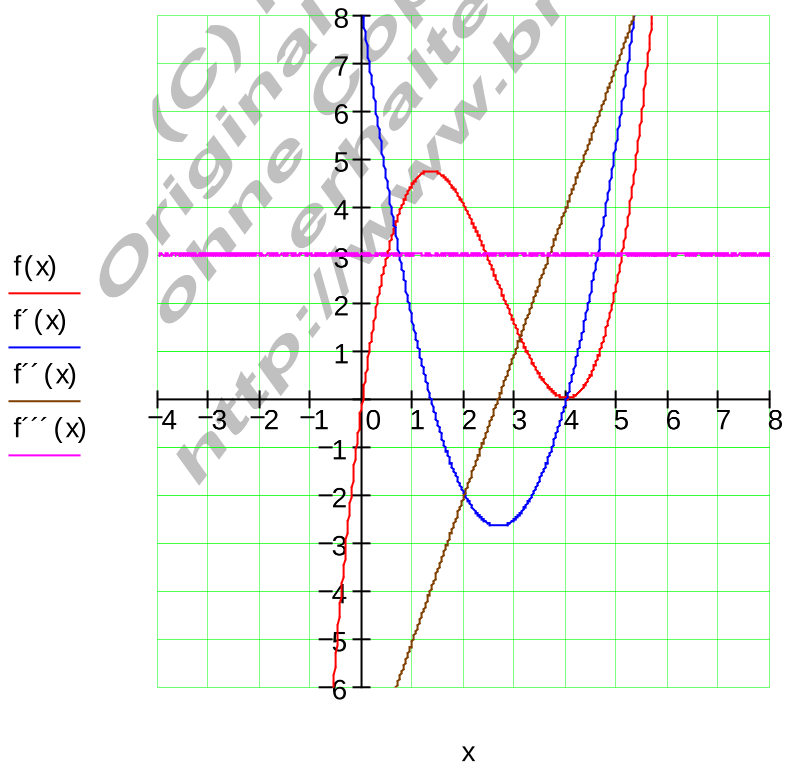
4. Bestimmen des Wendepunktes durch Einsetzen der Wendestelle in $f(x)$

$$f(x_W)=f\left(\frac{8}{3}\right)=\frac{1}{2}\cdot\left(\frac{8}{3}\right)^3-4\cdot\left(\frac{8}{3}\right)^2+8\cdot\frac{8}{3}=\frac{1}{2}\cdot\frac{512}{27}-4\cdot\frac{64}{9}+8\cdot\frac{8}{3}$$

$$=\frac{256}{27}-\frac{768}{27}+\frac{576}{27}=\frac{64}{27}\Rightarrow \underline{\underline{P_W\left(\frac{8}{3}\approx 2{,}67 \,\middle|\, \frac{64}{27}\approx 2{,}37\right)}}$$

A2 Ausführliche Lösung (Die Graphen)

$$f(x)=\frac{1}{2}x^3-4x^2+8x \qquad f'(x)=\frac{3}{2}x^2-8x+8 \qquad f''(x)=3x-8 \qquad f'''(x)=3$$



A3 Ausführliche Lösung (Berechnungen)

1. Funktionsgleichung mit Ableitungen:

$$f(x)=\frac{1}{4}x^3-\frac{3}{2}x^2+3x-1 \quad f'(x)=\frac{3}{4}x^2-3x+3 \quad f''(x)=\frac{3}{2}x-3 \quad f'''(x)=\frac{3}{2}$$

2. Notwendige Bedingung für eine Wendestelle:

$f''(x)=0 \Leftrightarrow \frac{3}{2}x-3=0 \Leftrightarrow x=2$ ist mögliche Wendestelle.

3. Nachweis über die dritte Ableitung ob eine Wendestelle vorliegt :

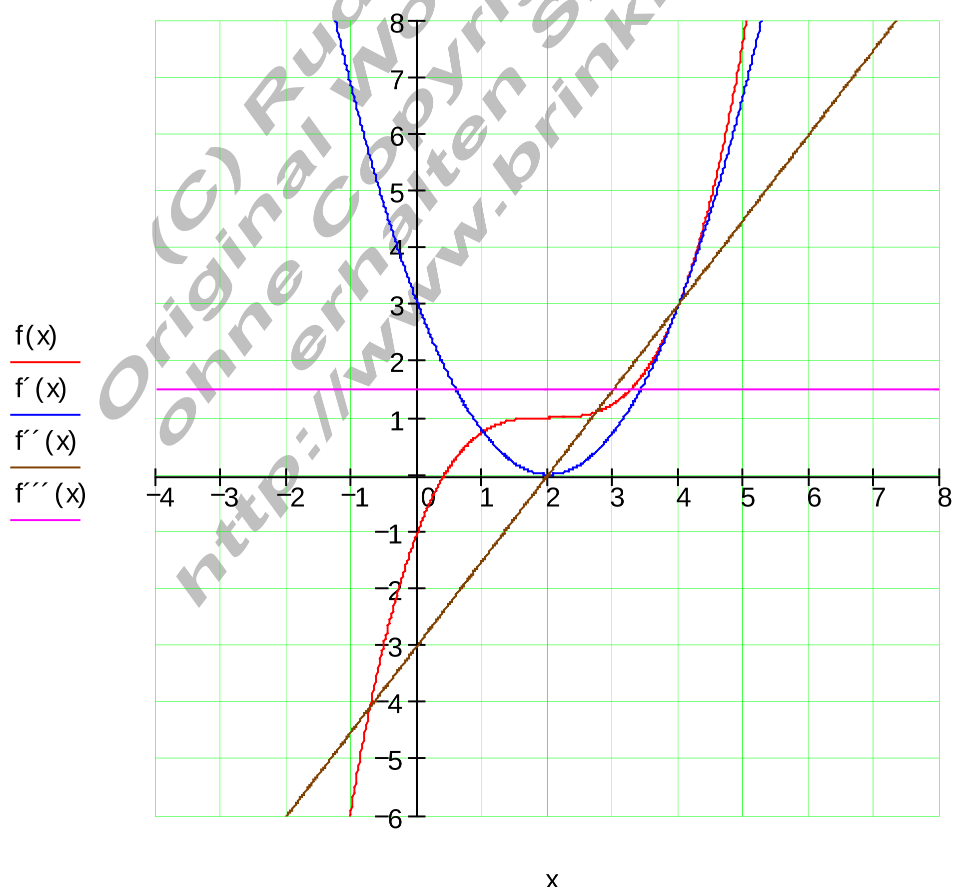
$f'''(x)=f'''(2)=\frac{3}{2}\neq 0 \Rightarrow x=x_W=2$ ist eine Wendestelle.

4. Bestimmen des Wendepunktes durch Einsetzen der Wendestelle in $f(x)$

$$f(x_W)=f(2)=\frac{1}{4}\cdot 2^3-\frac{3}{2}\cdot 2^2+3\cdot 2-1=\frac{8}{4}-\frac{12}{2}+6-1=1\Rightarrow \underline{\underline{P_W(2\,|\,1)}}$$

A3 Ausführliche Lösung (Die Graphen)

$$f(x)=\frac{1}{4}x^3-\frac{3}{2}x^2+3x-1 \quad f'(x)=\frac{3}{4}x^2-3x+3 \quad f''(x)=\frac{3}{2}x-3 \quad f'''(x)=\frac{3}{2}$$



A4 Ausführliche Lösung (Berechnungen)

1. Funktionsgleichung mit Ableitungen:

$$f(x) = -\frac{1}{4}x^3 + \frac{3}{2}x^2 + 1 \qquad f'(x) = -\frac{3}{4}x^2 + 3x \qquad f''(x) = -\frac{3}{2}x + 3 \qquad f'''(x) = -\frac{3}{2}$$

2. Notwendige Bedingung für eine Wendestelle:

$f''(x) = 0 \Leftrightarrow -\frac{3}{2}x + 3 = 0 \Leftrightarrow x = 2$ ist mögliche Wendestelle.

3. Nachweis über die dritte Ableitung ob eine Wendestelle vorliegt :

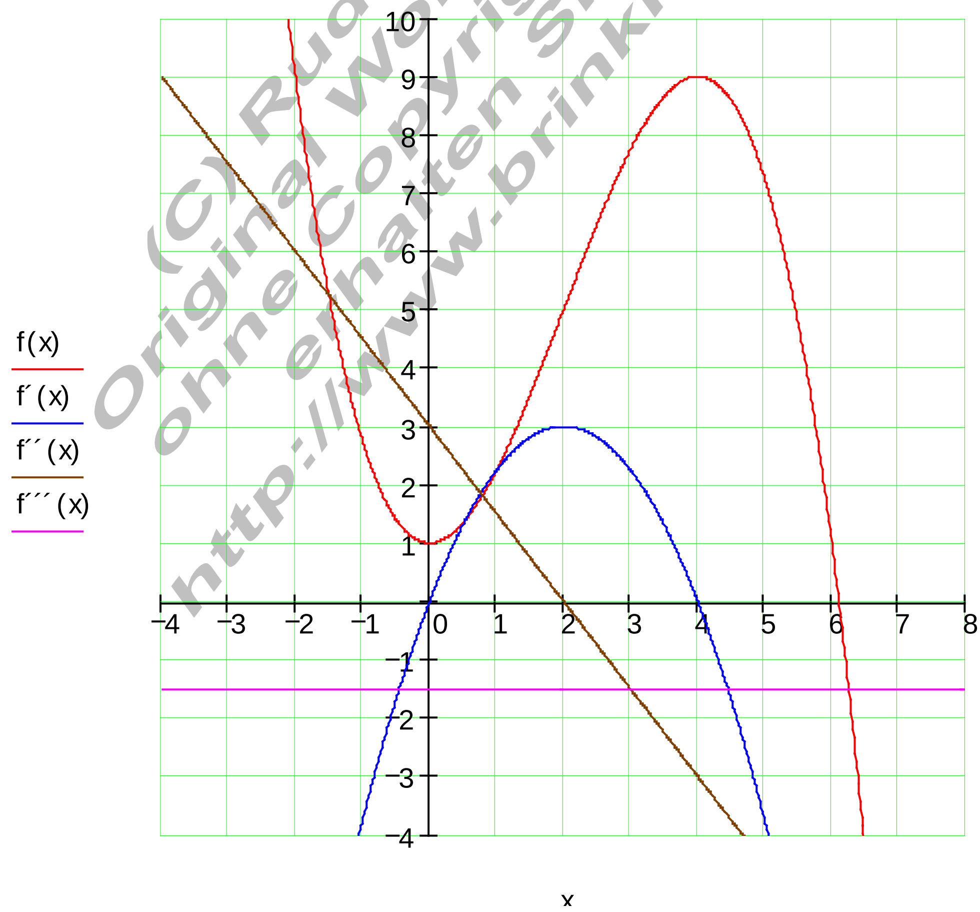
$f'''(x) = f'''(2) = -\frac{3}{2} \neq 0 \Rightarrow x = x_W = 2$ ist eine Wendestelle.

4. Bestimmen des Wendepunktes durch Einsetzen der Wendestelle in $f(x)$

$$f(x_W) = f(2) = -\frac{1}{4}\cdot 8 + \frac{3}{2}\cdot 4 + 1 = -2 + 6 + 1 \Rightarrow \underline{\underline{P_W(2|5)}}$$

A4 Ausführliche Lösung (Die Graphen)

$$f(x) = -\frac{1}{4}x^3 + \frac{3}{2}x^2 + 1 \qquad f'(x) = -\frac{3}{4}x^2 + 3x \qquad f''(x) = -\frac{3}{2}x + 3 \qquad f'''(x) = -\frac{3}{2}$$



A5 Ausführliche Lösung (Berechnungen)

1. Funktionsgleichung mit Ableitungen:

$$f(x)=\frac{1}{3}x^3+x^2-2x-1 \qquad f'(x)=x^2+2x-2 \qquad f''(x)=2x+2 \qquad f'''(x)=2$$

2. Notwendige Bedingung für eine Wendestelle:

$f''(x)=0 \Leftrightarrow 2x+2=0 \Leftrightarrow x=-1$ ist mögliche Wendestelle.

3. Nachweis über die dritte Ableitung ob eine Wendestelle vorliegt :

$f'''(x)=f'''(-1)=2\neq 0 \Rightarrow x=x_W=-1$ ist eine Wendestelle.

4. Bestimmen des Wendepunktes durch Einsetzen der Wendestelle in $f(x)$

$$f(x_W)=f(-1)=\frac{1}{3}\cdot(-1)^3+(-1)^2-2\cdot(-1)-1=-\frac{1}{3}+1+2-1=\frac{5}{3}$$

$$\Rightarrow P_W\left(-1\,\middle|\,\frac{5}{3}\approx 1{,}67\right)$$

A5 Ausführliche Lösung (Die Graphen)

$$f(x)=\frac{1}{3}x^3+x^2-2x-1 \qquad f'(x)=x^2+2x-2 \qquad f''(x)=2x+2 \qquad f'''(x)=2$$

A6 Ausführliche Lösung (Berechnungen)

1. Funktionsgleichung mit Ableitungen:

$$f(x)=\frac{1}{2}x^4-3x^2+\frac{3}{2} \qquad f'(x)=2x^3-6x \qquad f''(x)=6x^2-6 \qquad f'''(x)=12x$$

2. Notwendige Bedingung für Wendestellen:

$f''(x)=0 \Leftrightarrow 6x^2-6=0 \Leftrightarrow x^2=1 \Leftrightarrow x_{1/2}=\pm 1$ sind mögliche Wendestellen.

3. Nachweis über die dritte Ableitung ob eine Wendestelle vorliegt :

$f'''(x_1)=f'''(1)=12\cdot 1=12\neq 0 \Rightarrow x_1=x_{W1}=1$ ist eine Wendestelle.

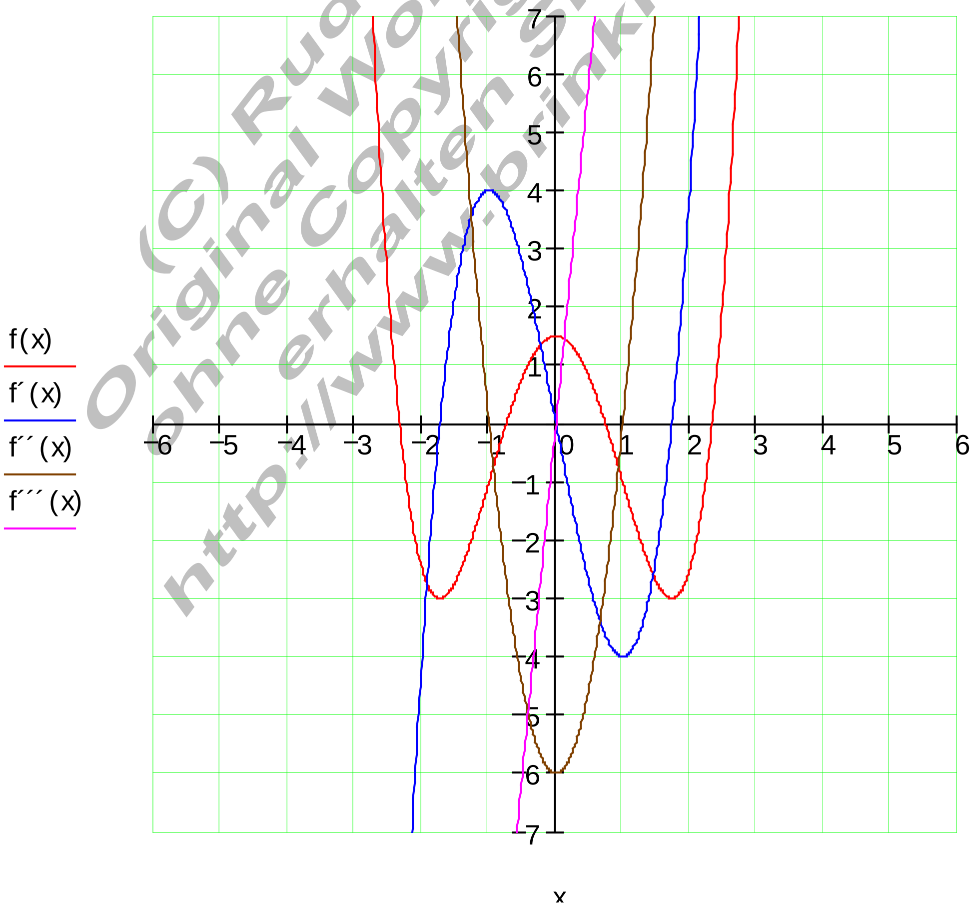
$f'''(x_2)=f'''(-1)=12\cdot(-1)=-12\neq 0 \Rightarrow x_2=x_{W2}=-1$ ist eine Wendestelle.

4. Bestimmen der Wendepunkte durch Einsetzen der Wendestellen in $f(x)$

$$f(x_{W1/2})=f(\pm 1)=\frac{1}{2}(\pm 1)^4-3\cdot(\pm 1)^2+\frac{3}{2}=\frac{1}{2}-3+\frac{3}{2}=-1 \Rightarrow \underline{\underline{P_{W1/2}(\pm 1\,|\,-1)}}$$

A6 Ausführliche Lösung (Die Graphen)

$$f(x)=\frac{1}{2}x^4-3x^2+\frac{3}{2} \qquad f'(x)=2x^3-6x \qquad f''(x)=6x^2-6 \qquad f'''(x)=12x$$



A7

Ausführliche Lösung (Berechnungen)

1. Funktionsgleichung mit Ableitungen:

$$f(x) = -\frac{1}{2}x^4 + 3x^2 - 1 \qquad f'(x) = -2x^3 + 6x \qquad f''(x) = -6x^2 + 6 \qquad f'''(x) = -12x$$

2. Notwendige Bedingung für Wendestellen:

$f''(x) = 0 \Leftrightarrow -6x^2 + 6 = 0 \Leftrightarrow x^2 = 1 \Leftrightarrow x_{1/2} = \pm 1$ sind mögliche Wendestellen.

3. Nachweis über die dritte Ableitung ob eine Wendestelle vorliegt :

$f'''(x_1) = f'''(1) = -12 \cdot 1 = -12 \neq 0 \Rightarrow x_1 = x_{W1} = 1$ ist eine Wendestelle.

$f'''(x_2) = f'''(-1) = -12 \cdot (-1) = 12 \neq 0 \Rightarrow x_2 = x_{W2} = -1$ ist eine Wendestelle.

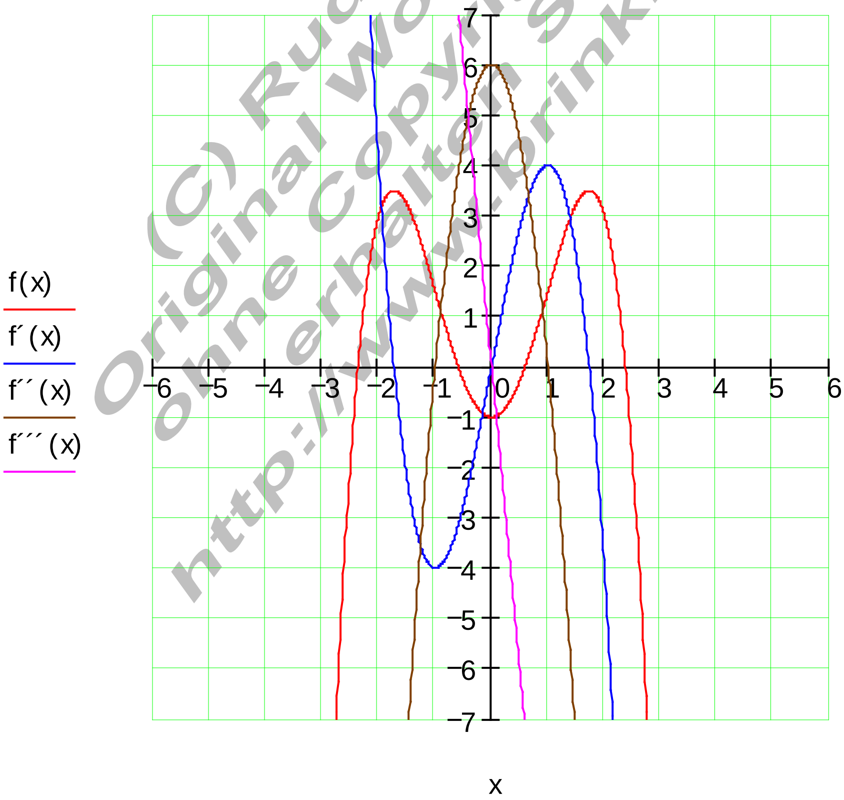
4. Bestimmen der Wendepunkte durch Einsetzen der Wendestellen in $f(x)$

$$f(x_{W1/2}) = f(\pm 1) = -\frac{1}{2}(\pm 1)^4 + 3 \cdot (\pm 1)^2 - 1 = -\frac{1}{2} + 3 - 1 = \frac{3}{2} \Rightarrow P_{W1/2}\left(\pm 1 \,\middle|\, \frac{3}{2} = 1{,}5\right)$$

A7

Ausführliche Lösung (Die Graphen)

$$f(x) = -\frac{1}{2}x^4 + 3x^2 - 1 \qquad f'(x) = -2x^3 + 6x \qquad f''(x) = -6x^2 + 6 \qquad f'''(x) = -12x$$



A8 Ausführliche Lösung (Berechnungen)

1. Funktionsgleichung mit Ableitungen:

$f(x)=\frac{1}{4}x^4-x^3+\frac{3}{2}x^2-x+\frac{1}{2} \qquad f'(x)=x^3-3x^2+3x-1$

$f''(x)=3x^2-6x+3 \qquad f'''(x)=6x-6$

2. Notwendige Bedingung für Wendestellen:

$f''(x)=0 \Leftrightarrow 3x^2-6x+3=0 \Leftrightarrow x^2-2x+1=(x-1)^2=0$

$\Leftrightarrow x_{1/2}=1$ sind mögliche Wendestellen.

3. Nachweis über die dritte Ableitung ob eine Wendestelle vorliegt :

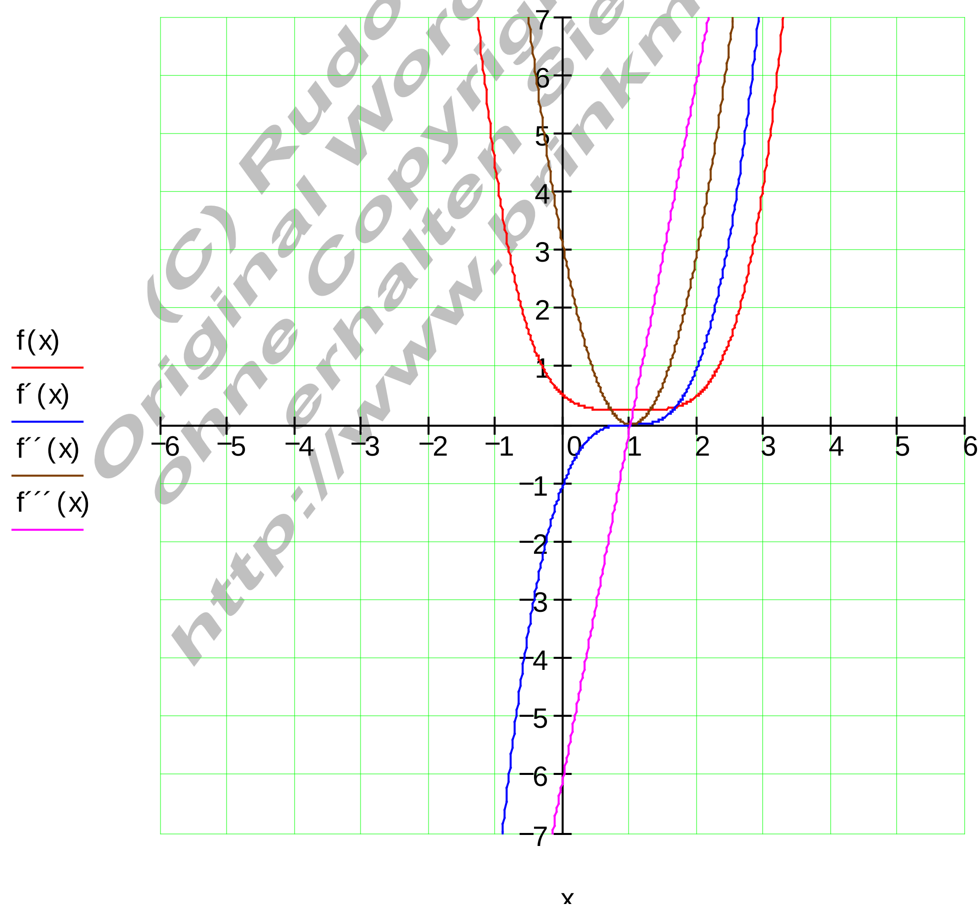
$f'''(x_{1/2})=f'''(1)=6\cdot 1-6=0 \Rightarrow x_{1/2}=1$ ist keine Wendestelle.

Der Graph von $f(x)$ hat keine Wendestellen.

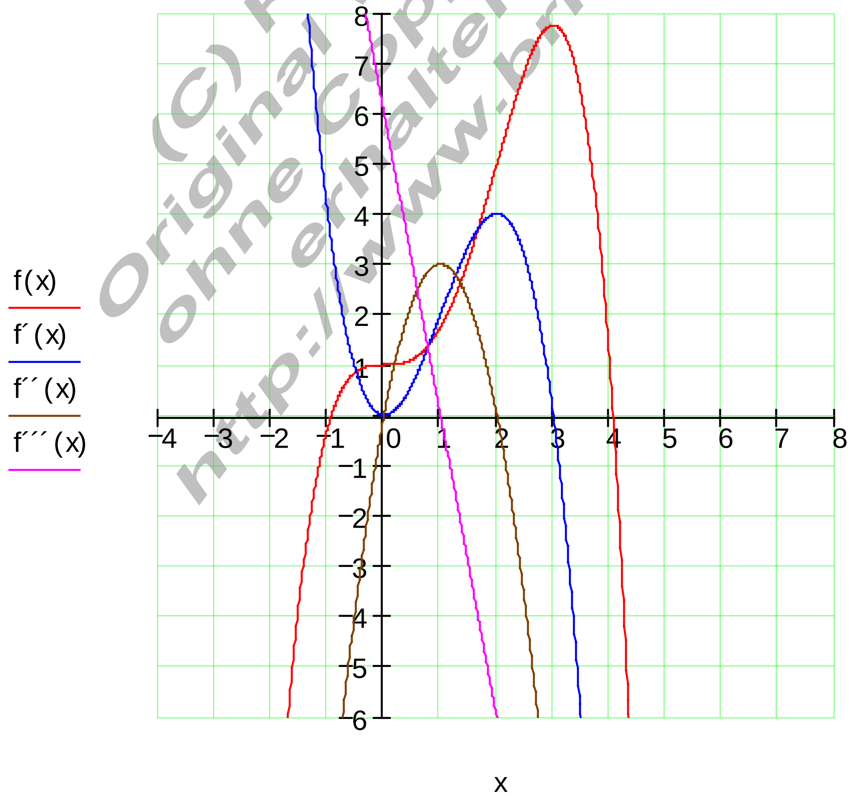
A8 Ausführliche Lösung (Die Graphen)

$f(x)=\frac{1}{4}x^4-x^3+\frac{3}{2}x^2-x+\frac{1}{2} \qquad f'(x)=x^3-3x^2+3x-1$

$f''(x)=3x^2-6x+3 \qquad f'''(x)=6x-6$



A9	Ausführliche Lösung (Berechnungen)
	1. Funktionsgleichung mit Ableitungen: $f(x)=-\frac{1}{4}x^4+x^3+1 \quad f'(x)=-x^3+3x^2 \quad f''(x)=-3x^2+6x \quad f'''(x)=-6x+6$ 2. Notwendige Bedingung für Wendestellen: $f''(x)=0 \Leftrightarrow -3x^2+6x=0 \Leftrightarrow x(-3x+6)=0$ $\Leftrightarrow x_1=0 \quad \vee \quad x_2=2$ sind mögliche Wendestellen. 3. Nachweis über die dritte Ableitung ob eine Wendestelle vorliegt : $f'''(x_1)=f'''(0)=6\neq 0 \Rightarrow x_1=x_{W1}=0$ ist eine Wendestelle. $f'''(x_2)=f'''(2)=-6\cdot 2+6=-6\neq 0 \Rightarrow x_2=x_{W2}=2$ ist eine Wendestelle. 4. Bestimmen der Wendepunkte durch Einsetzen der Wendestellen in $f(x)$ $f(x_{W1})=f(0)=1 \Rightarrow \underline{\underline{P_{W1}(0\mid 1)}}$ $f(x_{W2})=f(2)=-\frac{1}{4}\cdot 16+8+1=5 \Rightarrow \underline{\underline{P_{W2}(2\mid 5)}}$

A9	Ausführliche Lösung (Die Graphen)
	$f(x)=-\frac{1}{4}x^4+x^3+1 \quad f'(x)=-x^3+3x^2 \quad f''(x)=-3x^2+6x \quad f'''(x)=-6x+6$
	

A10 Ausführliche Lösung (Berechnungen)

1. Funktionsgleichung mit Ableitungen:

$$f(x)=\frac{1}{12}x^4-\frac{3}{2}x^2-1 \qquad f'(x)=\frac{1}{3}x^3-3x \qquad f''(x)=x^2-3 \qquad f'''(x)=2x$$

2. Notwendige Bedingung für Wendestellen:

$$f''(x)=0 \Leftrightarrow x^2-3=0 \Leftrightarrow x^2=3 \Leftrightarrow |x|=\sqrt{3}$$

$\Leftrightarrow x_{1/2}=\pm\sqrt{3}$ sind mögliche Wendestellen.

3. Nachweis über die dritte Ableitung ob eine Wendestelle vorliegt :

$f'''(x_1)=f'''\left(\sqrt{3}\right)=2\cdot\sqrt{3}\neq 0 \Rightarrow x_1=x_{W1}=\sqrt{3}$ ist eine Wendestelle.

$f'''(x_2)=f'''\left(-\sqrt{3}\right)=-2\cdot\sqrt{3}\neq 0 \Rightarrow x_2=x_{W2}=-\sqrt{3}$ ist eine Wendestelle.

4. Bestimmen der Wendepunkte durch Einsetzen der Wendestellen in $f(x)$

$$f(x_{W1/2})=f\left(\pm\sqrt{3}\right)=\frac{1}{12}\left(\pm\sqrt{3}\right)^4-\frac{3}{2}\left(\pm\sqrt{3}\right)^2-1=\frac{1}{12}\cdot 9-\frac{3}{2}\cdot 3-1$$

$$=\frac{3}{4}-\frac{9}{2}-1=\frac{3}{4}-\frac{18}{4}-\frac{4}{4}=-\frac{19}{4}\Rightarrow \underline{\underline{P_{W1/2}\left(\pm\sqrt{3}\;\middle|\;-\frac{19}{4}=-4{,}75\right)}}$$

A10 Ausführliche Lösung (Die Graphen)

$$f(x)=\frac{1}{12}x^4-\frac{3}{2}x^2-1 \qquad f'(x)=\frac{1}{3}x^3-3x \qquad f''(x)=x^2-3 \qquad f'''(x)=2x$$