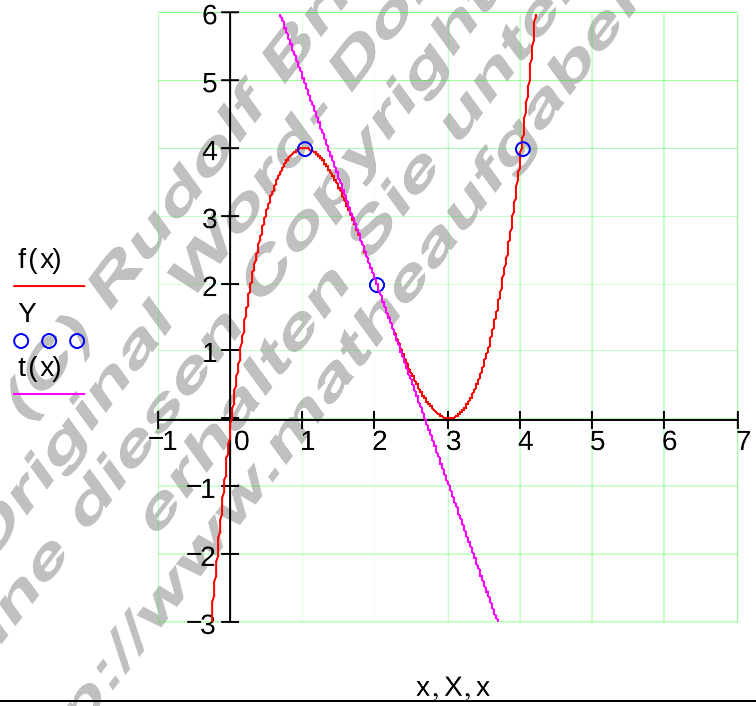
Lösung zur Kurvendiskussion ganzrationaler Funktionen I

Ergebnisse Aufgabe 1.1

E1.1	Ergebnisse			
	a)	Funktionsgleichung: $f(x) = x^3 - 6x^2 + 9x$	b)	Maximale Definitionsmenge von: $f(x) = x^3 - 6x^2 + 9x$ $\boxed{D = \mathbb{R}}$
	c)	Verlauf des Graphen von III nach I	d)	Symmetrie: keine
	e)	Extrempunkte: $f'(x) = 3x^2 - 12x + 9 \Rightarrow f''(x) = 6x - 12 \Leftrightarrow f'''(x) = 6$ $P_{Min}(3\mid 0); P_{Max}(1\mid 4)$		
	f)	Wendepunkt und Wendetangente: $P_W(2\mid 2)$ $t(x) = -3x + 8$		
	g)	Achsenschnittpunkte: $P_y(0\mid 0); P_{x1}(0\mid 0); P_{x2/3}(3\mid 0)$		
	h)	Der Graph:  		
	i)	Krümmungs- und Monotonieverhalten: Rechtskrümmung in $\left]-\infty; 2\right[$ Linkskrümmung in $\left]2; \infty\right[$ streng monoton wachsend in $\left]-\infty; 1\right[$ streng monoton fallend in $\left]1; 3\right[$ streng monoton wachsend in $\left]3; \infty\right[$		
	j)	Randpunkte des Definitionsbereichs: $\lim\limits_{x\to -\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to -\infty} x^3\left(1 - \frac{6}{x} + \frac{9}{x^2}\right) = -\infty$ $\lim\limits_{x\to \infty} f(x) = \lim\limits_{x\to \infty} x^3\left(1 - \frac{6}{x} + \frac{9}{x^2}\right) = \infty$		

Ausführliche Lösungen Aufgabe 1.1

A1.1 Ausführliche Lösung

a) Aufstellen der Funktionsgleichung aus den vorgegebenen Punkten.

Allgemeine Funktionsgleichung 3. Grades: $f(x) = a_3x^3 + a_2x^2 + a_1x + a_0$

$P_1(1 \mid 4) \Rightarrow f(1) = 4 \Leftrightarrow 1a_3 + 1a_2 + 1a_1 + 1a_0 = 4$

$P_2(2 \mid 2) \Rightarrow f(2) = 2 \Leftrightarrow 8a_3 + 4a_2 + 2a_1 + 1a_0 = 2$

$P_3(4 \mid 4) \Rightarrow f(4) = 4 \Leftrightarrow 64a_3 + 16a_2 + 4a_1 + 1a_0 = 4$

$P_4(5 \mid 20) \Rightarrow f(5) = 20 \Leftrightarrow 125a_3 + 25a_2 + 5a_1 + 1a_0 = 20$

Lösung des Gleichungssystems mittels Gauß- Algorithmus

a_0	a_1	a_2	a_3		
1	1	1	1	4	
1	2	4	8	2	II − I
1	4	16	64	4	II − I
1	5	25	125	20	II − 1
1	1	1	1	4	
0	1	3	7	−2	
0	3	15	63	0	$III - 3 \cdot II$
0	4	24	124	16	$IV - 4 \cdot II$
1	1	1	1	4	
0	1	3	7	−2	
0	0	6	42	6	
0	0	12	96	24	$IV - 2 \cdot III$
1	1	1	1	4	
0	1	3	7	−2	
0	0	6	42	6	
0	0	0	12	12	

$12a_3 = 12 \Leftrightarrow \boxed{a_3 = 1}$

$6a_2 + 42a_3 = 6$

$\Leftrightarrow 6a_2 + 42 \cdot 1 = 6 \mid -42 \Leftrightarrow 6a_2 = -36 \mid 6$

$\Leftrightarrow \boxed{a_2 = -6}$

$a_1 + 3a_2 + 7a_3 = -2$

$\Leftrightarrow a_1 + 3 \cdot (-6) + 7 \cdot 1 = -2$

$\Leftrightarrow a_1 - 18 + 7 = -2 \mid +18 - 7$

$\Leftrightarrow \boxed{a_1 = 9}$

$a_0 + a_1 + a_2 + a_3 = 4$

$\Leftrightarrow a_0 + 9 - 6 + 1 = 4 \mid -9 + 6 - 1$

$\Leftrightarrow \boxed{a_0 = 0}$

Funktionsgleichung:

$\boxed{f(x) = x^3 - 6x^2 + 9x}$

A1.1 Ausführliche Lösung

b) Da ganzrationale Funktionen auf ganz IR definiert sind, ist die maximale Definitionsmenge von

$f(x) = x^3 - 6x^2 + 9x \qquad \boxed{D = \mathbb{R}}$

A1.1 Ausführliche Lösung

c) Der Summand von f(x) mit der höchsten Potenz hat Einfluss auf den Verlauf des Graphen.

Für $f(x) = x^3 - 6x^2 + 9x$ gilt: Verlauf von $III \rightarrow I$

Das bedeutet, der Graph beginnt im 3. Quadranten und endet im 1. Quadranten. Für den Verlauf dazwischen, kann man zunächst noch keine Aussage treffen.

A1.1	Ausführliche Lösung	
	d)	Da die Summanden von f(x) sowohl gerade als auch ungerade Exponenten besitzen, ist der Graph von f(x) weder punkt-, noch achsensymmetrisch.

A1.1 Ausführliche Lösung

e) Extrempunkte:

Die Ableitungen von: $f(x) = x^3 - 6x^2 + 9x$

$f'(x) = 3x^2 - 12x + 9 \Rightarrow f''(x) = 6x - 12 \Rightarrow f'''(x) = 6$

Stellen mit waagerechter Tangente:

$f'(x) = 0 \Leftrightarrow 3x^2 - 12x + 9 = 0 \,|:3$

$\Leftrightarrow x^2 - 4x + 3 = 0 \Rightarrow p = -4\,;\, q = 3$

$D = \left(\frac{p}{2}\right)^2 - q = 4 - 3 = 1 \Rightarrow \sqrt{D} = \sqrt{1} = 1$

$x_{1/2} = -\frac{p}{2} \pm \sqrt{D}$ | $x_1 = 2 + 1 = 3$, $x_2 = 2 - 1 = 1$ Stellen mit waagerechter Tangente

Überprüfung von $f''(x) \neq 0$:

$f''(x_1) = f''(3) = 6 \cdot 3 - 12 = 18 - 12 = 6 > 0 \Rightarrow$ rel. Min bei $x_1 = 3$

$f''(x_2) = f''(1) = 6 \cdot 1 - 12 = 6 - 12 = -6 < 0 \Rightarrow$ rel. Max bei $x_2 = 1$

Extremwerte und Extrempunkte:

$f(x_1) = f(3) = 3^3 - 6 \cdot 3^2 + 9 \cdot 3 = 27 - 54 + 27 = 0 \Rightarrow \boxed{P_{Min}(3 \mid 0)}$

$f(x_2) = f(1) = 1^3 - 6 \cdot 1^2 + 9 \cdot 1 = 1 - 6 + 9 = 4 \quad \Rightarrow \boxed{P_{Max}(1 \mid 4)}$

A1.1 Ausführliche Lösung

f) Wendepunkt und Wendetangente:

$f''(x) = 0 \Leftrightarrow 6x - 12 = 0 \,|+12$

$\Leftrightarrow 6x = 12 \,|:6$

$\Leftrightarrow x = 2$

Überprüfung von $f'''(x) \neq 0$

Mit $f'''(x) = f'''(2) = 6 \neq 0$ ist $x = x_w = 2$ Wendestelle.

$f(x_w) = f(2) = 2$ wegen $P(2 \mid 2) \Rightarrow$ Wendepunkt: $\boxed{P_w(2 \mid 2)}$

Wendetangente: $t(x) = f'(x_w)(x - x_w) + f(x_w)$

$f'(x_w) = f'(2) = 3 \cdot 2^2 - 12 \cdot 2 + 9 = 12 - 24 + 9 = -3$

$\boxed{t(x)} = f'(x_w)(x - x_w) + f(x_w) = -3(x - 2) + 2 = -3x + 6 + 2 = \boxed{-3x + 8}$

A1.1	Ausführliche Lösung	
	g)	Achsenschnittpunkte:

$f(x) = x^3 - 6x^2 + 9x$

Schnittpunkt mit der y – Achse:

$f(0) = 0^3 - 6\cdot 0^2 + 9\cdot 0 = 0 \Rightarrow \boxed{P_y(0 \mid 0)}$

Schnittpunkte mit der x – Achse (Nullstellen):

$f(x) = 0 \Leftrightarrow x^3 - 6x^2 + 9x = 0$

$\Leftrightarrow x\left(x^2 - 6x + 9\right) = 0 \Rightarrow x_1 = 0$

$x^2 - 6x + 9 = 0 \Rightarrow p = -6\,;\, q = 9$

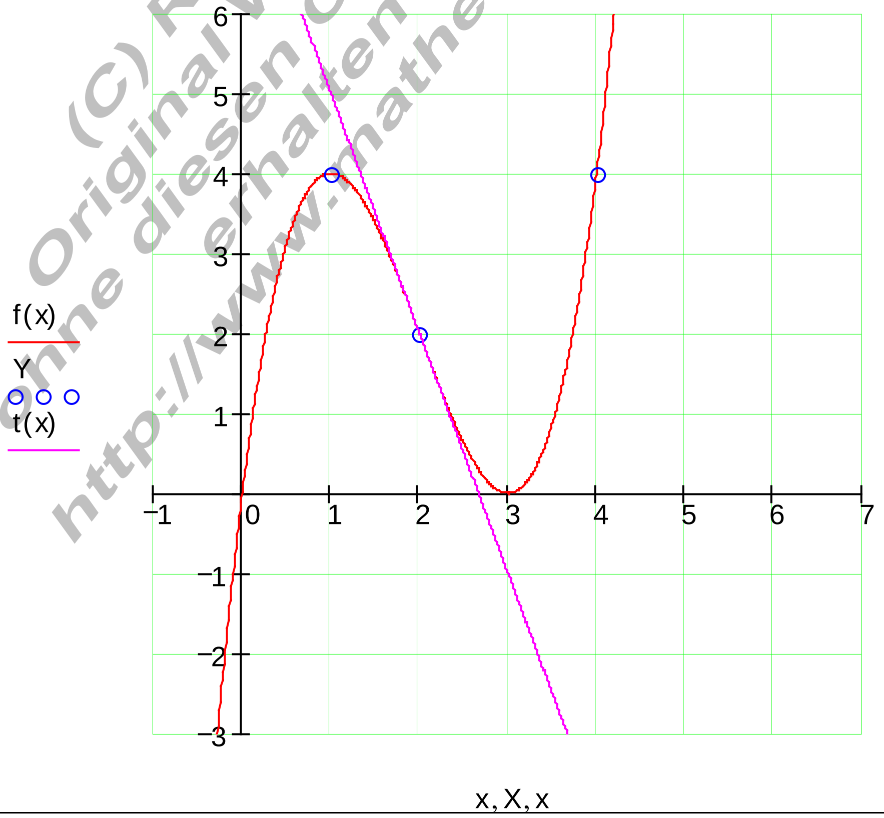
$D = \left(\frac{p}{2}\right)^2 - q = 9 - 9 = 0 \Rightarrow \sqrt{D} = \sqrt{0} = 0$

$x_{1/2} = -\frac{p}{2} \pm \sqrt{D} \left| \begin{matrix} x_1 = 3 + 0 = 3 \\ x_2 = 3 - 0 = 3 \end{matrix} \right.$ Doppelte Nullstelle $\Rightarrow \boxed{P_{x1}(0 \mid 0)\,;\, P_{x2/3}(3 \mid 0)}$

A1.1	Ausführliche Lösung	
	h)	Tabelle aller bisher bekannten Werte:

x	1	2	3	4	5
f(x)	4	2	2	4	20

Sollten zum Zeichnen des Graphen noch Werte fehlen, sind diese zu berechnen.



A1.1	Ausführliche Lösung	
	i)	Aus dem Graphen lässt sich das Krümmungs- und Monotonieverhalten ablesen. Das Krümmungsverhalten ändert sich an der Wendestelle. Rechtskrümmung im Intervall $I_1 = \{x \mid -\infty < x < 2\}_{\mathbb{R}}$ Linkskrümmung im Intervall $I_2 = \{x \mid 2 < x < \infty\}_{\mathbb{R}}$ Das Monotonieverhalten ändert sich an den Extremstellen. Der Graph ist: streng monoton wachsend im Intervall $I_3 = \{x \mid -\infty < x < 1\}_{\mathbb{R}}$ streng monoton fallend im Intervall $I_4 = \{x \mid 1 < x < 3\}_{\mathbb{R}}$ streng monoton wachsend im Intervall $I_4 = \{x \mid 3 < x < \infty\}_{\mathbb{R}}$

A1.1	Ausführliche Lösung	
	j)	Randpunkte des Definitionsbereichs: Zu untersuchen ist das Verhalten von f(x) für sehr große und sehr kleine x- Werte. $\lim\limits_{x\to -\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to -\infty} \left(x^3 - 6x^2 + 9x\right) = \lim\limits_{x\to -\infty} x^3 \left(\underbrace{1 - \frac{6}{x} + \frac{9}{x^2}}_{\to 1}\right) = -\infty$ $\lim\limits_{x\to \infty} f(x) = \lim\limits_{x\to \infty} \left(x^3 - 6x^2 + 9x\right) = \lim\limits_{x\to \infty} x^3 \left(\underbrace{1 - \frac{6}{x} + \frac{9}{x^2}}_{\to 1}\right) = \infty$ Die Werte in den Klammerausdrücken streben für sehr große und für sehr kleine x- Werte gegen den Wert 1. Das hat zur Folge, dass der Term x^3 den Verlauf des Graphen für große und kleine x- Werte näherungsweise bestimmt.