Lösungen Differenzialrechnung VIII

Ausführliche Lösungen:

A1 Ausführliche Lösung

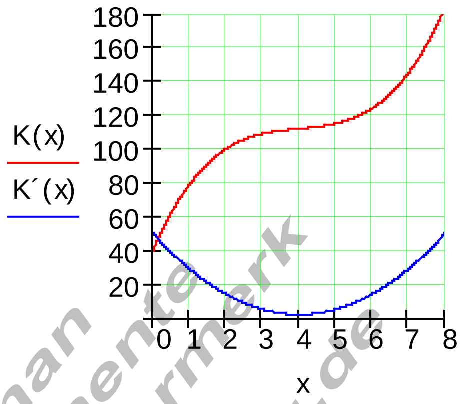
a)

$K(x) = x^3 - 12x^2 + 50x + 40$

$K'(x) = 3x^2 - 24x + 50$

Der Graph der Grenzkostenfunktion ist eine nach oben geöffnete Parabel.

Im Scheitelpunkt dieser sind die Grenzkosten am geringsten.



A1 Ausführliche Lösung

b) Bedingung für die minimalen Differentialkosten: $K''(x) = 0$

$K(x) = x^3 - 12x^2 + 50x + 40$

$K'(x) = 3x^2 - 24x + 50$

$K''(x) = 6x - 24$

$K''(x) = 0 \Leftrightarrow 6x - 24 = 0 \Rightarrow x = 4$

$K'(4) = 2$

$\Rightarrow$ Bei einer Ausbringung von

$\underline{\underline{4\text{ ME}}}$ sind die Differentialkosten mit $\underline{\underline{2\text{ GE/ME}}}$ am geringsten.

A1 Ausführliche Lösung

c) $K'(x) = 3x^2 - 24x + 50$ für $K'(4) = 2$ ist positiv

Wenn lt. Annahme für alle $x \in \mathbb{R}_+$ $K'(x)$ positiv sein soll,

darf es keine Nullstellen geben.

Wir untersuchen also $K'(x)$ auf Nullstellen:

$K'(x) = 0 \Leftrightarrow 3x^2 - 24x + 50 = 0$

$\Rightarrow p = -8\,;\, q = \frac{50}{3}\,;\, D = \left(\frac{p}{2}\right)^2 - q = 16 - \frac{50}{3} < 0$

$\Rightarrow$ keine Lösung.

Die Differentialkosten sind für jede Ausbringungsmenge positiv.

q.e.d.

A1 Ausführliche Lösung

d) Erlösfunktion: $E(x) = 28x$ (folgt aus Aufgabenstellung)

Gewinnfunktion: $G(x) = E(x) - K(x) = -x^3 + 12x^2 - 22x - 40$

Gewinn wird dort gemacht, wo die Gewinnfunktion positive Werte hat.

Wir probieren:

$G(5) = 25\,;\, G(4) = 0$ Nullstelle von $G(x)$ also $\underline{\underline{x_1 = 4}}$

HORNER

	−1	12	−22	−40
x = 4		−4	32	40
	−1	8	10	0

$\Rightarrow -x^2 + 8x + 10 = 0$

$x_{2/3} = 4 \pm \sqrt{26} \Rightarrow \underline{\underline{x_2 \approx 9{,}1}}$

Für $\underline{\underline{4 \le x \le 9{,}1}}$ arbeitet der Betrieb mit Gewinn.

A1 Ausführliche Lösung

e) Gewinnzunahme erfolgt da, wo $G(x)$ positive Steigung hat und $G(x) > 0$ ist.

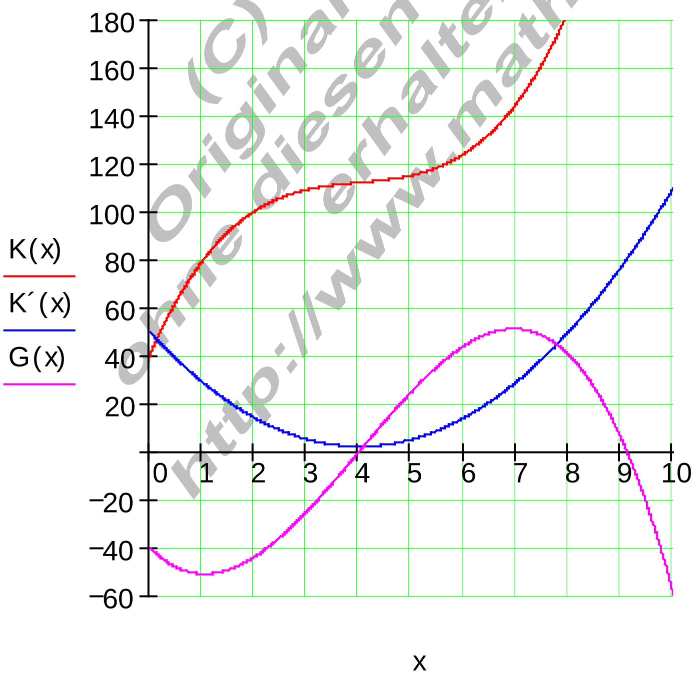
Also: $G(x) > 0 \wedge G'(x) > 0$

$G'(x) = -3x^2 + 24x - 22 > 0$ für $x \in \left[4 - \sqrt{\frac{26}{3}}\,;\, 4 + \sqrt{\frac{26}{3}}\right]$ oder $x \in [1{,}05\,;\, 6{,}9]$

Gewinnzunahme: $[4\,;\,9{,}1] \cap [1{,}05\,;\,6{,}9] = \underline{\underline{[4\,;\,6{,}9]}}$

A1 Ausführliche Lösung

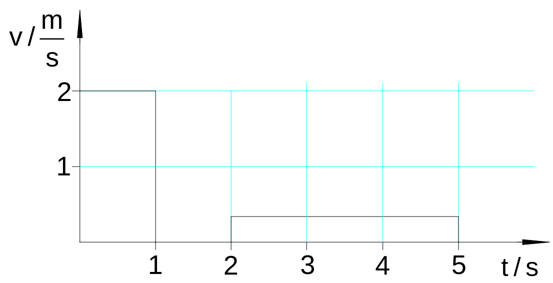
Die Graphen:



A2 Ausführliche Lösung

a) Von 0 bis 1 s :
Bewegung mit gleichbleibender Geschwindigkeit v = 2 m/s
Von 1 bis 2 s:
Stillstand v = 0 m/s
Von 2 bis 5 s:
Bewegung mit gleichbleibender Geschwindigkeit v = 1/3 m/s

b)



A3 Ausführliche Lösung

a) Ein Gegenstand wird senkrecht nach oben geworfen.
Für t > 3 ist s < 0,
d.h. der Gegenstand befindet sich unterhalb der Abwurfstelle.

A3 Ausführliche Lösung

b) $s(t) = \frac{1}{2}at^2 + v_0t$ Bewegungsgleichung

Für die Berechnung von a und v_0 verwenden wir zwei Punkte des Graphen.

$P_1(1|5): s(1) = \frac{1}{2}a + v_0 = 5$

$P_2(3|0): s(3) = \frac{9}{2}a + 3v_0 = 0$

$a = -5\,;\, v_0 = 7{,}5$

a < 0 bedeutet, dass es sich um eine verzögerte Bewegung handelt.

A3 Ausführliche Lösung

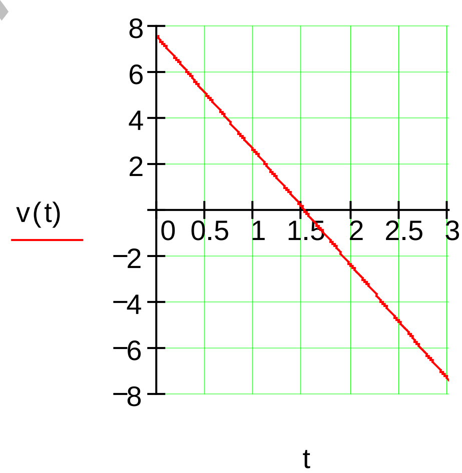
c) $v(t) = s'(t) = at + v_0 = -5t + 7{,}5$

Die Geschwindigkeit ist am Anfang positiv, d.h. der Körper bewegt sich nach oben.

Sie nimmt aber ab und ist bei t = 1,5 s null.

Der Körper hat da seine größte Höhe erreicht.

Dann ist die Geschwindigkeit negativ, der Körper fällt, er bewegt sich wieder nach unten.



A4	Ausführliche Lösung
	0 – 100 m: Die Geschwindigkeit nimmt zu 100 – 150 m: Die Geschwindigkeit bleibt gleich: 40 km/h 150 – 200 m: Die Geschwindigkeit nimmt ab 250 – 300 m: Die Geschwindigkeit bleibt gleich: 15 km/h 300 – 400 m: Die Geschwindigkeit nimmt zu ab 400 m: Die Geschwindigkeit bleibt konstant 40 km/h Erklärung: Auf einer abfallenden Straße wird beschleunigt, die folgende Straße ist eben. Anschließend geht es steil bergauf, die Geschwindigkeit verringert sich bis auf 15 km/h. Danach folgt eine Talfahrt, bei der wieder Geschwindigkeit gewonnen wird, die Höchstgeschwindigkeit von 40 km/h kann danach gehalten werden auf der folgenden leicht abschüssigen Strecke.