Lösungen Differenzialrechnung VII

Ausführliche Lösungen:

A1	**Aufgabe**	
	Gegeben ist die Funktion $f(x)=\frac{1}{9}x^3-x\,;\,x\in\mathbb{R}$	
	a)	An welchen Stellen hat f(x) die Steigung 2 ?
	b)	Die Steigung von $f(x)$ an der Stelle $x=1{,}5$ ist $-0{,}25$. Geben Sie ohne Rechnung eine weitere Stelle mit der gleichen Steigung an. Begründen Sie Ihre Vermutung.
	c)	In welchen Punkten hat f(x) eine waagerechte Tangente? Geben Sie die Gleichung an.
	d)	Bestimmen Sie die Gleichung der Tangente an f(x) im Ursprung.
	e)	Bestimmen Sie die Gleichung der Tangente an f(x) im Punkt P (u | f(u)).
	f)	Welche Gerade schneidet f(x) in N (3 | 0) senkrecht ?

A1 Ausführliche Lösung

a)

$$f(x)=\frac{1}{9}x^3-x\,;\,f'(x)=\frac{1}{3}x^2-1$$

Steigung bei x_0 hat den Wert 2

$$\Rightarrow f'(x_0)=2\Leftrightarrow\frac{1}{3}x_0^2-1=2\Rightarrow \underline{\underline{x_{01/2}=\pm 3}}$$

Die Funktion $f(x)$ hat an den Stellen $x_{1/2}=\pm 3$ die Steigung 2

A1 Ausführliche Lösung

b)

$f'(x)=\frac{1}{3}x^2-1$ ist eine Parabel und damit achsensymmetrisch

aus $f'(1{,}5)=-0{,}25$ folgt $f'(-1{,}5)=-0{,}25$

$f(x)$ hat an den Stellen $\underline{\underline{x_{1/2}=\pm 1{,}5}}$ die Steigung $-0{,}25$

A1 Ausführliche Lösung

c) Eine waagerechte Tangente an f(x) liegt in den Punkten vor, wo die Steigung Null ist.

$$f'(x)=0\Leftrightarrow\frac{1}{3}x^2-1=0\Rightarrow x_{1/2}=\pm\sqrt{3}$$

$$f\left(\sqrt{3}\right)=-\frac{2}{3}\sqrt{3}\,;\,f\left(-\sqrt{3}\right)=\frac{2}{3}\sqrt{3}\Rightarrow \underline{\underline{P\left(\sqrt{3}\,|\,-\frac{2}{3}\sqrt{3}\right);Q\left(-\sqrt{3}\,|\,\frac{2}{3}\sqrt{3}\right)}}$$

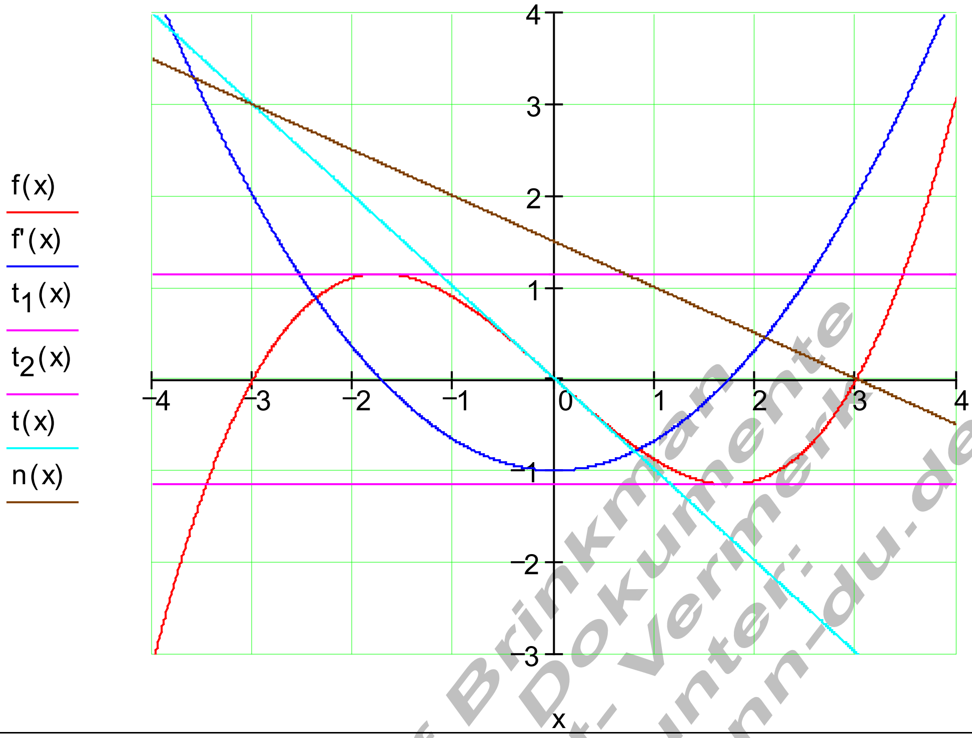
Die Tangenten sind Geraden, die Parallel zur x – Achse verlaufen:

$$\underline{\underline{t_1(x)=-\frac{2}{3}\sqrt{3}\,;\,t_2(x)=\frac{2}{3}\sqrt{3}}}$$

A1	Ausführliche Lösung
	d) $f(x)=\frac{1}{9}x^3-x\,;\, f'(x)=\frac{1}{3}x^2-1$ Gleichung der Tangente im Ursprung: $x_0=0$ $t(x)=f'(x_0)(x-x_0)+f(x_0)$ $f'(x_0)=f'(0)=-1;\, f(x_0)=f(0)=0$ $\Rightarrow t(x)=-1(x-0)+0=\underline{\underline{-x}}$

A1	Ausführliche Lösung
	e) $f(x)=\frac{1}{9}x^3-x\,;\, f'(x)=\frac{1}{3}x^2-1$ Gleichung der Tangente im Punkt $P(u\,\|\,f(u))$ $t(x)=f'(u)(x-u)+f(u)$ $f'(u)=\frac{1}{3}u^2-1;\, f(u)=\frac{1}{9}u^3-u$ $t(x)=\left(\frac{1}{3}u^2-1\right)(x-u)+\frac{1}{9}u^3-u=\underline{\underline{\left(\frac{1}{3}u^2-1\right)x-\frac{2}{9}u^3}}$

A1	Ausführliche Lösung
	f) Die Gerade, die f(x) in N (3 | 0) schneidet, ist die Normale in diesem Punkt. $f(x)=\frac{1}{9}x^3-x\,;\, f'(x)=\frac{1}{3}x^2-1;\, N(3\,\|\,0)\Rightarrow x_0=3$ $n(x)=-\frac{1}{f'(x_0)}(x-x_0)+f(x_0)$ $-\frac{1}{f'(x_0)}=-\frac{1}{f'(3)}=-\frac{1}{2};\, f(x_0)=f(3)=0$ $\Rightarrow n(x)=-\frac{1}{2}(x-3)+0=\underline{\underline{-\frac{1}{2}x+\frac{3}{2}}}$

A1	**Ausführliche Lösung**
	Die Graphen: 

A2 Aufgabe

Gegeben ist die Funktion $f(x)=\frac{x^4}{4}-\frac{3}{4}x^2-1;\ x\in\mathbb{R}$

a) Bestimmen Sie charakteristische Punkte und geben Sie die zugehörigen Steigungen an.

b) Die Tangenten an $f(x)$ in $x=1$ und $x=-1$ schneiden sich auf der $y-$Achse. Begründen Sie diese Behauptung.

A2 Ausführliche Lösung

a) Charakteristische Punkte sind Nullstellen, die Steigung der Tangenten in diesen und Punkte, an denen es eine waagerechte Tangente gibt.

$$f(x)=\frac{x^4}{4}-\frac{3}{4}x^2-1;\ f'(x)=x^3-\frac{3}{2}x$$

Nullstellen:

$$f(x)=0\Leftrightarrow\frac{x^4}{4}-\frac{3}{4}x^2-1=0 \text{ biquadratische Gleichung,}$$

Lösung durch Substitution

$$x^2=z\Rightarrow f(z)=\frac{z^2}{4}-\frac{3}{4}z-1$$

$$f(z)=0\Leftrightarrow\frac{z^2}{4}-\frac{3}{4}z-1=0\Rightarrow z_1=4;\ z_2=-1 \text{ für } z_2 \text{ keine Lösung}$$

$$z_1=4\Rightarrow x^2=4\Rightarrow x_{1/2}=\pm2\Rightarrow \underline{\underline{P_{x1}(2\,|\,0);P_{x2}(-2\,|\,0)}}$$

$$f'(2)=2^3-\frac{3}{2}\cdot2=\underline{\underline{5}};\ f'(-2)=(-2)^3-\frac{3}{2}\cdot(-2)=-8+3=\underline{\underline{-5}}$$

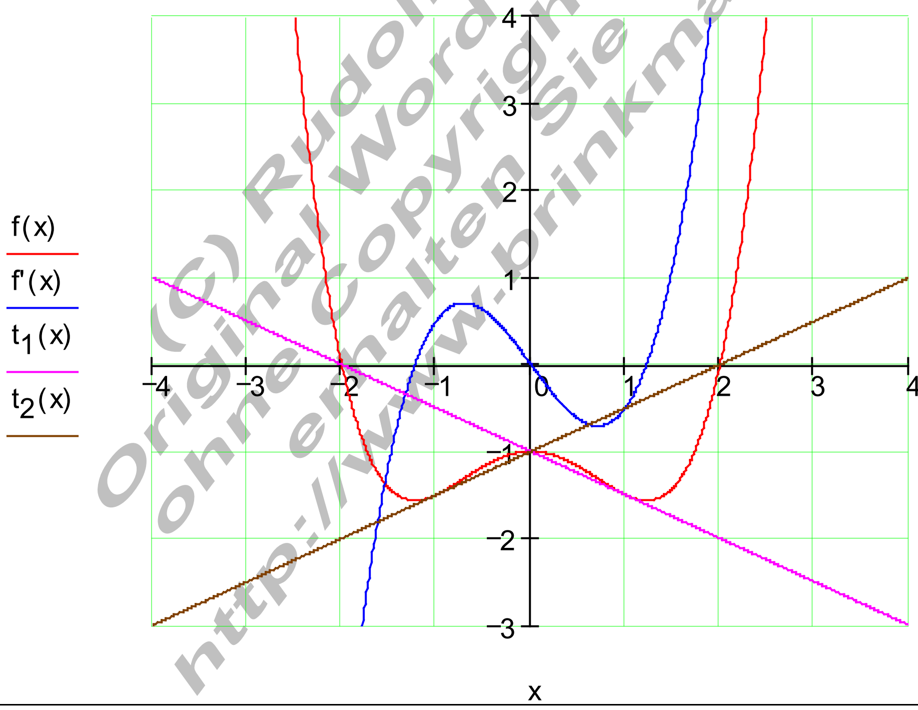
Punkte mit waagerechter Tangente:

$$f'(x)=0\Leftrightarrow x^3-\frac{3}{2}x=0\Rightarrow x_1=0;\ x_{2/3}=\pm\sqrt{\frac{3}{2}}$$

$$\underline{\underline{P_2(0\,|\,-1);P_2\left(\sqrt{\frac{3}{2}}\,\middle|\,-\frac{25}{16}\right);P_3\left(-\sqrt{\frac{3}{2}}\,\middle|\,-\frac{25}{16}\right)}}$$

A2	**Ausführliche Lösung**
	b) $f(x)=\frac{x^4}{4}-\frac{3}{4}x^2-1;\ f'(x)=x^3-\frac{3}{2}x$ Tangente bei $x=1$ und $x=-1$ $t(x)=f'(x_0)(x-x_0)+f(x_0)$ $t_1(x)=f'(1)(x-1)+f(1);\ t_2(x)=f'(-1)(x+1)+f(-1)$ $f'(1)=-\frac{1}{2};\ f'(-1)=-f'(1)=\frac{1}{2}$ wegen Punktsymmetrie $f(1)=-\frac{3}{2};\ f(-1)=f(1)=-\frac{3}{2}$ wegen Achsensymmetrie $t_1(x)=-\frac{1}{2}(x-1)-\frac{3}{2}=\underline{\underline{-\frac{1}{2}x-1}}$ $t_2(x)=\frac{1}{2}(x+1)-\frac{3}{2}=\underline{\underline{\frac{1}{2}x-1}}$ Beide Tangenten schneiden die y – Achse im Punkt $\underline{\underline{P_y(0\mid -1)}}$

A2	**Ausführliche Lösung**
	Die Graphen:



A3 Aufgabe

Gegeben ist die Funktion $f(x) = -x^4 + 2x^3 \; ; x \in \mathbb{R}$

a) Untersuchen Sie f(x) auf Schnittpunkte mit der x – Achse und Punkte mit waagerechter Tangente.

b) t(x) ist die Tangente an f(x) in P (1 | f(1)).
Bestimmen Sie die Gleichung der Tangente.
Ermitteln Sie die Schnittpunkte von t(x) mit f(x).

c) In welchem Punkt hat f(x) eine Normale mit der Steigung 1/8 ?
Geben Sie die Gleichung der Normalen an.

A3 Ausführliche Lösung

a) $f(x) = -x^4 + 2x^3 \; ; f'(x) = -4x^3 + 6x^2$

Nullstellen:

$f(x) = 0 \Leftrightarrow -x^4 + 2x^3 = 0 \Rightarrow x_{1/2/3} = 0 \; ; x_4 = 2$

$\underline{\underline{P_{x1/2/3}(0|0)}}$ Dreifachnullstelle $\underline{\underline{P_{x4}(2|0)}}$

Waagerechte Tangente:

$f'(x) = 0 \Leftrightarrow -4x^3 + 6x^2 = 0 \Rightarrow x_{1/2} = 0 \; ; x_3 = \frac{3}{2}$

$f(0) = 0 \; ; f\left(\frac{3}{2}\right) = \frac{27}{16} \Rightarrow \underline{\underline{P_{1/2}(0|0) \; ; P_3\left(\frac{3}{2}\middle|\frac{27}{16}\right)}}$

A3 Ausführliche Lösung

b) $f(x) = -x^4 + 2x^3 \; ; f'(x) = -4x^3 + 6x^2 \; ; P(1|f(1))$

Tangente an $f(x)$ im Punkt $x_0 = 1$

$t(x) = f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0)$ mit $f'(1) = 2$ und $f(1) = 1$

$\Rightarrow \underline{\underline{t(x) = 2x - 1}}$

Schnittpunkte von $t(x)$ mit $f(x)$

$f(x) = t(x) \Leftrightarrow -x^4 + 2x^3 = 2x - 1 \Leftrightarrow -x^4 + 2x^3 - 2x + 1 = 0$

Ansatz mit $P(1|1)$ als doppelte Nullstelle: $x_{1/2} = 1 \Rightarrow (x-1)^2 = x^2 - 2x + 1$

Polynomdivision:

$$\begin{array}{l} \left(-x^4 + 2x^3 \qquad - 2x + 1\right) : \left(x^2 - 2x + 1\right) = -x^2 + 1 \\ \underline{-\left(-x^4 + 2x^3 - x^2\right)} \\ \qquad\qquad x^2 - 2x + 1 \\ \qquad\quad \underline{-\left(x^2 - 2x + 1\right)} \end{array}$$

$-x^2 + 1 = 0 \Rightarrow \underline{\underline{x_{3/4} = \pm 1}}$

$f(-1) = -3 \Rightarrow \underline{\underline{Q(-1|-3)}}$ ist ein weiterer Schnittpunkt von $t(x)$ mit $f(x)$

A3 **Ausführliche Lösung**

c) $f(x) = -x^4 + 2x^3 \,;\, f'(x) = -4x^3 + 6x^2$

$$n(x) = -\frac{1}{f'(x_0)}(x - x_0) + f(x_0)$$

Steigung der Normalen ist $\frac{1}{8} \Rightarrow -\frac{1}{f'(x_0)} = \frac{1}{8}$

$\Leftrightarrow f'(x_0) = -8 \Leftrightarrow -4x^3 + 6x^2 = -8 \Leftrightarrow -4x^3 + 6x^2 + 8 = 0$

$x = 2$ ist eine Lösung von $-4x^3 + 6x^2 + 8 = 0$ (durch probieren gefunden)

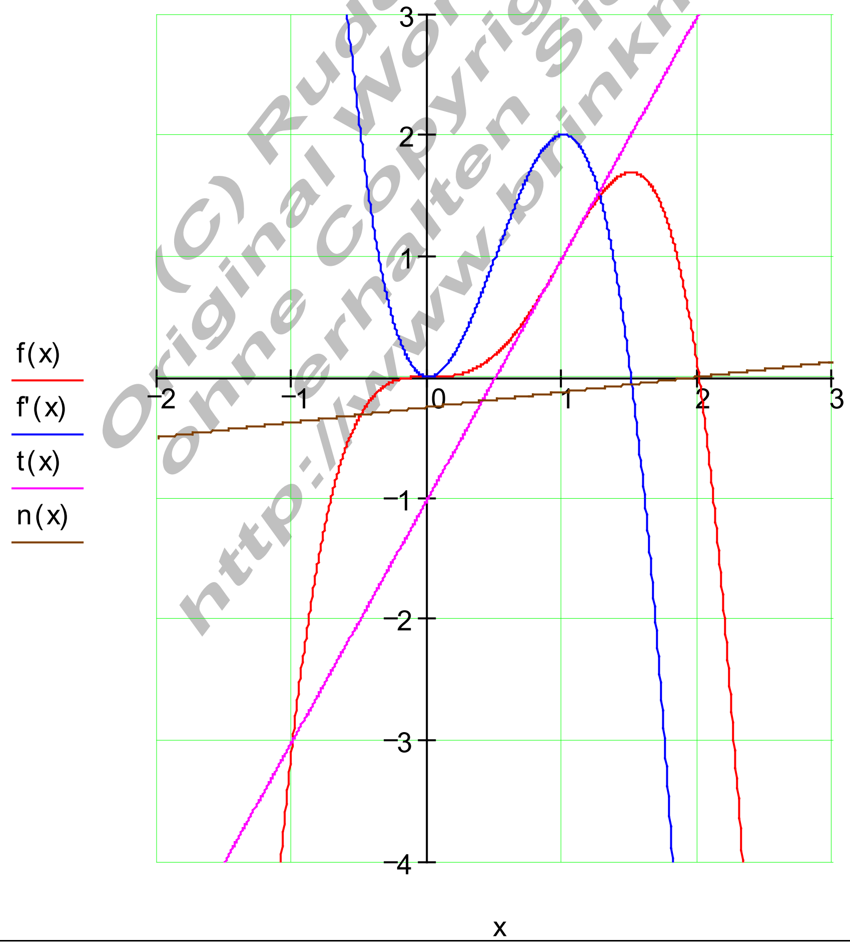
HORNER

$$\begin{array}{lrrrr} & -4 & 6 & 0 & 8 \\ x = 2 & & \underline{-8} & \underline{-4} & \underline{-8} \\ & -4 & -2 & -4 & 0 \end{array} \Rightarrow \quad \begin{array}{l} -4x^2 - 2x - 4 = 0 \\ p = \frac{1}{2};\, q = 1 \Rightarrow D < 0 \text{ keine weitere Lösung} \end{array}$$

$$x = 2 \Rightarrow x_0 = 2 \Rightarrow n(x) = \frac{1}{8}(x - 2) + \underbrace{f(2)}_{0} \Rightarrow \underline{\underline{n(x) = \frac{1}{8}x - \frac{1}{4}}}$$

A3 **Ausführliche Lösung**

Die Graphen:



A4	**Aufgabe**	
	Gegeben ist die Funktion $f(x) = x^3 - 6x^2 + 9x\,;\ x \in \mathbb{R}$	
	a)	Zerlegen Sie f(x) in Linearfaktoren und zeichnen Sie den Graphen.
	b)	Bestimmen Sie die Gleichung der Tangente an f(x) in x = 2 und zeichnen Sie diese Tangente in das Koordinatensystem von a).
	c)	Bestimmen Sie den Punkt P (u | f(u)) so, dass die Tangente an f(x) in P parallel zur Tangente an f(x) im Ursprung ist.
	d)	An welcher Stelle hat f(x) die kleinste Steigung ?

A4 Ausführliche Lösung

a)

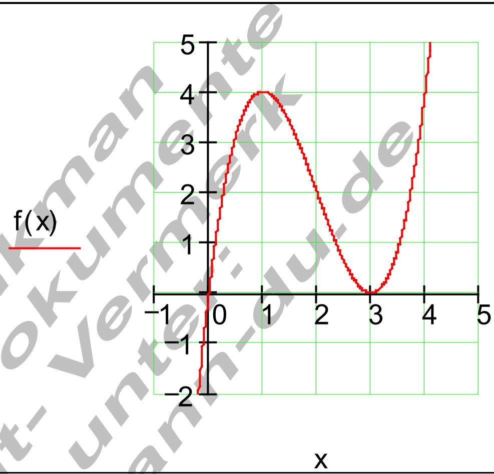
$$f(x) = x^3 - 6x^2 + 9x$$

$$= x\,\underbrace{\left(x^2 - 6x + 9\right)}_{\text{2. binomische Formel}}$$

$$= x(x-3)^2$$

$\Rightarrow P_{x1}(0\,|\,0)\,;$

$P_{x2/3}(3\,|\,0)$ Berührungspunkt



A4 Ausführliche Lösung

b)

$$f(x) = x^3 - 6x^2 + 9x$$

$$f'(x) = 3x^2 - 12x + 9$$

$$x_0 = 2$$

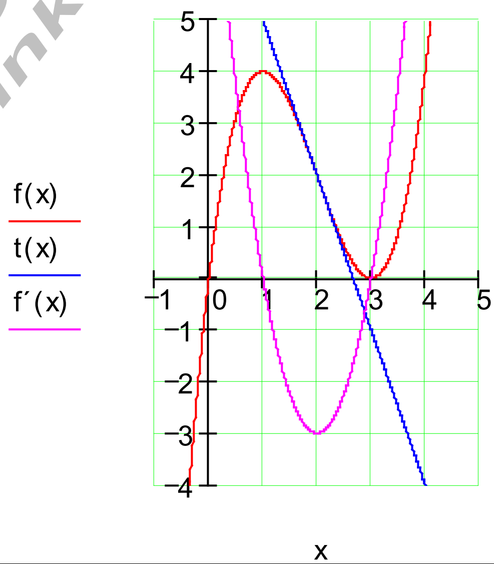
$$t(x) = f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0)$$

$$f'(2) = -3$$

$$f(2) = 2$$

$$\Rightarrow t(x) = -3(x-2) + 2$$

$$= \underline{\underline{-3x + 8}}$$



A4 Ausführliche Lösung

c) $f(x) = x^3 - 6x^2 + 9x\,;\, f'(x) = 3x^2 - 12x + 9$

Die Tangente im Ursprung hat die Steigung

$f'(0) = 9$

Die gleiche Steigung hat jede dazu parallele Tangente,

also auch die durch $P(u\,|\,f(u))$

$f'(u) = 9 \Leftrightarrow 3u^2 - 12u + 9 = 9 \Rightarrow u_1 = 0\,;\, u_2 = 4$

$u_1 = 0 \Rightarrow f(u_1) = f(0) = 0 \Rightarrow \underline{\underline{P_1(0\,|\,0)}}$

$u_2 = 4 \Rightarrow f(u_2) = f(4) = 4 \Rightarrow \underline{\underline{P_2(4\,|\,4)}}$

A4 Ausführliche Lösung

d) $f(x) = x^3 - 6x^2 + 9x\,;\, f'(x) = 3x^2 - 12x + 9$

$f'(x)$ ist die Steigungsfunktion von $f(x)$,

das ist eine nach oben geöffnete Parabel.

Deren Minimum ist ihr Scheitelpunkt,

dort hat $f'(x)$ eine waagerechte Tangente.

Bedingung: $f''(x) = 0$

$f''(x) = 6x - 12 = 0 \Rightarrow x = 2$

An der Stelle $x = 2$ hat $f(x)$ die geringste Steigung.

$f(2) = 2 \Rightarrow$ In $\underline{\underline{P(2\,|\,2)}}$ hat $f(x)$ die geringste Steigung.

Sie hat dort den Wert $f(2) = -3$

A5 Aufgabe

Ein Stein wird mit der Anfangsgeschwindigkeit v_0 = 7 m/s senkrecht nach oben geworfen. Das Weg- Zeit- Gesetz lautet:

$s(t) = v_0 \cdot t - \frac{1}{2} g \cdot t^2$ mit $g = 10\,\frac{m}{s^2}$

a) Nach welcher Zeit t ist die Geschwindigkeit des Steins Null?

b) Berechnen Sie die maximale Steighöhe.

A5 Ausführliche Lösung

a) $s(t) = v_0 \cdot t - \frac{1}{2} g \cdot t^2$ mit $g = 10\,\frac{m}{s^2} \qquad v_0 = 7\,\frac{m}{s}$

$v(t) = s'(t) = v_0 - gt$

$v(t) = 0 \Leftrightarrow v_0 - gt = 0 \Rightarrow t = 0{,}7\text{ s}$

Nach 0,7 s hat der Stein eine Geschwindigkeit von v(t) = 0 m/s

A5	**Ausführliche Lösung**	
	b)	Die maximale Steighöhe: $s(t) = -\frac{1}{2}gt + v_0$ ist eine nach unten geöffnete Parabel, deren Scheitel beschreibt die maximale Wurfhöhe. Bedingung für Scheitel: $s'(t) = v(t) = 0 \Leftrightarrow t = 0{,}7$ s siehe Teil a) Maximale Höhe: s(0,7) = 2,45 m Die maximale Steighöhe beträgt 2.45 m.