

Lösungen Differenzialrechnung VII

Ausführliche Lösungen:

A1	<p>Ausführliche Lösung</p> <p>a) $f(x) = \frac{1}{9}x^3 - x$; $f'(x) = \frac{1}{3}x^2 - 1$</p> <p>Steigung bei x_0 hat den Wert 2</p> <p>$\Rightarrow f'(x_0) = 2 \Leftrightarrow \frac{1}{3}x_0^2 - 1 = 2 \Rightarrow \underline{x_{01/2} = \pm 3}$</p> <p>Die Funktion $f(x)$ hat an den Stellen $x_{1/2} = \pm 3$ die Steigung 2</p>
A1	<p>Ausführliche Lösung</p> <p>b) $f'(x) = \frac{1}{3}x^2 - 1$ ist eine Parabel und damit achsensymmetrisch</p> <p>aus $f'(1,5) = -0,25$ folgt $f'(-1,5) = -0,25$</p> <p>$f(x)$ hat an den Stellen $\underline{x_{1/2} = \pm 1,5}$ die Steigung $-0,25$</p>
A1	<p>Ausführliche Lösung</p> <p>c) Eine waagerechte Tangente an $f(x)$ liegt in den Punkten vor, wo die Steigung Null ist.</p> <p>$f'(x) = 0 \Leftrightarrow \frac{1}{3}x^2 - 1 = 0 \Rightarrow \underline{x_{1/2} = \pm\sqrt{3}}$</p> <p>$f(\sqrt{3}) = -\frac{2}{3}\sqrt{3}$; $f(-\sqrt{3}) = \frac{2}{3}\sqrt{3} \Rightarrow \underline{P\left(\sqrt{3} \mid -\frac{2}{3}\sqrt{3}\right); Q\left(-\sqrt{3} \mid \frac{2}{3}\sqrt{3}\right)}$</p> <p>Die Tangenten sind Geraden, die Parallel zur x-Achse verlaufen:</p> <p>$\underline{t_1(x) = -\frac{2}{3}\sqrt{3}}$; $\underline{t_2(x) = \frac{2}{3}\sqrt{3}}$</p>
A1	<p>Ausführliche Lösung</p> <p>d) $f(x) = \frac{1}{9}x^3 - x$; $f'(x) = \frac{1}{3}x^2 - 1$</p> <p>Gleichung der Tangente im Ursprung: $x_0 = 0$</p> <p>$t(x) = f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0)$</p> <p>$f'(x_0) = f'(0) = -1$; $f(x_0) = f(0) = 0$</p> <p>$\Rightarrow t(x) = -1(x - 0) + 0 = \underline{-x}$</p>

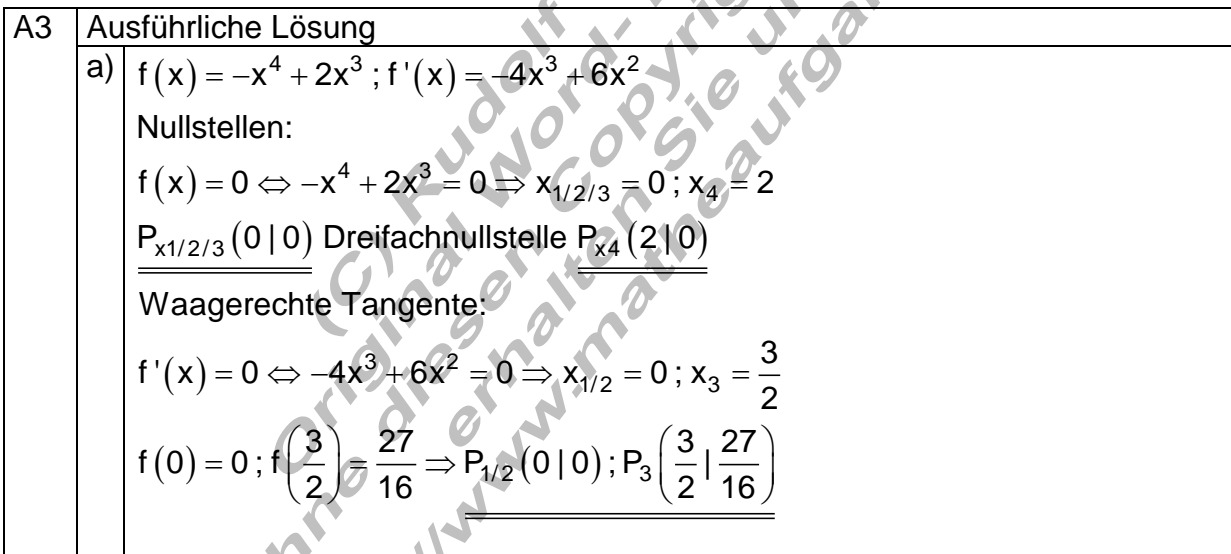
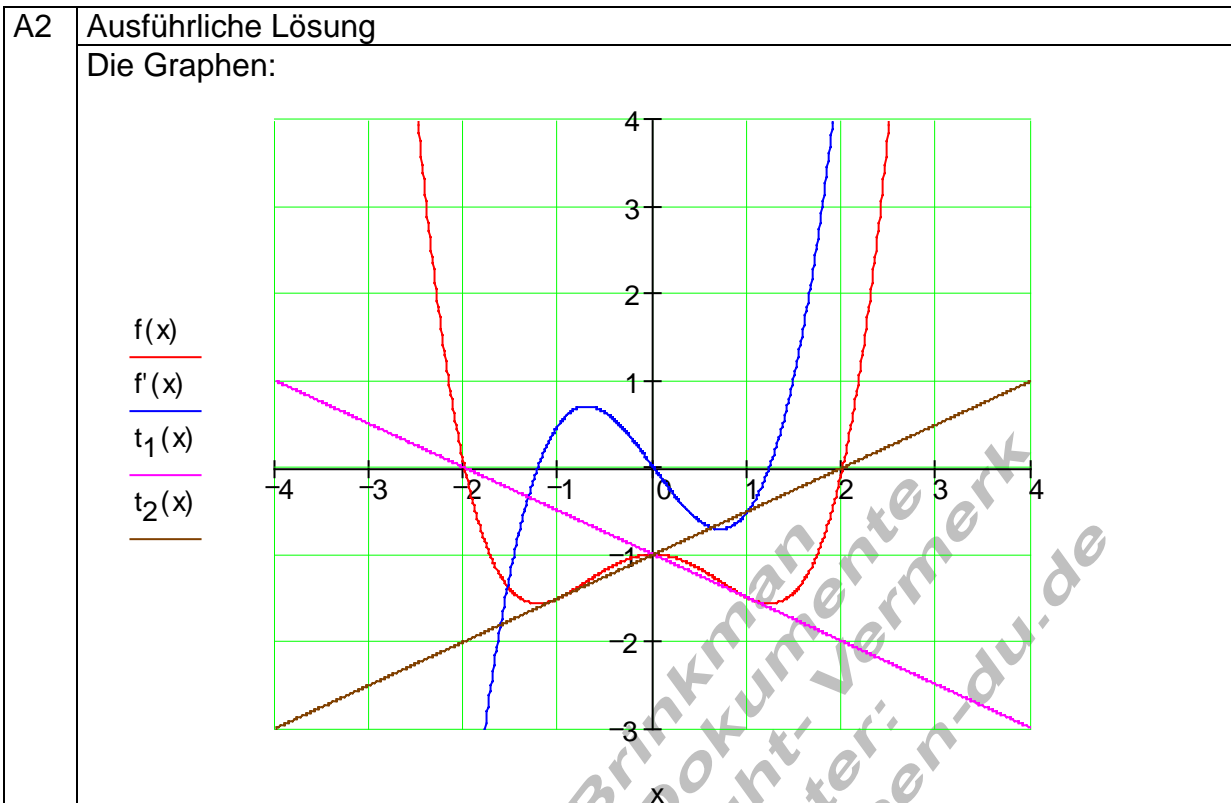
A1	Ausführliche Lösung	<p>e)</p> $f(x) = \frac{1}{9}x^3 - x; f'(x) = \frac{1}{3}x^2 - 1$ <p>Gleichung der Tangente im Punkt $P(u f(u))$</p> $t(x) = f'(u)(x - u) + f(u)$ $f'(u) = \frac{1}{3}u^2 - 1; f(u) = \frac{1}{9}u^3 - u$ $t(x) = \left(\frac{1}{3}u^2 - 1\right)(x - u) + \frac{1}{9}u^3 - u = \underline{\underline{\left(\frac{1}{3}u^2 - 1\right)x - \frac{2}{9}u^3}}$
----	---------------------	---

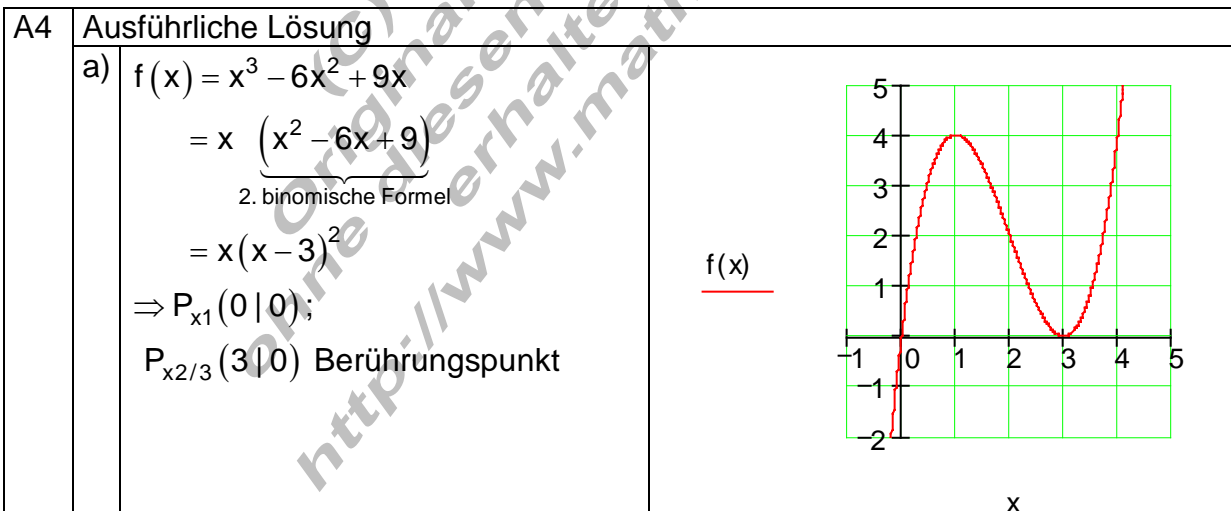
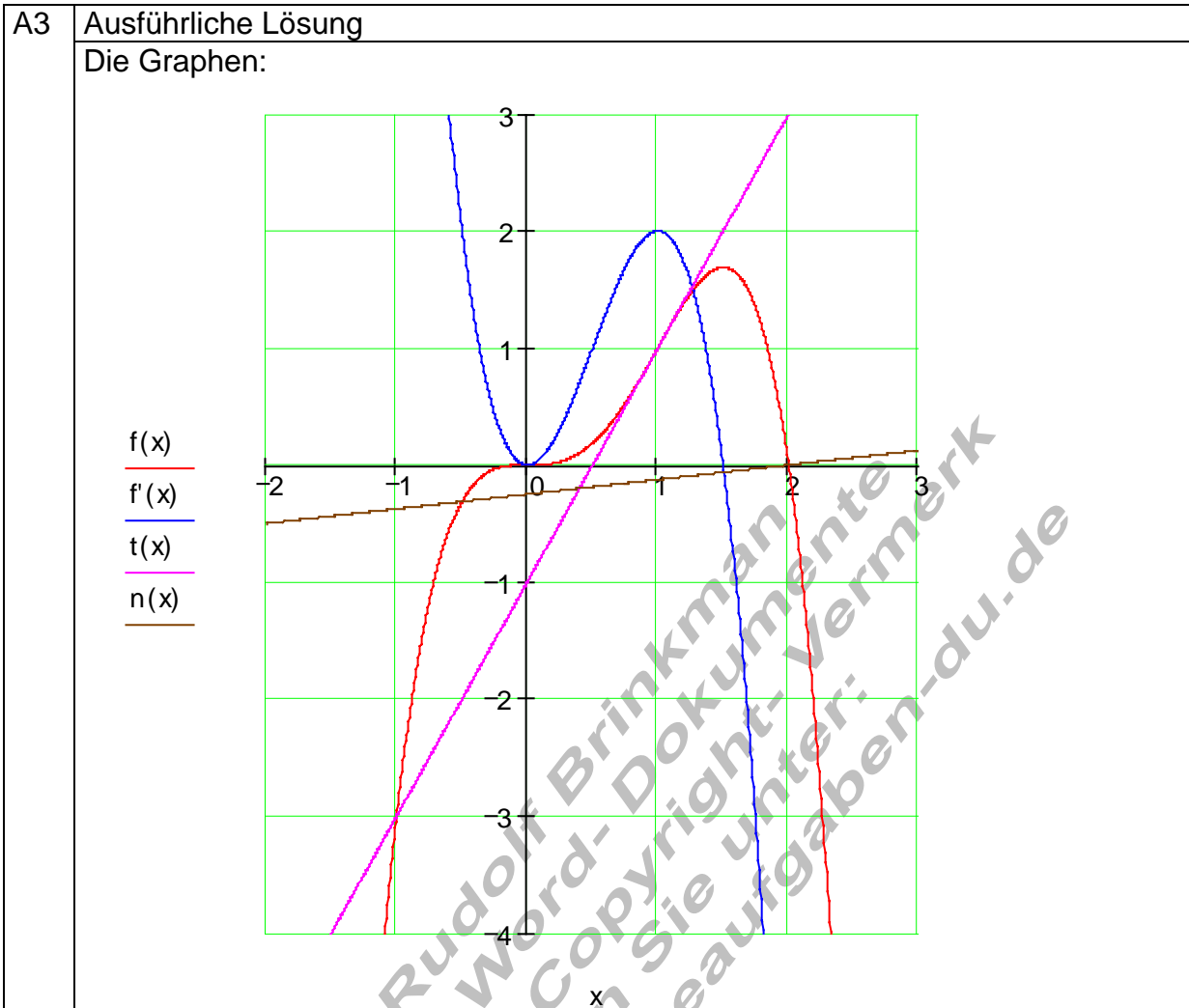
A1	Ausführliche Lösung	<p>f)</p> <p>Die Gerade, die $f(x)$ in $N(3 0)$ schneidet, ist die Normale in diesem Punkt.</p> $f(x) = \frac{1}{9}x^3 - x; f'(x) = \frac{1}{3}x^2 - 1; N(3 0) \Rightarrow x_0 = 3$ $n(x) = -\frac{1}{f'(x_0)}(x - x_0) + f(x_0)$ $-\frac{1}{f'(x_0)} = -\frac{1}{f'(3)} = -\frac{1}{2}; f(x_0) = f(3) = 0$ $\Rightarrow n(x) = -\frac{1}{2}(x - 3) + 0 = \underline{\underline{-\frac{1}{2}x + \frac{3}{2}}}$
----	---------------------	--

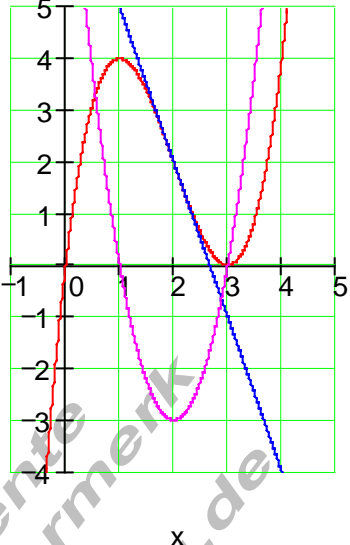
A1	Ausführliche Lösung	<p>Die Graphen:</p> <p>Legend:</p> <ul style="list-style-type: none"> — $f(x)$ — $f'(x)$ — $t_1(x)$ — $t_2(x)$ — $f(x)$ — $n(x)$
----	---------------------	--

A2	<p>Ausführliche Lösung</p> <p>a) Charakteristische Punkte sind Nullstellen, die Steigung der Tangenten in diesen und Punkte, an denen es eine waagerechte Tangente gibt.</p> $f(x) = \frac{x^4}{4} - \frac{3}{4}x^2 - 1; f'(x) = x^3 - \frac{3}{2}x$ <p>Nullstellen:</p> $f(x) = 0 \Leftrightarrow \frac{x^4}{4} - \frac{3}{4}x^2 - 1 = 0 \text{ biquadratische Gleichung,}$ <p>Lösung durch Substitution</p> $x^2 = z \Rightarrow f(z) = \frac{z^2}{4} - \frac{3}{4}z - 1$ $f(z) = 0 \Leftrightarrow \frac{z^2}{4} - \frac{3}{4}z - 1 = 0 \Rightarrow z_1 = 4; z_2 = -1 \text{ für } z_2 \text{ keine Lösung}$ $z_1 = 4 \Rightarrow x^2 = 4 \Rightarrow x_{1/2} = \pm 2 \Rightarrow \underline{\underline{P_{x1}(2 0); P_{x2}(-2 0)}}$ $f'(2) = 2^3 - \frac{3}{2} \cdot 2 = \underline{\underline{5}}; f'(-2) = (-2)^3 - \frac{3}{2} \cdot (-2) = -8 + 3 = \underline{\underline{-5}}$ <p>Punkte mit waagerechter Tangente:</p> $f'(x) = 0 \Leftrightarrow x^3 - \frac{3}{2}x = 0 \Rightarrow x_1 = 0; x_{2/3} = \pm \sqrt{\frac{3}{2}}$ $\underline{\underline{P_2(0 -1); P_2\left(\sqrt{\frac{3}{2}} \mid -\frac{25}{16}\right); P_3\left(-\sqrt{\frac{3}{2}} \mid -\frac{25}{16}\right)}}$
----	---

A2	<p>Ausführliche Lösung</p> <p>b)</p> $f(x) = \frac{x^4}{4} - \frac{3}{4}x^2 - 1; f'(x) = x^3 - \frac{3}{2}x$ <p>Tangente bei $x = 1$ und $x = -1$</p> $t(x) = f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0)$ $t_1(x) = f'(1)(x - 1) + f(1); t_2(x) = f'(-1)(x + 1) + f(-1)$ $f'(1) = -\frac{1}{2}; f'(-1) = -f'(1) = \frac{1}{2} \text{ wegen Punktsymmetrie}$ $f(1) = -\frac{3}{2}; f(-1) = f(1) = -\frac{3}{2} \text{ wegen Achsensymmetrie}$ $t_1(x) = -\frac{1}{2}(x - 1) - \frac{3}{2} = \underline{\underline{-\frac{1}{2}x - 1}}$ $t_2(x) = \frac{1}{2}(x + 1) - \frac{3}{2} = \underline{\underline{\frac{1}{2}x - 1}}$ <p>Beide Tangenten schneiden die y-Achse im Punkt $\underline{\underline{P_y(0 -1)}}$</p>
----	--





A4	<p>Ausführliche Lösung</p> <p>b)</p> $f(x) = x^3 - 6x^2 + 9x$ $f'(x) = 3x^2 - 12x + 9$ $x_0 = 2$ $t(x) = f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0)$ $f'(2) = -3$ $f(2) = 2$ $\Rightarrow t(x) = -3(x - 2) + 2$ $= \underline{\underline{-3x + 8}}$	 <p> $f(x)$ $t(x)$ $f'(x)$ </p>
----	---	---

A4	<p>Ausführliche Lösung</p> <p>c)</p> $f(x) = x^3 - 6x^2 + 9x ; f'(x) = 3x^2 - 12x + 9$ <p>Die Tangente im Ursprung hat die Steigung</p> $f'(0) = 9$ <p>Die gleiche Steigung hat jede dazu parallele Tangente, also auch die durch $P(u f(u))$</p> $f'(u) = 9 \Leftrightarrow 3u^2 - 12u + 9 = 9 \Rightarrow u_1 = 0 ; u_2 = 4$ $u_1 = 0 \Rightarrow f(u_1) = f(0) = 0 \Rightarrow \underline{\underline{P_1(0 0)}}$ $u_2 = 4 \Rightarrow f(u_2) = f(4) = 4 \Rightarrow \underline{\underline{P_2(4 4)}}$
----	--

A4	<p>Ausführliche Lösung</p> <p>d)</p> $f(x) = x^3 - 6x^2 + 9x ; f'(x) = 3x^2 - 12x + 9$ <p>$f'(x)$ ist die Steigungsfunktion von $f(x)$, das ist eine nach oben geöffnete Parabel. Deren Minimum ist ihr Scheitelpunkt, dort hat $f'(x)$ eine waagerechte Tangente.</p> <p>Bedingung: $f''(x) = 0$</p> $f''(x) = 6x - 12 = 0 \Rightarrow x = 2$ <p>An der Stelle $x = 2$ hat $f(x)$ die geringste Steigung.</p> $f(2) = 2 \Rightarrow \underline{\underline{\text{In } P(2 2) \text{ hat } f(x) \text{ die geringste Steigung.}}}$ <p>Sie hat dort den Wert $f(2) = -3$</p>
----	--

A5	Ausführliche Lösung
a)	$s(t) = v_0 \cdot t - \frac{1}{2} g \cdot t^2$ mit $g = 10 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$ $v_0 = 7 \frac{\text{m}}{\text{s}}$ $v(t) = s'(t) = v_0 - gt$ $v(t) = 0 \Leftrightarrow v_0 - gt = 0 \Rightarrow t = 0,7 \text{ s}$ Nach <u>0,7 s</u> hat der Stein die Geschwindigkeit $v(t) = 0$

A5	Ausführliche Lösung
b)	Die maximale Steighöhe: $s(t) = -\frac{1}{2}gt + v_0$ ist eine nach unten geöffnete Parabel, deren Scheitel beschreibt die maximale Wurfhöhe. Bedingung für Scheitel: $s'(t) = v(t) = 0 \Leftrightarrow t = 0,7 \text{ s}$ siehe Teil a) Maximale Höhe: $s(0,7) = 2,45$ Die maximale Steighöhe beträgt <u>2,45 m</u>

(C) Rudolf Brinkmann
Original Word-Dokumente
ohne diesen Copyright-Vermerk
<http://www.matheaufgaben-du.de>