Lösungen Differenzialrechnung V

Ausführliche Lösungen:

A1	Ausführliche Lösungen	
	a)	$f(x) = -\frac{1}{8}x^3 + \frac{1}{4}x^2 + \frac{5}{2}x \Rightarrow f'(x) = -\frac{3}{8}x^2 + \frac{1}{2}x + \frac{5}{2}$
	b)	$f(x) = -\frac{2}{3}x^3 + x^2 \Rightarrow f'(x) = -2x^2 + 2x$
	c)	$f(x) = -\frac{1}{4}x^4 - \frac{1}{2}x^3 + 3x^2 \Rightarrow f'(x) = -x^3 - \frac{3}{2}x^2 + 6x$
	d)	$f(x) = 6x^2 - \frac{2}{3}x^4 \Rightarrow f'(x) = -\frac{8}{3}x^3 + 12x$
	e)	$f(x) = \frac{1}{4}x^4 - \frac{1}{2}x^3 \Rightarrow f'(x) = x^3 - \frac{3}{2}x^2$
	f)	$f(x) = \frac{2}{3}x^3 - 2x + 3 \Rightarrow f'(x) = 2x^2 - 2$
	g)	$f(x) = \frac{3}{8}x^3 - \frac{3}{2}x \Rightarrow f'(x) = \frac{9}{8}x^2 - \frac{3}{2}$
	h)	$f(x) = x^3 - 3x^2 - x + 3 \Rightarrow f'(x) = 3x^2 - 6x - 1$
	i)	$f(x) = -\frac{1}{3}x^3 + x^2 - x - 5 \Rightarrow f'(x) = -x^2 + 2x - 1$
	j)	$f(x) = \frac{1}{48}x^4 - \frac{1}{2}x^2 \Rightarrow f'(x) = \frac{1}{12}x^3 - x$

A2	Ausführliche Lösung	
	a)	$f(x) = 4x^3$ Konstantenregel: (Kr) $f'(x) = 4 \cdot (x^3)' = 4 \cdot 3x^2 = \underline{\underline{12x^2}}$

A2	b)	$f(x) = 3 \cdot e^x$ (Kr) $f'(x) = 3 \cdot (e^x)' = \underline{\underline{3e^x}}$

A2	c)	$f(x) = 3 \cdot \ln(x)$ (Kr) $f'(x) = 3 \cdot [\ln(x)]' = 3 \cdot \frac{1}{x} = \underline{\underline{\frac{3}{x}}}$

A2	d)	$f(x) = x^2 + x$ Summenregel: (Sr) $f'(x) = \underline{\underline{2x + 1}}$

A2	e)	$f(x) = 2x^3 - 3x^2$ (Sr / Kr) $f'(x) = 2 \cdot 3x^2 - 3 \cdot 2x = \underline{\underline{6x^2 - 6x}}$

A2	f)	$f(x) = 4x^5 - 2 \cdot \ln(x) + 3 \cdot e^x$ (Sr / Kr) $f'(x) = 4 \cdot 5x^4 - 2 \cdot \frac{1}{x} + 3 \cdot e^x = \underline{\underline{20x^4 - \frac{2}{x} + 3e^x}}$

A2	g)	$f(x)=x\cdot e^x$ Produktregel (Pr): $u'\cdot v+u\cdot v'$ mit $u=x;u'=1;v=e^x;v'=e^x$ $f'(x)=1\cdot e^x+x\cdot e^x=\underline{\underline{(x+1)e^x}}$

A2	h)	$f(x)=x^2\cdot\ln(x)$ (Pr): $u'\cdot v+u\cdot v'$ mit $u=x^2;u'=2x;v=\ln(x);v'=\frac{1}{x}$ $f'(x)=2x\cdot\ln(x)+x^2\cdot\frac{1}{x}=2x\cdot\ln(x)+x=\underline{\underline{(2\ln x+1)x}}$

A2	i)	$f(x)=x^3\cdot(x^2-1)$ (Pr/Sr): $u'\cdot v+u\cdot v'$ mit $u=x^3;u'=3x^2;v=x^2-1;v'=2x$ $f'(x)=3x^2\cdot(x^2-1)+x^3\cdot 2x=3x^4-3x^2+2x^4=\underline{\underline{5x^4-3x^2}}$

A3	Ausführliche Lösung	
	a)	$f(x)=\frac{x+1}{x}$ Quotientenregel (Qr): $\frac{u'\cdot v-u\cdot v'}{v^2}$ mit $u=x+1;u'=1;v=x;v'=1;v^2=x^2$ $f'(x)=\frac{1\cdot x-(x+1)\cdot 1}{x^2}=\frac{x-x-1}{x^2}=\underline{\underline{-\frac{1}{x^2}}}$

A3	b)	$f(x)=\frac{x}{x+1}$ (Qr/Sr): $\frac{u'\cdot v-u\cdot v'}{v^2}$ mit $u=x;u'=1;v=x+1;v'=1;v^2=(x+1)^2$ $f'(x)=\frac{1\cdot(x+1)-x\cdot 1}{(x+1)^2}=\frac{x+1-1}{(x+1)^2}=\underline{\underline{\frac{1}{(x+1)^2}}}$

A3	c)	$f(x)=\frac{(x+1)e^x}{x}$ (Qr/Pr/Sr): $\frac{u'\cdot v-u\cdot v'}{v^2}$ mit $u=(x+1)e^x;u'=e^x+(x+1)e^x;v=x;v'=1;v^2=x^2$ $f'(x)=\frac{\left[e^x+(x+1)e^x\right]\cdot x-(x+1)e^x\cdot 1}{x^2}$ $=\frac{xe^x+x^2e^x+xe^x-xe^x-e^x}{x^2}=\underline{\underline{\frac{(x^2+x-1)e^x}{x^2}}}$

A3	d)	$f(x)=(x+1)^2$ Kettenregel: $f'(x)=f'(z)\cdot z'$ $z=x+1\Rightarrow z'=1$ $f(z)=z^2\Rightarrow f'(z)=2z$ $f'(x)=2(x+1)\cdot 1=\underline{\underline{2(x+1)}}$

A3	e)	$f(x)=\left(x^2+1\right)^2$ Kettenregel: $f'(x)=f'(z)\cdot z'$ $z=x^2+1 \Rightarrow z'=2x \quad f(z)=z^2 \Rightarrow f'(z)=2z$ $f'(x)=2\left(x^2+1\right)\cdot 2x=4x\left(x^2+1\right)=\underline{\underline{4x^3+4x}}$

A3	f)	$f(x)=e^{\frac{1}{2}x}$ Kettenregel: $f'(x)=f'(z)\cdot z'$ $z=\frac{1}{2}x \Rightarrow z'=\frac{1}{2} \quad f(z)=e^z \Rightarrow f'(z)=e^z \quad \Rightarrow \quad f'(x)=e^{\frac{1}{2}x}\cdot\frac{1}{2}=\underline{\underline{\frac{1}{2}e^{\frac{1}{2}x}}}$

A3	g)	$f(x)=2ax^3-4bx$ (Sr/Kr) $\Rightarrow f(x)=2\cdot 3ax^2-4b=\underline{\underline{6ax^2-4b}}$

A3	h)	$f(x)=e^{ax}$ Kettenregel: $f'(x)=f'(z)\cdot z'$ $z=ax \Rightarrow z'=a \quad f(z)=e^z \Rightarrow f'(z)=e^z \quad \Rightarrow \quad f'(x)=e^{ax}\cdot a=\underline{\underline{ae^{ax}}}$

A3	i)	$f(x)=e^{-(x-2)}$ Kettenregel: $f'(x)=f'(z)\cdot z'$ $z=-(x-2)=-x+2 \Rightarrow z'=-1 \quad f(z)=e^z \Rightarrow f'(z)=e^z$ $\Rightarrow \quad f'(x)=e^{-(x-2)}\cdot(-1)=\underline{\underline{-e^{-(x-2)}}}$

A4	Ausführliche Lösung	
	a)	$f(x)=3x^3-2x^2+x-7 \Rightarrow f'(x)=\underline{\underline{9x^2-4x+1}}$

A4	b)	$f(x)=x^2\cdot e^x\cdot\sqrt{x}=x^2\cdot x^{\frac{1}{2}}\cdot e^x=\underbrace{x^{\frac{5}{2}}}_{u}\cdot\underbrace{e^x}_{v} \Rightarrow f'(x)=u'v+uv'$ mit $u=x^{\frac{5}{2}} \Rightarrow u'=\frac{5}{2}x^{\frac{3}{2}}$ und $v=e^x \Rightarrow v'=e^x$ wird $f'(x)=\frac{5}{2}x^{\frac{3}{2}}\cdot e^x+x^{\frac{5}{2}}\cdot e^x=\underline{\underline{\left(\frac{5}{2}x^{\frac{3}{2}}+x^{\frac{5}{2}}\right)e^x}}$

A4	c)	$f(x)=\frac{x^2\cdot\sqrt{x}\cdot\sqrt{x^3}}{x^3}=\frac{x^2\cdot x^{\frac{1}{2}}\cdot x^{\frac{3}{2}}}{x^3}=\frac{x^{\frac{4}{2}+\frac{1}{2}+\frac{3}{2}}}{x^3}=\frac{x^{\frac{8}{2}}}{x^3}=\frac{x^4}{x^3}=x \Rightarrow f'(x)=\underline{\underline{1}}$

A4	d)	$f(x)=\frac{2x-1}{x+2} \Rightarrow f'(x)=\frac{u'v-uv'}{v^2}$ mit $u=2x-1 \Rightarrow u'=2$ und $v=x+2 \Rightarrow v'=1$ und $v^2=(x+2)^2$ wird $\Rightarrow f'(x)=\frac{2\cdot(x+2)-(2x-1)\cdot 1}{(x+2)^2}=\frac{2x+4-2x+1}{(x+2)^2}=\underline{\underline{\frac{5}{(x+2)^2}}}$

A4	e)	$f(x)=(a^2+x)^2 \Rightarrow f'(x)=2\left(a^2+x\right)\cdot 1=\underline{\underline{2\left(a^2+x\right)}}$

A4	f)	$f(x)=\left(2x^3-3\right)^2 \Rightarrow f'(x)=2\left(2x^3-3\right)\cdot 6x^2=12x^2\left(2x^3-3\right)=\underline{\underline{24x^5-36x^2}}$

A5	Ausführliche Lösung	
	a)	$f(x)=\underbrace{\left(x+e^x\right)}_{u}\cdot\underbrace{\ln(x)}_{v}\Rightarrow f'(x)=u'v+uv'$ mit $u=x+e^x\Rightarrow u'=1+e^x$ und $v=\ln(x)\Rightarrow v'=\frac{1}{x}$ wird $f'(x)=\left(1+e^x\right)\cdot\ln(x)+\left(x+e^x\right)\cdot\frac{1}{x}=\underline{\underline{\ln x+\ln x\cdot e^x+1+\frac{e^x}{x}}}$

A5	b)	$f(x)=\ln\left(x^2-1\right)$ Kettenregel: $f'(x)=f'(z)\cdot z'$ $z=x^2-1\Rightarrow z'=2x \quad f(z)=\ln(z)\Rightarrow f'(z)=\frac{1}{z}$ $\Rightarrow f'(x)=\frac{1}{x^2-1}\cdot 2x=\underline{\underline{\frac{2x}{x^2-1}}}$

A5	c)	$f(x)=(x+1)\cdot e^{(x+1)}\Rightarrow f'(x)=u'v+uv'$ mit $u=(x+1)\Rightarrow u'=1$ und $v=e^{(x+1)}\Rightarrow v'=e^{(x+1)}$ $f'(x)=1\cdot e^{(x+1)}+(x+1)e^{(x+1)}=\left[1+(x+1)\right]e^{(x+1)}=\underline{\underline{(x+2)e^{(x+1)}}}$

A5	d)	$f(x)=a\cdot\ln(x)-b\cdot e^x-3\cdot x^2\Rightarrow f'(x)=\underline{\underline{\frac{a}{x}-be^x-6x}}$

A5	e)	$f(x)=\frac{(x+1)^2}{(x-1)^2}\Rightarrow f'(x)=\frac{u'v-uv'}{v^2}$ mit $u=(x+1)^2\Rightarrow u'=2(x+1)$ und $v=(x-1)^2\Rightarrow v'=2(x-1)$ und $v^2=(x-1)^4$ wird $f'(x)=\frac{2(x+1)\cdot(x-1)^2-(x+1)^2\cdot 2(x-1)}{(x-1)^4}$ $=\frac{(x-1)\left[2(x+1)(x-1)-2(x+1)^2\right]}{(x-1)^4}=\frac{2(x+1)(x-1)-2(x+1)^2}{(x-1)^3}$ $=\frac{2\left(x^2-1\right)-2(x+1)^2}{(x-1)^3}=\frac{2x^2-2-2x^2-4x-2}{(x-1)^3}=\frac{-4x-4}{(x-1)^3}=\underline{\underline{-\frac{4(x+1)}{(x-1)^3}}}$

A5 f)

$$f(x)=\sqrt{\frac{3+x}{3-x}}=\left(\frac{3+x}{3-x}\right)^{\frac{1}{2}}\Rightarrow f'(x)=\frac{1}{2}\left(\frac{3+x}{3-x}\right)^{-\frac{1}{2}}\cdot\left(\frac{3+x}{3-x}\right)' \quad \text{Kettenregel}$$

Zwischenrechnung:

$$\left(\frac{3+x}{3-x}\right)'=\frac{u'v-uv'}{v^2}\quad u=3+x\Rightarrow u'=1;\ v=3-x\Rightarrow v'=-1;\ v^2=(3-x)^2$$

$$\left(\frac{3+x}{3-x}\right)'=\frac{1\cdot(3-x)-(3+x)\cdot(-1)}{(3-x)^2}=\frac{3-x+3+x}{(3-x)^2}=\frac{6}{(3-x)^2}$$

$$f'(x)=\frac{1}{2}\left(\frac{3-x}{3+x}\right)^{\frac{1}{2}}\cdot\frac{6}{(3-x)^2}=\frac{3(3-x)^{\frac{1}{2}}}{(3+x)^{\frac{1}{2}}\cdot(3-x)^2}=\frac{3(3-x)^{-\frac{3}{2}}}{(3+x)^{\frac{1}{2}}}$$

$$=\frac{3}{(3-x)^{\frac{3}{2}}(3+x)^{\frac{1}{2}}}=\frac{3}{(3-x)(3-x)^{\frac{1}{2}}(3+x)^{\frac{1}{2}}}$$

$$=\frac{3}{(3-x)\left[(3-x)(3+x)\right]^{\frac{1}{2}}}=\frac{3}{(3-x)(9-x^2)^{\frac{1}{2}}}$$

A6 Ausführliche Lösung

a) $f(x)=3x+4\Rightarrow f'(x)=3 \qquad f''(x)=0 \qquad f'''(x)=0$

A6 b)

$$f(x)=2x-4+x^3-5x+4x^3=5x^3-3x-4$$

$$\Rightarrow f'(x)=15x^2-3 \qquad f''(x)=30x \qquad f'''(x)=30$$

A6 c)

$$f(x)=3x^3+2x^2+x+1$$

$$\Rightarrow f'(x)=9x^2+4x+1 \qquad f''(x)=18x+4 \qquad f'''(x)=18$$

A6 d)

$$f(x)=(2x+1)^3$$

$$\Rightarrow f'(x)=3(2x+1)^2\cdot 2=6\left(4x^2+4x+1\right)=24x^2+24x+6$$

$$f''(x)=48x+24 \qquad f'''(x)=48$$

A6 e)

$$f(x)=x-x^4+3+x=-x^4+2x+3$$

$$\Rightarrow f'(x)=-4x^3+2 \qquad f''(x)=-12x^2 \qquad f'''(x)=-24x$$

A6 f)

$$f(x)=1-2x-3x-4x+x^4=x^4-9x+1$$

$$\Rightarrow f'(x)=4x^3-9 \qquad f''(x)=12x^2 \qquad f'''(x)=24x$$

A6	g)	$f(x)=\underbrace{a+b+c^2}_{\text{Konstante}}-x-ax-bx-cx^3-c^3x$ $f'(x)=-1-a-b-3cx^2-c^3=-3cx^2\underbrace{-a-b-c^3-1}_{\text{Konstante}}$ $f''(x)=-6cx \qquad f'''(x)=-6c$

A6	h)	$f(x)=4x^3-2x^2+5x-2$ $\Rightarrow f'(x)=12x^2-4x+5 \qquad f''(x)=24x-4 \qquad f'''(x)=24$