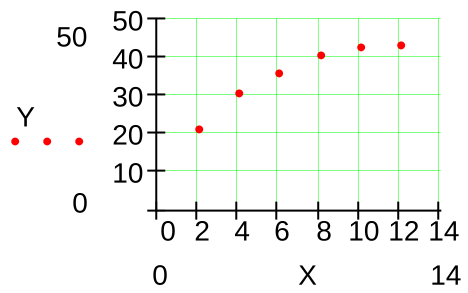
Lösungen Differenzialrechnung I

Ausführliche Lösungen:

A1 Ausführliche Lösung

a)



b) Die Wasserstoffproduktion pro Zeiteinheit wird immer geringer.

c) Änderungsrate: $\frac{\Delta y}{\Delta x}$

$$[2\,;4]:\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{30{,}5-21}{4-2}=4{,}75$$

$$[4\,;8]:\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{40{,}5-30{,}5}{8-4}=2{,}5$$

$$[8\,;12]:\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{43-40{,}5}{12-8}=0{,}625$$

I	$[2\,;4]$	$[4\,;8]$	$[8\,;12]$
$\frac{ml}{s}$	4,75	2,5	0,625

A2 Ausführliche Lösung

$f(x)=\frac{1}{4}x^2-x+1$ mittlere Änderungsrate: $\frac{\Delta y}{\Delta x}$

$$[1;1{,}5]:\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{f(1{,}5)-f(1)}{1{,}5-1}=\frac{\frac{1}{16}-\frac{1}{4}}{\frac{1}{2}}=\underline{\underline{-\frac{3}{8}}}$$

$$[-4\,;-2{,}5]:\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{f(-2{,}5)-f(-4)}{-2{,}5-(-4)}=\frac{\frac{81}{16}-9}{\frac{3}{2}}=\underline{\underline{-\frac{21}{8}}}$$

$$[2\,;t]:\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{f(t)-f(2)}{t-2}=\frac{\frac{1}{4}t^2-t+1-\left(\frac{1}{4}\cdot 2^2-2+1\right)}{t-2}=\frac{\frac{1}{4}t^2-t+1}{t-2}$$

$$=\frac{\frac{1}{4}\left(t^2-4t+4\right)}{t-2}=\frac{\frac{1}{4}(t-2)^2}{t-2}=\underline{\underline{\frac{1}{4}(t-2)\ \text{für } t\neq 2}}$$

$$[3\,;3+h]:\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{f(3+h)-f(3)}{3+h-3}=\frac{\frac{1}{4}(3+h)^2-(3+h)+1-\left(\frac{1}{4}\cdot 3^2-3+1\right)}{h}$$

$$=\frac{\frac{1}{4}\left(9+6h+h^2\right)-3-h+1-\frac{9}{4}+3-1}{h}=\frac{\frac{1}{2}h+\frac{1}{4}h^2}{h}=\underline{\underline{\frac{1}{2}+\frac{1}{4}h}}$$

A3 Ausführliche Lösung

a)

$f(x)=\frac{3}{4}x^2-3x$ die mittlere Änderungsrate in $[2;5]$ ist $\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{f(5)-f(2)}{5-2}$

$f(5)=\frac{3}{4}\cdot 25-3\cdot 5=3,75 \quad f(2)=\frac{3}{4}\cdot 4-3\cdot 2=-3 \quad \Delta x=5-2=3$

$\Rightarrow \frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{3,75-(-3)}{3}=\frac{6,75}{3}=\underline{\underline{2,25}}$

A3 Ausführliche Lösung

b)

Die Gleichung der Sekante s(x) durch die Punkte P und Q ist genauso zu bestimmen wie die Gleichung einer Geraden durch zwei Punkte.

$P(2\,|\,f(2))\Rightarrow$ aus Aufgabenteli a) $P(2\,|\,-3)$

$Q(5\,|\,f(5))\Rightarrow$ aus Aufgabenteli a) $Q(5\,|\,3,75)$

$s(x)=a_1\cdot x+a_0$ mit $a_1=\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{f(5)-f(2)}{5-2}=2,25$ siehe Aufgabenteil a)

$\Rightarrow s(x)=2,25x+a_0$

$P(2\,|\,-3): s(2)=-3 \Leftrightarrow 2,25\cdot 2+a_0=-3 \Leftrightarrow a_0=-7,5$

$\Rightarrow s(x)=2,25x-7,5$ ist die Sekantengleichung

A3 Ausführliche Lösung

c)

momentane Änderungsrate an der Stelle $x=2$:

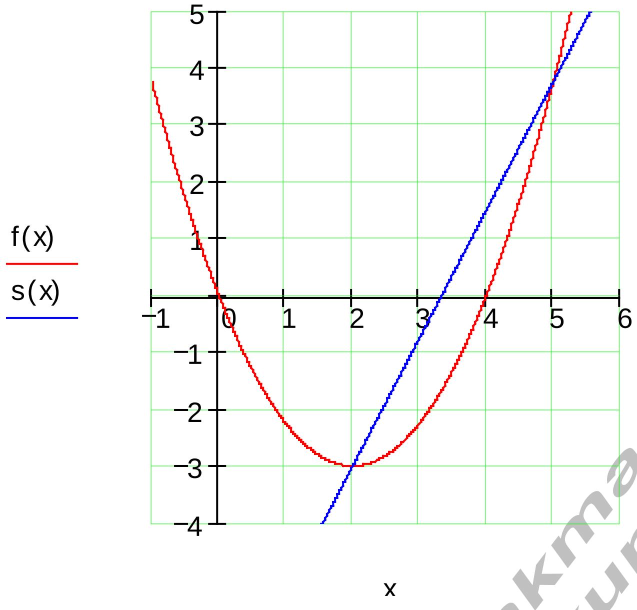
$$\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{f(2+\Delta x)-f(2)}{\Delta x}=\frac{\frac{3}{4}(2+\Delta x)^2-3(2+\Delta x)\underbrace{+3}_{-f(2)}}{\Delta x}$$

$$=\frac{\frac{3}{4}\left[4+4\Delta x+(\Delta x)^2\right]-6-3\Delta x+3}{\Delta x}=\frac{3+3\Delta x+\frac{3}{4}(\Delta x)^2-6-3\Delta x+3}{\Delta x}$$

$=\frac{\frac{3}{4}(\Delta x)^2}{\Delta x}=\frac{3}{4}\Delta x$ mittlere Änderungsrate im Intervall $[2;\Delta x]$

für $\Delta x\to 0$ wird $\frac{3}{4}\Delta x\to 0$

Die momentane Änderungsrate von $f(x)$ an der Stelle $x=2$ ist 0

A3	Ausführliche Lösung	
	d)	

A4	Ausführliche Lösung
	Die momentane Geschwindigkeit ist gleichbedeutend mit der momentanen Änderungsrate.
	$t = 1: \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{s(1+\Delta x) - s(1)}{\Delta x} = 10 + 5\Delta x \Rightarrow$ für $\Delta x \to 0$ gilt: $10 + 5\Delta x \to 10$
	$t = 2: \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{s(2+\Delta x) - s(2)}{\Delta x} = 20 + 5\Delta x \Rightarrow$ für $\Delta x \to 0$ gilt: $20 + 5\Delta x \to 20$
	$t = 3: \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{s(3+\Delta x) - s(3)}{\Delta x} = 30 + 5\Delta x \Rightarrow$ für $\Delta x \to 0$ gilt: $30 + 5\Delta x \to 30$

A5	Ausführliche Lösung	
	a)	Die anfängliche Temperatur lässt sich aus dem Graphen zu 90 ^{0}C ablesen.
	b)	Die Funktionswerte streben asymptotisch gegen den Wert 20 ^{0}C.
	c)	Die Abkühlungsgeschwindigkeit ist zu Beginn des Vorgangs am größten.
	d)	$[0;10]: \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{T(10) - T(0)}{10 - 0}$ mit $T(10) = 20 + 70 \cdot e^{-0,1 \cdot 10} \approx 45,75$ und $T(0) = 20 + 70 \cdot \underbrace{e^{-0,1 \cdot 0}}_{1} = 90$ wird $\frac{\Delta y}{\Delta x} \approx \underline{\underline{-4,425}}$ Das negative Vorzeichen bedeutet, dass die Änderungsrate negativ ist, die Temperatur des Puddings nimmt ab.