

Beispiel I Training ganzrationale Funktionen IV

Ausführliches Beispiel zur Nullstellenbestimmung ganzrationaler Funktionen:

Faktorisierungsverfahren

$f(x) = 2x^3 - 2x^2 - 4x = 0$ der Faktor x kann ausgeklammert werden

$\Leftrightarrow x(2x^2 - 2x - 4) = 0 \Rightarrow x_1 = 0$ und der Klammerausdruck ist Null

$\Rightarrow 2x^2 - 2x - 4 = 0$ ist eine quadratische Gleichung

$2x^2 - 2x - 4 = 0 \mid : 2 \Leftrightarrow x^2 - x - 2 = 0$

$p = -1; q = -2 \Rightarrow D = \left(\frac{p}{2}\right)^2 - q = \frac{1}{4} + 2 = \frac{1}{4} + \frac{8}{4} = \frac{9}{4} \Rightarrow \sqrt{D} = \sqrt{\frac{9}{4}} = \frac{3}{2}$

$$x_{2/3} = -\frac{p}{2} \pm \sqrt{D} \quad \left| \begin{array}{l} x_2 = \frac{1}{2} + \frac{3}{2} = \frac{4}{2} = 2 \\ x_3 = \frac{1}{2} - \frac{3}{2} = -\frac{2}{2} = -1 \end{array} \right.$$

Die Nullstellen:

$x_1 = 0; x_2 = 2; x_3 = -1$

Schnittpunkte mit der x -Achse:

$P_{x_1}(0|0); P_{x_2}(2|0); P_{x_3}(-1|0)$

Die Funktionsgleichung:

$$f(x) = \underbrace{2x(x+1)(x-2)}_{\text{Produkt aus Linearfaktoren}} \Leftrightarrow f(x) = 2x^3 - 2x^2 - 4x$$

Substitutionsverfahren

$$f(x) = x^4 - 13x^2 + 36 = 0 \quad \text{biquadratische Gleichung}$$

$$\text{Substitution: } x^2 = z$$

$$\Rightarrow f(z) = z^2 - 13z + 36 = 0 \quad p = -13 \quad q = 36$$

$$D = \left(\frac{p}{2}\right)^2 - q = \left(\frac{13}{2}\right)^2 - 36 = \frac{169}{4} - \frac{144}{4} = \frac{25}{4} \Rightarrow \sqrt{D} = \sqrt{\frac{25}{4}} = \frac{5}{2}$$

$$z_{1/2} = -\frac{p}{2} \pm \sqrt{D} \quad \left| \begin{array}{l} z_1 = \frac{13}{2} + \frac{5}{2} = 9 \\ z_2 = \frac{13}{2} - \frac{5}{2} = 4 \end{array} \right.$$

Substitution rückgängig machen:

$$x^2 = z_1 = 9$$

$$x^2 = z_2 = 4$$

$$\Rightarrow |x| = 9$$

$$|x| = 4$$

$$\Rightarrow x_1 = 3 \quad x_2 = -3$$

$$x_3 = 2 \quad x_4 = -2$$

Schnittpunkte mit der x – Achse :

$$P_{x_1}(3|0); P_{x_2}(-3|0); P_{x_3}(2|0); P_{x_4}(-2|0)$$

Die Funktionsgleichung:

$$f(x) = \underbrace{(x-3)(x+3)(x-2)(x+2)}_{\text{Produkt aus Linearfaktoren}} \Leftrightarrow f(x) = x^4 - 13x^2 + 36$$

Reduzierung des Grades durch Polynomdivision

$$f(x) = x^3 - x^2 - 5x + 6$$

$x_1 = 2$ ist eine bekannte Nullstelle, es erfolgt die Polynomdivision

$$\begin{array}{r} (x^3 - x^2 - 5x + 6) : (x - 2) = x^2 + x - 3 \\ -(x^3 - 2x^2) \\ \hline x^2 - 5x \\ -(x^2 - 2x) \\ \hline -3x + 6 \\ -(-3x + 6) \\ \hline 0 \end{array}$$

Ansatz für die Nullstellenbestimmung: $f(x) = 0 \Leftrightarrow (x^2 + x - 3)(x - 2) = 0$

Es ist also die quadratische Gleichung $x^2 + x - 3 = 0$ zu lösen.

Das geschieht mit der p-q-Formel:

$$p = 1; q = -3 \Rightarrow D = \left(\frac{p}{2}\right)^2 - q = \frac{1}{4} + 3 = \frac{13}{4} \Rightarrow \sqrt{D} = \sqrt{\frac{13}{4}}$$

$$x_{2/3} = -\frac{p}{2} \pm \sqrt{D} \quad \left\{ \begin{array}{l} x_2 = -\frac{1}{2} + \sqrt{\frac{13}{4}} \\ x_3 = -\frac{1}{2} - \sqrt{\frac{13}{4}} \end{array} \right.$$

Die Nullstellen:

$$x_1 = 2; x_2 = -\frac{1}{2} + \sqrt{\frac{13}{4}}; x_3 = -\frac{1}{2} - \sqrt{\frac{13}{4}}$$

Schnittpunkte mit der x-Achse:

$$P_{x1}(2|0); P_{x2}\left(-\frac{1}{2} + \sqrt{\frac{13}{4}} | 0\right); P_{x3}\left(-\frac{1}{2} - \sqrt{\frac{13}{4}} | 0\right)$$

Die Funktionsgleichung:

$$f(x) = (x - 2) \left(x + \frac{1}{2} - \sqrt{\frac{13}{4}}\right) \left(x + \frac{1}{2} + \sqrt{\frac{13}{4}}\right) \Leftrightarrow f(x) = x^3 - x^2 - 5x + 6$$

Reduzierung des Grades mittels Horner- Schema

$f(x) = x^3 - x^2 - 5x + 6$ $x_1 = 2$ sei eine durch Probieren gefundene Nullstelle.

$$\begin{array}{r} 1 \quad -1 \quad -5 \quad 6 \\ x = 2 \quad \downarrow \quad \underline{2} \quad \underline{2} \quad -6 \\ 1 \quad 1 \quad -3 \quad 0 = f(2) \end{array}$$

$x^2 + x - 3 = 0$ ist das Restpolynom.

Die Lösung des Restpolynoms führt zur gleichen Lösung wie bei der Polynomdivision.