Lösungen Text- und Anwendungsaufgaben I

Ergebnisse:

E1	Ergebnis
	Funktionsterm: $K(x) = 0{,}02x^3 - 1{,}6x^2 + 44{,}5x + 730$
	Der Verkaufspreis pro Stück sollte mindestens $73\frac{2}{3}$ € betragen.
	Grafik siehe ausführliche Lösung

E2	Ergebnisse	
	a)	Die maximale Höhe des Balls lässt sich aus der Grafik zu 3 m ablesen.
	b)	Der Ball überfliegt die Abwehrmauer (2,573 m > 2 m).
	c)	Der Ball schlägt 18 m vom Abschusspunkt auf dem Boden auf.
	d)	In einer Entfernung von etwa 15,65 m vom Abschusspunkt überfliegt der Ball die Torlinie in 2 m Höhe.

E3	Ergebnisse	
	a)	Die Randfunktion ist eine ganzrationale Funktion 4. Grades weil sie zwei doppelte Nullstellen besitzt. ($x_1 = -4$; $x_2 = 4$)
	b)	Funktionsterm: $f(x) = \frac{1}{64}x^4 - \frac{1}{2}x^2 + 4$
	c)	Das Fenster kann höchstens 4 m breit sein.

E4	Ergebnisse	
	a)	Funktionsterm: $f(x) = -\frac{1}{36000}x^4 + \frac{1}{5}x^2$
	b)	Die Dammkrone hat eine Breite von 80,25 m.

Ausführliche Lösungen:

A1	Ausführliche Lösung
	Das Gleichungssystem: $f(x)=a_3x^3+a_2x^2+a_1x+a_0$ $P_1(5\mid 915):\quad f(5)=125a_3+25a_2+5a_1+a_0=915$ $P_2(10\mid 1035):\ f(10)=1000a_3+100a_2+10a_1+a_0=1035$ $P_3(20\mid 1140):f(20)=8000a_3+400a_2+20a_1+a_0=1140$ $P_4(35\mid 1185):f(35)=42875a_3+1225a_2+35a_1+a_0=1185$

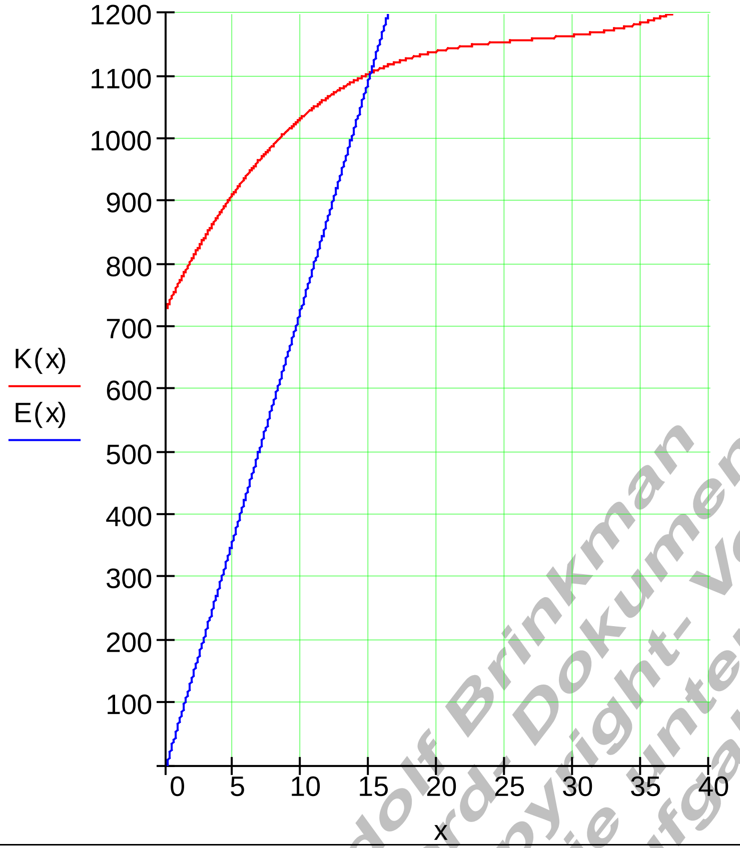
A1	Ausführliche Lösung
	Der Gauß- Algorithmus:

a_0	a_1	a_2	a_3		
1	5	25	125	915	
1	10	100	1000	1035	$II-I$
1	20	400	8000	1140	$III-I$
1	35	1225	42875	1185	$IV-I$
1	5	25	125	915	
0	5	75	875	120	
0	15	375	7875	225	$III-3\cdot II$
0	30	1200	42750	270	$IV-6\cdot II$
1	5	25	125	915	
0	5	75	875	120	
0	0	150	5250	−135	
0	0	750	37500	−450	$IV-5\cdot III$
1	5	25	125	915	
0	5	75	875	120	
0	0	150	5250	−135	
0	0	0	11250	225	

A1	Ausführliche Lösung
	Die Koeffizienten und die Funktionsgleichung: $11250a_3 = 225 \Leftrightarrow a_3 = \frac{225}{11250} = 0{,}02$ $150a_2 + 5250a_3 = -135 \Leftrightarrow a_2 = \frac{-135 - 5250 \cdot 0{,}02}{150} = -1{,}6$ $5a_1 + 75a_2 + 875a_3 = 120 \Leftrightarrow a_1 = \frac{120 - 75 \cdot (-1{,}6) - 875 \cdot 0{,}02}{5} = 44{,}5$ $a_0 + 5a_1 + 25a_2 + 125a_3 = 915 \Leftrightarrow a_0 = 915 - 5 \cdot 44{,}5 - 25 \cdot (-1{,}6) - 125 \cdot 0{,}02 = 730$ Die Funktionsgleichung: $\underline{\underline{K(x) = 0{,}02x^3 - 1{,}6x^2 + 44{,}5x + 730}}$

A1	Ausführliche Lösung
	Kosten für die Herstellung von $x = 15$ Stück: $K(15) = 0{,}02 \cdot 15^3 - 1{,}6 \cdot 15^2 + 44{,}5 \cdot 15 + 730 = 1105$ Erlösfunktion: $E(x) = p \cdot x$ mit p als Verkaufspreis pro Stück. Mindestpreis pro Stück: $p = \frac{1105}{15} = 73\frac{2}{3} \Rightarrow E(x) = 73\frac{2}{3}x$ Der Verkaufspreis pro Stück sollte mindestens $\underline{\underline{73\frac{2}{3}}}$ € betragen

A1 Ausführliche Lösung



A2 Ausführliche Lösung

a) Die maximale Höhe des Balls lässt sich aus der Grafik zu 3 m ablesen. Die Entfernung vom Abschusspunkt beträgt etwa 12 m. Eine exakte Berechnung ist erst mit Hilfe der Differentialrechnung möglich. Wir überprüfen die Abschätzung durch Rechnung. Dabei untersuchen wir die Funktionswerte in der Umgebung von x = 12.

$$f(11{,}5) = -\frac{1}{288}\cdot 11{,}5^3 + \frac{1}{16}\cdot 11{,}5^2 \approx 2{,}985$$

$$f(12) = -\frac{1}{288}\cdot 12^3 + \frac{1}{16}\cdot 12^2 = 3$$

$$f(12{,}5) = -\frac{1}{288}\cdot 12{,}5^3 + \frac{1}{16}\cdot 12{,}5^2 \approx 2{,}894$$

$$f(11{,}75) = -\frac{1}{288}\cdot 11{,}75^3 + \frac{1}{16}\cdot 11{,}75^2 \approx 2{,}996$$

$$f(12{,}25) = -\frac{1}{288}\cdot 12{,}25^3 + \frac{1}{16}\cdot 12{,}25^2 \approx 2{,}996$$

Wir könnten nun die Intervalle immer enger machen und würden dadurch dem Wert 3 immer näher kommen.

A2	Ausführliche Lösung	
	b)	Gesucht ist die Flugbahnhöhe in einem Abstand von 9,15 m vom Abschusspunkt, denn dort steht die Mauer der Abwehrspieler. $f(9{,}15) = -\frac{1}{288}\cdot 9{,}15^3 + \frac{1}{16}\cdot 9{,}15^2 \approx 2{,}573$ Der Ball überfliegt die Abwehrmauer (2,573 m > 2 m).

A2	Ausführliche Lösung	
	c)	Um den Auftreffpunkt des Balles zu bestimmen, sind die Nullstellen des Funktionsgraphen zu bestimmen. $f(x) = 0 \Leftrightarrow -\frac{1}{288}x^3 + \frac{1}{16}x^2 = 0 \Leftrightarrow x^2\left(-\frac{1}{288}x + \frac{1}{16}\right) = 0 \Rightarrow x_{1/2} = 0$ $-\frac{1}{288}x + \frac{1}{16} = 0 \Leftrightarrow \frac{1}{288}x = \frac{1}{16} \Leftrightarrow \underline{\underline{x_3 = 18}}$ Der Ball schlägt 18 m vom Abschusspunkt auf dem Boden auf.

A2	Ausführliche Lösung	
	d)	Gesucht ist die Entfernung vom Abschusspunkt, in der der Ball eine Höhe von 2 m hat. Aus der Grafik lesen wir zwei Werte ab, sie liegen bei etwa 7,50 m und 16 m. Angesichts der Flugbahn des Balles untersuchen wir die Umgebung von 16 m. $f(x) = 2 \Leftrightarrow -\frac{1}{288}x^3 + \frac{1}{16}x^2 = 2 \Leftrightarrow -\frac{1}{288}x^3 + \frac{1}{16}x^2 - 2 = 0$ $\Leftrightarrow x^3 - 18x^2 + 576 = 0$ $x = 16 \Rightarrow 16^3 - 18\cdot 16^2 + 576 = 64 > 0$ $x = 15{,}5 \Rightarrow 15{,}5^3 - 18\cdot 15{,}5^2 + 576 \approx -24 < 0$ $x = 15{,}75 \Rightarrow 15{,}75^3 - 18\cdot 15{,}75^2 + 576 \approx 18 > 0$ $x = 15{,}7 \Rightarrow 15{,}7^3 - 18\cdot 15{,}7^2 + 576 \approx 9 > 0$ $x = 15{,}65 \Rightarrow 15{,}65^3 - 18\cdot 15{,}65^2 + 576 \approx 0{,}4 > 0$ In einer Entfernung von etwa 15,65 m vom Abschusspunkt überfliegt der Ball die Torlinie in 2 m Höhe.

A3	Ausführliche Lösung	
	a)	Die Randfunktion ist eine ganzrationale Funktion 4. Grades weil sie zwei doppelte Nullstellen besitzt. (x_1 = -4 ; x_2 = 4)

A3	Ausführliche Lösung	
	b)	Ansatz: $f(x) = a_4(x+4)^2(x-4)^2$ $P(0\,\vert\,4): f(0) = a_4(4)^2(-4)^2 = 4 \Leftrightarrow a_4 = \frac{4}{4^4} = \frac{1}{4^3} = \frac{1}{64}$ $\Rightarrow f(x) = \frac{1}{64}(x+4)^2(x-4)^2 = \underline{\underline{\frac{1}{64}x^4 - \frac{1}{2}x^2 + 4}}$

A3	Ausführliche Lösung

c)

$$f\left(\frac{b}{2}\right)=2,25 \Leftrightarrow \frac{1}{64}x^4-\frac{1}{2}x^2+4=2,25 \Leftrightarrow \frac{1}{64}x^4-\frac{1}{2}x^2+1,75=0$$

$\Leftrightarrow x^4-32x^2+112=0$ biquadratische Gleichung

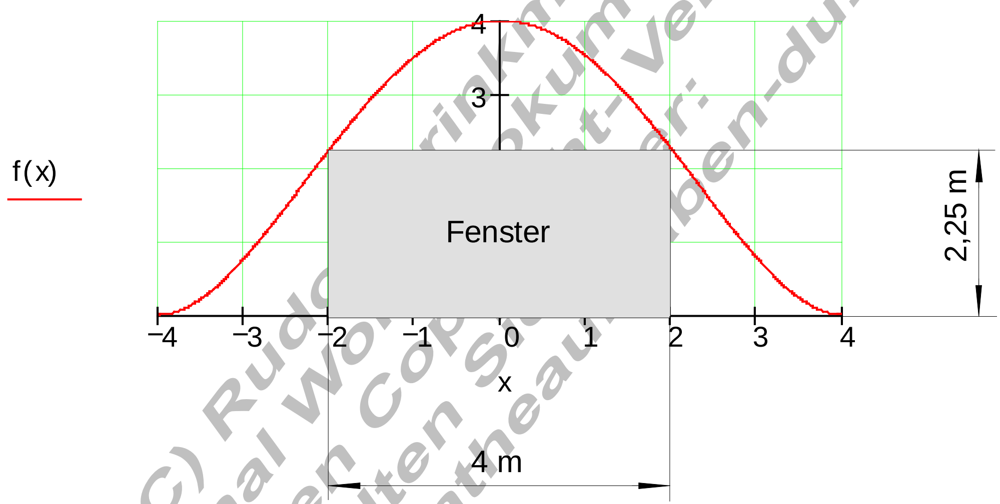
setze $x^2=z:\Rightarrow z^2-32z+112=0 \Rightarrow p=-32\,;\,q=112 \Rightarrow D=144$

$$z_1=16+\sqrt{144}=16+12=28$$

$$z_2=16-\sqrt{144}=16-12=4$$

$$x^2=z\Rightarrow \begin{array}{l} x_1^2=28\Rightarrow |x_1|=\sqrt{28}\Rightarrow x_{1-1}\approx 5,29\,;\,x_{1-2}\approx -5,29 \\ x_2^2=4\Rightarrow |x_2|=\sqrt{4}\Rightarrow x_{2-1}=2\,;\,x_{2-2}=-2 \end{array}$$

$\Rightarrow \frac{b}{2}=2\text{ m}\Rightarrow$ Das Fenster kann höchstens $\underline{\underline{4\text{ m}}}$ breit sein.



A4	Ausführliche Lösung

a)

Ansatz : $f(x)=a_4x^4+a_2x^2$

$P_1(60\,|\,360):\quad f(60)=12\,960\,000\,a_4+3\,600a_2=360$

$P_2(30\,|\,157,5):f(30)=810\,000\,a_4+900a_2=157,5$

a_4	a_2		
810000	900	157,5	
12960000	3600	360	$II-16\cdot I$
810000	900	157,5	
0	−10800	−2160	

$-10800a_2=-2160 \Leftrightarrow a_2=\underline{0,2}$

$810000a_4+900a_2=157,5$

$\Leftrightarrow a_4=\frac{157,5-180}{810000}=\underline{-\frac{1}{36000}}$

$$\Rightarrow \underline{\underline{f(x)=-\frac{1}{36000}x^4+\frac{1}{5}x^2}}$$

A4	Ausführliche Lösung
	b) $f\left(\frac{b}{2}\right) = 250 \Leftrightarrow -\frac{1}{36000}x^4 + \frac{1}{5}x^2 = 250 \Leftrightarrow -\frac{1}{36000}x^4 + \frac{1}{5}x^2 - 250 = 0$ $\Leftrightarrow x^4 - 7\,200x^2 + 9\,000\,000 = 0$ setze $x^2 = z \Rightarrow z^2 - 7\,200z + 9\,000\,000 = 0$ $\Rightarrow p = -7\,200\,;\, q = 9\,000\,000 \Rightarrow D = 3\,960\,000$ $z_1 = 3\,600 + \sqrt{3\,960\,000} \approx 5\,589{,}975$ $z_2 = 3\,600 - \sqrt{3\,960\,000} \approx -1\,610{,}025$ $x^2 = z \Rightarrow \begin{array}{l} x_1^2 = 3\,600 + \sqrt{3\,960\,000} \Rightarrow x_{1-1/2} = \pm\sqrt{3\,600 + \sqrt{3\,960\,000}} \approx \pm 74{,}766 \\ x_2^2 = 3\,600 - \sqrt{3\,960\,000} \Rightarrow x_{2-1/2} = \pm\sqrt{3\,600 - \sqrt{3\,960\,000}} \approx \pm 40{,}125 \end{array}$ $\frac{b}{2} \approx 40{,}125\text{ m} \Rightarrow$ Breite der Dammkrone $\underline{\underline{80{,}25\text{ m}}}$

A4	Ausführliche Lösung
	b)