Lösungen ganzrationale Funktionen aus gegebenen Bedingungen III

Ausführliche Lösungen:

A1 Ausführliche Lösung

Verschiebung um 1 LE nach oben ergibt 3 Nullstellen.

$f^*(x) = f(x) + 1$ hat $P_{x1/2}(-2\,|\,0)\,;P_{x3}(1\,|\,0)$ und $P_y(0\,|\,-4)$

$\Rightarrow f^*(x) = a_3(x+2)^2(x-1)$

$P(0\,|\,-4): f^*(0) = a_3 \cdot 4 \cdot (-1) = -4 \Leftrightarrow a_3 = 1$

$f^*(x) = (x+2)^2(x-1) \Rightarrow f(x) = f^*(x) - 1$

$\Rightarrow f(x) = (x+2)^2(x-1) - 1 = \underline{\underline{x^3 + 3x^2 - 5}}$

Eine weitaus aufwendigere Methode wäre es gewesen, mit den Koordinaten von 4 aus dem Graphen abgelesenen Punkten ein Gleichungssystem aufzustellen und dieses mit dem Gauß- Algorithmus zu lösen.

A2 Ausführliche Lösung

f(x) hat bei x_1 = -1 eine dreifache Nullstelle (Sattelpunkt) und bei x_2 = 2 eine einfache Nullstelle. Außerdem verläuft der Graph durch P(1 | -2).

$\text{Ansatz}: f(x) = a_4(x+1)^3(x-2)$

$P(1\,|\,-2): f(1) = -2 \Leftrightarrow a_4(1+1)^3(1-2) = -2 \Leftrightarrow a_4 \cdot 8 \cdot (-1) = -2$

$\Leftrightarrow -8a_4 = -2 \Leftrightarrow a_4 = \frac{-2}{-8} = \frac{1}{4}$

$\Rightarrow f(x) = \frac{1}{4}(x+1)^3(x-2) = \frac{1}{4}x^4 + \frac{1}{4}x^3 - \frac{3}{4}x^2 - \frac{5}{4}x - \frac{1}{2}$

g(x) hat 4 Nullstellen: x_1 = -2 ; x_2 = -1 ; x_3 = 1 und x_4 = 2 und schneidet die y – Achse bei y = -2

$\text{Ansatz}: g(x) = a_4(x+2)(x+1)(x-1)(x-2)$

$y = -2 \Rightarrow g(0) = a_4(2)(1)(-1)(-2) = -2 \Leftrightarrow 4a_4 = -2 \Leftrightarrow a_4 = -\frac{2}{4} = -\frac{1}{2}$

$\Rightarrow g(x) = -\frac{1}{2}(x+2)(x+1)(x-1)(x-2) = -\frac{1}{2}(x^2-4)(x^2-1) = -\frac{1}{2}x^4 + \frac{5}{2}x^2 - 2$

A3 Ausführliche Lösung

$a_0 = -2$ wird aus dem Graphen abgelesen

$\Rightarrow f(x) = a_4x^4 + a_1x - 2$

$P_1(-1|0): f(-1) = a_4 - a_1 - 2 = 0 \Leftrightarrow a_4 = a_1 + 2$

$P_2(1|-2): f(1) = a_4 + a_1 - 2 = -2 \Leftrightarrow a_4 = -a_1 + 2 - 2 \Leftrightarrow a_4 = -a_1$

durch gleichsetzen von $a_4 : a_1 + 2 = -a_1 \Leftrightarrow a_1 = -1$

aus $a_4 = -a_1 \Rightarrow a_4 = 1$

$\Rightarrow f(x) = x^4 - x - 2$

Nullstellenbestimmung durch Einschachtelung:

$f(1,3) \approx -0,444$; $f(1,4) \approx 0,442$; $f(1,35) \approx -0,028$; $f(1,36) \approx 0,061$

$f(1,355) \approx 0,016$; $f(1,353) \approx -0,002$ gute Näherung

Die Nullstelle liegt etwa bei x = 1,353

A4 Ausführliche Lösung

Die Schnittpunkte mit der Geraden werden aus der Grafik abgelesen.
Ebenso der Schnittpunkt der Geraden mit der y – Achse.

$P_1(-1|-3)$; $P_2(3|5) : P_y(0|-1) \Rightarrow a_{0g} = -1$

Steigung: $a_{1g} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{5-(-3)}{3-(-1)} = \frac{8}{4} = 2 \Rightarrow \underline{\underline{g(x) = 2x - 1}}$

Punktprobe für f(x) ergibt:

$P_1(-1|-3): f(-1) = 1a_4 + 1a_2 - \frac{7}{4} = -3 \Rightarrow$

$P_2(3|5): \quad f(3) = 81a_4 + 9a_2 - \frac{7}{4} = 5$

Gleichungssystem:

$a_4 + a_2 = -\frac{5}{4}$

$81a_4 + 9a_2 = \frac{27}{4}$

a_4	a_2		
1	1	$-\frac{5}{4}$	
81	9	$\frac{27}{4}$	$II - 81 \cdot I$
1	1	$-\frac{5}{4}$	
0	-72	$\frac{432}{4}$	

$-72a_2 = \frac{423}{4}$

$\Leftrightarrow a_2 = -\frac{432}{4 \cdot 72} = \underline{-\frac{3}{2}}$

$a_4 + a_2 = -\frac{5}{4}$

$\Leftrightarrow a_4 = -\frac{5}{4} + \frac{3}{2} = \underline{\frac{1}{4}}$

$\underline{\underline{f(x) = \frac{1}{4}x^4 - \frac{3}{2}x^2 - \frac{7}{4}}}$