Lösungen ganzrationale Funktionen aus gegebenen Bedingungen II

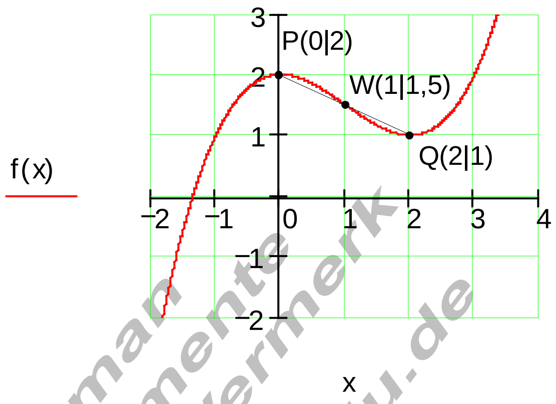
Ausführliche Lösungen:

A1 Ausführliche Lösung

$$f(x) = \frac{1}{4}x^3 - \frac{3}{4}x^2 + 2$$

x	−1	0	1	2	3
f(x)	1	2	1,5	1	2

Die Koordinate von Q wird graphisch ermittelt. Sie lässt sich aus dem Koordinatensystem zu Q(2 | 1) ablesen.
Ein Blick auf die Wertetabelle bestätigt, dass Q auf dem Graphen liegt. Das Ergebnis bedeutet:
Der Graph von f(x) ist punktsymmetrisch zum Punkt W



A2 Ausführliche Lösung

$$f(x) = x(x-4)^2 = x^3 - 8x^2 + 16x$$

$$g(x) = 0,25x^3 - 2x^2 + 4x = 0,25 \cdot f(x)$$

$$h(x) = 0,25\left(x^3 - 8x^2 + 16x + 1\right) = \underbrace{0,25x^3 - 2x^2 + 4x}_{g(x)} + 0,25 = g(x) + 0,25$$

g(x) entsteht aus f(x) durch Stauchung in y – Richtung um den Faktor 0,25.
h(x) entsteht aus g(x) durch Verschiebung in y – Richtung um 0,25 LE.

A3 Ausführliche Lösung

$$\text{Punktsymmetrie} \Rightarrow f(x) = a_3x^3 + a_1x = x\left(a_3x^2 + a_1\right) \Rightarrow P_{x1}(0\,|\,0)$$

$$a_3x^2 + a_1 = 0 \Leftrightarrow x^2 = -\frac{a_1}{a_3} \Rightarrow |x| = \sqrt{-\frac{a_1}{a_3}} \text{ mit } -\frac{a_1}{a_3} > 0 \Leftrightarrow \underline{\underline{\frac{a_1}{a_3} < 0}}$$

Die Vorzeichen von a_3 und a_1 müssen unterschiedlich sein.
Eine solche Funktion mit zwei Nullstellen kann es nicht geben, da bei einer Symmetrie zum Ursprung (Punktsymmetrie) auch die Nullstellen symmetrisch zum
Ursprung wären. Das wären dann insgesamt drei Nullstellen.

A4 Ausführliche Lösung

Berührungspunkt $P_{x1/2}(0\,|\,0)$ ist doppelte Nullstelle, $P_1(2\,|\,0) = P_{x3}(2\,|\,0)$ ist die 3. Nullstelle.

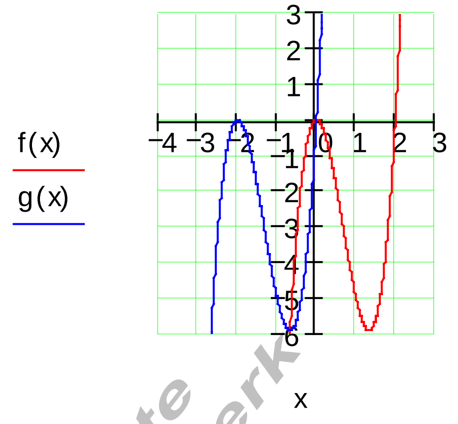
Ansatz: $f(x) = a_3 x^2 (x-2)$

$P_2(1\,|-5): f(1) = a_3 \cdot 1 \cdot (-1) = -5 \Leftrightarrow a_3 = 5$

$\Rightarrow f(x) = 5x^2(x-2) = \underline{\underline{5x^3 - 10x^2}}$

f(x) entsteht durch Verschiebung von g(x) um 2 LE nach rechts $x \to x-2$

$f(x) = g(x-2) = 5(x-2)x^2 = 5x^2(x-2)$



A5 Ausführliche Lösung

$P_{x1}(-2\,|\,0)$ als Sattelpunkt bedeutet $P_{x1/2/3}(-2\,|\,0)$ ist dreifache Nullstelle.

Ansatz: $f(x) = a_3 (x+2)^3$

$P(-4\,|\,6): f(-4) = a_3(-2)^3 = 6$

$\Leftrightarrow a_3 = -\frac{3}{4}$

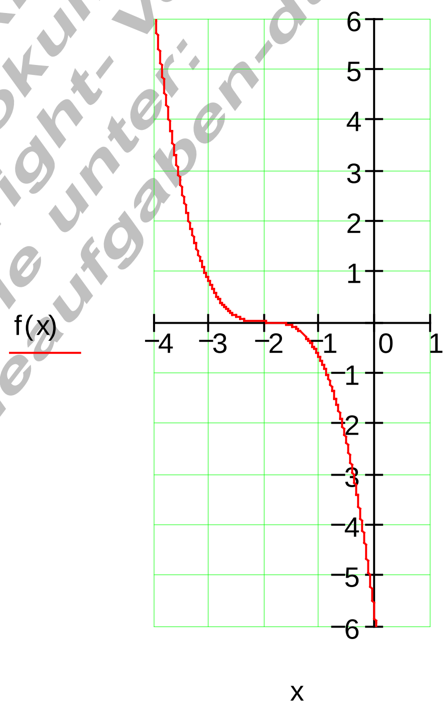
$\Rightarrow f(x) = -\frac{3}{4}(x+2)^3$

$= \underline{\underline{-\frac{3}{4}x^3 - \frac{9}{2}x^2 - 9x - 6}}$

$f(-3) = -0,75 \cdot (-1)^3 = 0,75$

$f(-1) = -0,75 \cdot 1^3 = -0,75$

x	−4	−3	−2	−1	0
f(x)	6	0,75	0	−0,75	−6



A6 Ausführliche Lösung

a) Nullstellen: $P_{x1}(-3\,|\,0); P_{x2/3}(2\,|\,0)$ $\quad P_y(0\,|\,4)$

Ansatz: $f(x) = a_3(x+3)(x-2)^2$

$P_y(0\,|\,4): f(0) = a_3 \cdot 3 \cdot (-2)^2 = 4 \Leftrightarrow 12a_3 = 4 \Leftrightarrow a_3 = \frac{1}{3}$

$\Rightarrow f(x) = \frac{1}{3}(x+3)(x-2)^2 = \frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{3}x^2 - \frac{8}{3}x + 4$

A6	Ausführliche Lösung	
	b)	Verschiebung um 1 LE nach unten ergibt Punktsymmetrie und 3 Nullstellen. $f^*(x) = f(x) - 1 = a_3 x(x+1)(x-1)$ $P(2 \mid -2): f^*(2) = 2a_3 \cdot 3 \cdot 1 = -2 \Leftrightarrow a_3 = -\frac{1}{3}$ $f^*(x) = -\frac{1}{3}x(x+1)(x-1) \Rightarrow f(x) = f^*(x) + 1$ $\Rightarrow f(x) = -\frac{1}{3}x(x+1)(x-1) + 1 = \underline{\underline{-\frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{3}x + 1}}$ Eine weitaus aufwendigere Methode wäre es gewesen, mit den Koordinaten von 4 aus dem Graphen abgelesenen Punkten ein Gleichungssystem aufzustellen und dieses mit dem Gauß- Algorithmus zu lösen.

A7	Ausführliche Lösung
	$f(x) = -\frac{1}{4}x^3 + cx + d\,;\, g(x) = -3(x-3) = -3x + 9$ g(x) und f(x) schneiden die $y-$Achse in $P_y(0 \mid 9) \Rightarrow d = 9$ Ein weiterer Schnittpunkt von g(x) mit f(x) ist bei $x = -4$ $g(-4) = -3 \cdot (-4) + 9 = 21 \Rightarrow P(-4 \mid 21)$ liegt auf dem Graphen von f(x). $P(-4 \mid 21): f(-4) = -\frac{1}{4}(-4)^3 - 4c + 9 = 21 \Leftrightarrow c = 1$ $\Rightarrow f(x) = -\frac{1}{4}x^3 + x + 9$

A8	Ausführliche Lösung	
	a)	Punktsymmetrie $\Rightarrow f(x) = a_3x^3 + a_1x$ $P_x(3 \mid 0): f(3) = 27a_3 + 3a_1 = 0 \Leftrightarrow 27a_3 + 3a_1 = 0$ $\Leftrightarrow 9a_3 = -a_1$ oder $a_1 = -9a_3$

A8	Ausführliche Lösung	
	b)	$f(2) = 8a_3 + 2a_1 = \frac{32}{9}$ mit $a_1 = -9a_3$ folgt $8a_3 + 2(-9a_3) = \frac{32}{9} \Leftrightarrow a_3 = -\frac{16}{45}$ mit $a_1 = -9a_3$ folgt $a_1 = -9\left(-\frac{16}{45}\right) = \frac{16}{5}$ $f(x) = -\frac{16}{45}x^3 + \frac{16}{5}$