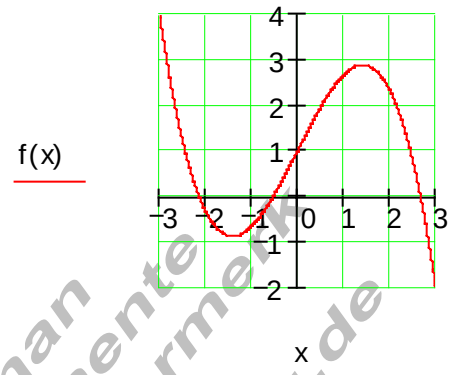
Lösungen ganzrationale Funktionen aus gegebenen Bedingungen I

Ausführliche Lösungen:

A1	Ausführliche Lösung	
	Es existieren 3 Nullstellen (Wertetabelle). Der Graph verläuft von II – III – I – IV. Schnittpunkt mit der y – Achse: $P_y(\ 0 \mid 1\ )$. Punktsymmetrisch zu P(0 | 1). Bemerkung zur Punktsymmetrie: Zwei Punkte, $P_0(\ x_0 \mid y_0\ )$ und $P_1(\ x_1 \mid y_1\ )$ liegen auf dem Graphen von f(x). Liegt der Spiegelpunkt $P_1'(\ x_1' \mid y_1')$ ebenfalls auf dem Graphen, so ist der Graph von f(x) symmetrisch zu $P_0(\ x_0 \mid y_0\ )$	

A2	Ausführliche Lösung	
	a)	Allgemeine Form der Funktionsgleichung $f(x) = a_3x^3 + a_2x^2 + a_1x + a_0$ Aufstellen des Gleichungssystems aus den vorgegebenen Punkten: $P_1(-3 \mid 0{,}5): f(-3) = -27a_3 + 9a_2 - 3a_1 + a_0 = 0{,}5$ $P_2(0 \mid -4): \quad f(0) = a_0 = -4$ $P_3(1 \mid -1{,}5): f(1) = a_3 + a_2 + a_1 + a_0 = 0{,}5$ $P_4(2 \mid -2): f(2) = 8a_3 + 4a_2 + 2a_1 + a_0 = -2$ Wegen $a_0 = -4$ vereinfacht sich das Gleichungssystem. $-27a_3 + 9a_2 - 3a_1 = 4{,}5$ $a_3 + a_2 + a_1 = 2{,}5$ $8a_3 + 4a_2 + 2a_1 = 2$

A2 Ausführliche Lösung

a) Lösung durch den Gauss – Algorithmus:

a_3	a_2	a_1	
1	1	1	2,5
8	4	2	$2\,\text{II} - 8\cdot\text{I}$
–27	9	–3	$4{,}5\,\text{III} + 27\cdot\text{I}$
1	1	1	2,5
0	–4	–6	–18
0	36	24	$72\,\text{III} + 9\cdot\text{II}$
1	1	1	2,5
0	–4	–6	–18
0	0	–30	–90

Berechnung der Koeffizienten:

$-30a_1 = -90$

$\Leftrightarrow a_1 = \frac{-90}{-30} = \underline{\underline{3}}$

$-4a_2 - 6a_1 = -18$

$\Leftrightarrow -4a_2 - 18 = -18$

$\Leftrightarrow a_2 = \frac{-18+18}{-4} = \underline{\underline{0}}$

$a_3 + a_2 + a_1 = 2{,}5$

$\Leftrightarrow a_3 + 3 = 2{,}5$

$\Leftrightarrow a_3 = 2{,}5 - 3 = \underline{\underline{-0{,}5}}$

Damit lautet die Funktionsgleichung: $f(x) = -0{,}5x^3 + 3x - 4$

Um den Funktionsgraphen zeichnen zu können, benötigen wir zu den in der Aufgabenstellung vorgegebenen Punkten einige zusätzliche.
Diese bestimmen wir mit dem HORNER – Schema.

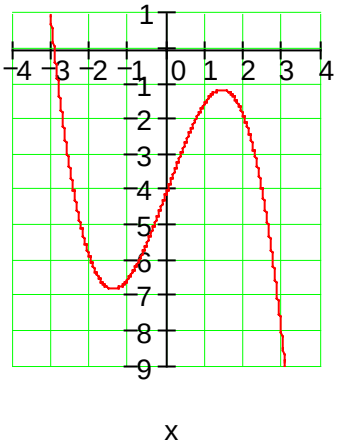
A2 Ausführliche Lösung

a) HORNER – Schema:

$x = -2$	–0,5	0	3	–4
		1	–2	–2
	–0,5	1	1	–6
$x = -1$	–0,5	0	3	–4
		0,5	–0,5	–2,5
	–0,5	0,5	2,5	–6,5
$x = 3$	–0,5	0	3	–4
		–1,5	–4,5	–4,5
	–0,5	–1,5	–1,5	–8,5

Wertetabelle:

x	–3	–2	–1	0
$f(x)$	0,5	–6	–6,5	–4
x	1	2	3	
$f(x)$	–1,5	–2	–8,5	



Schnittpunkt mit der y – Achse:
$P_1(0 \mid -4)$
Es existiert nur eine Nullstelle, sie liegt in der Nähe von x = -3.

A2 Ausführliche Lösung

b) Das Gleichungssystem:

$f(x) = a_3x^3 + a_2x^2 + a_1x + a_0$

$P_1(-3\,|\,44): f(-3) = -27a_3 + 9a_2 - 3a_1 + a_0 = 44$

$P_2(-1\,|\,2): \quad f(-1) = \quad -a_3 + a_2 - a_1 + a_0 \quad = 2$

$P_3(1\,|\,0): \quad f(1) \; = \quad a_3 + a_2 + a_1 + a_0 \quad = 0$

$P_4(2\,|\,-1): \quad f(2) \; = 8a_3 + 4a_2 + 2a_1 + a_0 \quad = -1$

A2 Ausführliche Lösung

b) Der Gauss – Algorithmus

a_0	a_1	a_2	a_3	
1	–3	9	–27	44
1	–1	1	–1	2 II – I
1	1	1	1	0 II – I
1	2	4	8	–1 II – I
1	–3	9	–27	44
0	2	–8	26	–42 | : 2
0	4	–8	28	–44 | : 4
0	5	–5	35	–45 : 5
1	–3	9	–27	44
0	1	–4	13	–21
0	1	–2	7	–11 III – II
0	1	–1	7	–9 IV – II
1	–3	9	–27	44
0	1	–4	13	–21
0	0	2	–6	10 | : 2
0	0	3	–6	12 | : 3
1	–3	9	–27	44
0	1	–4	13	–21
0	0	1	–3	5
0	0	1	–2	4 IV – III
1	–3	9	–27	44
0	1	–4	13	–21
0	0	1	–3	5
0	0	0	1	–1

Die Koeffizienten:

$a_3 = -1$

$a_2 - 3a_3 = 5$

$\Leftrightarrow a_2 + 3 = 5$

$\Leftrightarrow a_2 = 5 - 3 = 2$

$a_1 - 4a_2 + 13a_3 = -21$

$\Leftrightarrow a_1 - 8 - 13 = -21$

$\Leftrightarrow a_1 = -21 + 8 + 13 = 0$

$a_0 - 3a_1 + 9a_2 - 27a_3 = 44$

$\Leftrightarrow a_0 + 18 + 27 = 44$

$\Leftrightarrow a_0 = 44 - 27 - 18 = -1$

Die Funktionsgleichung:

$f(x) = -x^3 + 2x^2 - 1$

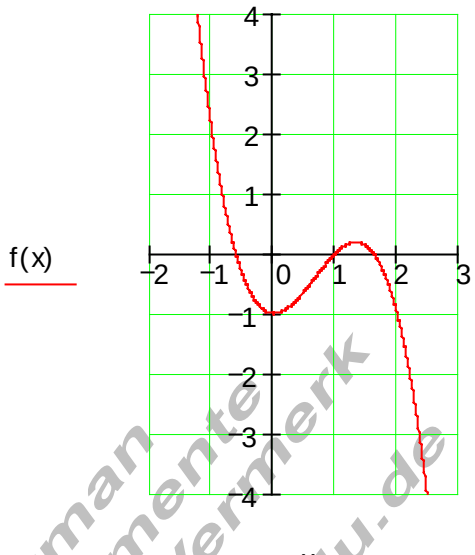
A2 Ausführliche Lösung

b) HORNER – Schema:

	−1	2	0	−1
$x=-2$		2	−8	+16
	−1	4	−8	15
	−1	2	0	−1
$x=1{,}5$		−1,5	0,75	+1,125
	−1	0,5	0,75	0,125
	−1	2	0	−1
$x=3$		−3	−3	−9
	−1	−1	−3	−10

Wertetabelle:

x	−3	−2	−1	0
f(x)	44	15	2	−1
x	1	1,5	2	3
f(x)	0	0,125	−1	−10



A2 Ausführliche Lösung

b) Schnittpunkt mit der y – Achse: $P_y(0\,|\,-1)$

1. Nullstelle wird der Wertetabelle entnommen: $P_{x1}(1\,|\,0)$.

Statt über die Polynomdivision kann man die weiteren Nullstellen über das HORNER – Schema bestimmen. Führt man die Berechnung für den x – Wert einer Nullstelle durch, dann erhält man die Koeffizienten für das Ergebnis der Polynomdivision.

$f(x)=-x^3+2x^2-1$ bekannte Nullstelle: $P_{x1}(1\,|\,0)$

	−1	2	0	−1
$x=1$		−1	1	1
	−1	1	1	0

$$\left(-x^3+2x^2-1\right):(x-1)=-1x^2+1x+1$$

$$\Leftrightarrow x^2-x-1=0 \Rightarrow p=-1;\ q=-1 \Rightarrow D=0{,}25+1=1{,}25$$

$$\Rightarrow x_2=0{,}5+\sqrt{1{,}25}\approx 1{,}62\ ;\ x_3=0{,}5-\sqrt{1{,}25}\approx -0{,}62$$

A3 Ausführliche Lösung

a)

Achsensymmetrie $\Rightarrow f(x) = a_4x^4 + a_2x^2 + a_0$

$P_1(0\,|\,2)$: $f(0) = a_0 = \underline{2}$

$P_2(-2\,|\,0)$: $f(-2) = 16a_4 + 4a_2 + 2 = 0$

$P_3\left(1\,|\,\frac{57}{40}\right)$: $f(1) = 1a_4 + a_2 + 2 = \frac{57}{40}$

Gleichungssystem

$\Rightarrow \quad 16a_4 + 4a_2 = -2$

$1a_4 + 1a_2 = -\frac{23}{40}$

Gauß – Algorithmus

a_4	a_2		
16	4	-2	
1	1	$-\frac{23}{40}$	$\mid \cdot 40$
16	4	-2	
40	40	-23	$II - 10 \cdot I$
16	4	-2	
-120	0	-3	

Berechnung der Koeffizienten

$-120a_4 = -3 \Leftrightarrow a_4 = \frac{1}{40}$

$16a_4 + 4a_2 = -2$

$\Leftrightarrow 16 \cdot \frac{1}{40} + 4a_2 = -2 \Leftrightarrow 4a_2 = -2 - \frac{2}{5} = -\frac{12}{5}$

$\Leftrightarrow a_2 = \frac{-\frac{12}{5}}{4} = -\frac{3}{5}$

Funktionsgleichung: $f(x) = \frac{1}{40}x^4 - \frac{3}{5}x^2 + 2$

A3 Ausführliche Lösung

b)

Achsensymmetrie $\Rightarrow f(x) = a_4x^4 + a_2x^2 + a_0$

$P_1\left(1 \mid \frac{1}{16}\right)$: $f(1) = 1a_4 + 1a_2 + a_0 = \frac{1}{16}$

$P_2(2 \mid -2)$: $f(2) = 16a_4 + 4a_2 + a_0 = -2$

$P_3(-4 \mid 1)$: $f(-4) = 256a_4 + 16a_2 + a_0 = 1$

$\Rightarrow$ Gleichungssystem

$$1a_4 + 1a_2 + a_0 = \frac{1}{16}$$
$$16a_4 + 4a_2 + a_0 = -2$$
$$256a_4 + 16a_2 + a_0 = 1$$

Gauß – Algorithmus

a_0	a_2	a_4		
1	1	1	$\frac{1}{16}$	
1	4	16	-2	II – I
1	16	256	1	III – I
1	1	1	$\frac{1}{16}$	
0	3	15	$-\frac{33}{16}$	
0	15	255	$\frac{15}{16}$	III – 5·II
1	1	1	$\frac{1}{16}$	
0	3	15	$-\frac{33}{16}$	
0	0	180	$\frac{180}{16}$	

Berechnung der Koeffizienten

$$180a_4 = \frac{180}{16} \Leftrightarrow a_4 = \frac{1}{16}$$

$$3a_2 + 15a_4 = -\frac{33}{16}$$

$$\Leftrightarrow 3a_2 + \frac{15}{16} = -\frac{33}{16}$$

$$\Leftrightarrow 3a_2 = -\frac{33}{16} - \frac{15}{16} = -\frac{48}{16} = -3$$

$$\Leftrightarrow a_2 = \frac{-3}{3} = \underline{-1}$$

$$a_0 + a_2 + a_4 = \frac{1}{16}$$

$$\Leftrightarrow a_0 - 1 + \frac{1}{16} = \frac{1}{16} \Leftrightarrow a_0 = \underline{1}$$

Funktionsgleichung: $f(x) = \frac{1}{16}x^4 - x^2 + 1$

A3 Ausführliche Lösung

c)

Achsensymmetrie $\Rightarrow f(x) = a_4x^4 + a_2x^2 + a_0$

$P_1\left(\sqrt{3} \mid -\frac{9}{4}\right)$: $f(\sqrt{3}) = 9a_4 + 3a_2 + a_0 = -\frac{9}{4}$

$P_2\left(\sqrt{2} \mid -2\right)$: $f(\sqrt{2}) = 4a_4 + 2a_2 + a_0 = -2$

$P_3\left(-1 \mid -\frac{5}{4}\right)$: $f(-1) = 1a_4 + 1a_2 + a_0 = -\frac{5}{4}$

$\Rightarrow$ Gleichungssystem

$$9a_4 + 3a_2 + a_0 = -\frac{9}{4}$$
$$4a_4 + 2a_2 + a_0 = -2$$
$$1a_4 + 1a_2 + a_0 = -\frac{5}{4}$$

Gauß – Algorithmus

a_0	a_2	a_4		
1	2	4	-2	
1	3	9	$-\frac{9}{4}$	$\mid \cdot 4$
1	1	1	$-\frac{5}{4}$	$\mid \cdot 4$
1	2	4	-2	
4	12	36	-9	$II - 4 \cdot I$
4	4	4	-5	$III - 4 \cdot I$
1	2	4	-2	
0	4	20	-1	
0	-4	-12	3	$III + II$
1	2	4	-2	
0	4	20	-1	
0	0	8	2	

Berechnung der Koeffizienten

$8a_4 = 2 \Leftrightarrow a_4 = \underline{\frac{1}{4}}$

$4a_2 + 20a_4 = -1$

$\Leftrightarrow 4a_2 + \frac{20}{4} = -1$

$\Leftrightarrow a_2 = \frac{-1-5}{5} = \underline{-\frac{3}{2}}$

$a_0 + 2a_2 + 4a_4 = -2$

$\Leftrightarrow a_0 - 2 \cdot \frac{3}{2} + 4 \cdot \frac{1}{4} = -2$

$\Leftrightarrow a_0 = -2 + 3 - 1 = \underline{0}$

Funktionsgleichung: $f(x) = \frac{1}{4}x^4 - \frac{3}{2}x^2$

A3 Ausführliche Lösung

d)

Achsensymmetrie $\Rightarrow f(x) = a_4x^4 + a_2x^2 + a_0$

$P_1\left(0 \mid \frac{3}{2}k\right)$: $f(0) = a_0 = \frac{3}{2}k$

$P_2\left(\sqrt{k} \mid \frac{16}{9}k\right)$: $f\left(\sqrt{k}\right) = k^2a_4 + ka_2 + \frac{3}{2}k = \frac{16}{9}k$

$P_3\left(\sqrt{3k} \mid 2k\right)$: $f\left(\sqrt{3k}\right) = 9k^2a_4 + 3ka_2 + \frac{3}{2}k = 2k$

Gleichungssystem

$\Rightarrow$ $k^2a_4 + ka_2 = \frac{5}{18}k$

$9k^2a_4 + 3ka_2 = \frac{1}{2}k$

Gauß – Algorithmus

a_4	a_2		
k^2	k	$\frac{5}{18}k$	$\mid\cdot 18$
$9k^2$	$3k$	$\frac{1}{2}k$	$\mid\cdot 2$
$18k^2$	$18k$	$5k$	
$18k^2$	$6k$	k	$II - I$
$18k^2$	$18k$	$5k$	
0	$-12k$	$-4k$	

Berechnung der Koeffizienten

$-12ka_2 = -4k \Leftrightarrow a_2 = \frac{-4k}{-12k} = \frac{1}{3}$

$18k^2a_4 + 18ka_2 = 5k$

$\Leftrightarrow 18k^2a_4 + 6k = 5k$

$\Leftrightarrow a_4 = \frac{5k - 6k}{18k^2} = -\frac{1}{18k}$

Funktionsgleichung: $f(x) = -\frac{1}{18k}x^4 + \frac{1}{3}x^2 + \frac{3}{2}k$

A4 Ausführliche Lösung

a) Das Gleichungssystem

$f(x) = a_4x^4 + a_3x^3 + a_2x^2 + a_1x + a_0$

$P_1(0 \mid 0)$: $f(0) = \boxed{a_0 = 0}$

$P_2(1 \mid 2{,}5)$: $f(1) = 1a_4 + 1a_3 + 1a_2 + 1a_1 = 2{,}5$

$P_3(-2 \mid -14)$: $f(-2) = 16a_4 - 8a_3 + 4a_2 - 2a_1 = -14$

$P_4(2 \mid 6)$: $f(2) = 16a_4 + 8a_3 + 4a_2 + 2a_1 = 6$

$P_5(-1 \mid -8{,}5)$: $f(-1) = 1a_4 - 1a_3 + 1a_2 - 1a_1 = -8{,}5$

A4 Ausführliche Lösung

a) Der Gauß- Algorithmus

a_4	a_3	a_2	a_1	
1	1	1	1	2,5
16	–8	4	–2	$-14\,\text{II}-16\cdot\text{I}$
16	8	4	2	$6\,\text{III}-16\cdot\text{I}$
1	–1	1	–1	$-8{,}5\,\text{IV}-\text{I}$
1	1	1	1	2,5
0	–24	–12	–18	–54
0	–8	–12	–14	–34
0	–2	0	–2	$-11\,\vert\cdot(-1)\overset{z_2}{\underset{z_4}{\rightleftarrows}}$
1	1	1	1	2,5
0	2	0	2	11
0	–8	–12	–14	$-34\,\text{III}+4\cdot\text{II}$
0	–24	–12	–18	$-54\,\text{IV}+12\cdot\text{II}$
1	1	1	1	2,5
0	2	0	2	11
0	0	–12	–6	10
0	0	–12	6	$78\,\text{IV}-\text{III}$
1	1	1	1	2,5
0	2	0	2	11
0	0	–12	–6	10
0	0	0	12	68

$12a_1 = 68$

$\Leftrightarrow a_1 = \frac{68}{12} = \underline{\frac{17}{3}}$

$-12a_2 - 6a_1 = 10$

$\Leftrightarrow -12a_2 = 10 + \frac{6\cdot 17}{3} = 44$

$\Leftrightarrow a_2 = \frac{44}{-12} = \underline{-\frac{11}{3}}$

$2a_3 + 2a_1 = 11$

$\Leftrightarrow 2a_3 = 11 - \frac{2\cdot 17}{3} = -\frac{11}{3}$

$\Leftrightarrow a_3 = \underline{-\frac{11}{6}}$

$a_4 + a_3 + a_2 + a_1 = 2{,}5 = \frac{5}{2}$

$\Leftrightarrow a_4 = \frac{5}{2} + \frac{1}{6} + \frac{11}{3} - \frac{17}{3} = \underline{\frac{2}{3}}$

Funktionsgleichung:

$f(x) = \frac{2}{3}x^4 - \frac{1}{6}x^3 - \frac{11}{3}x^2 + \frac{17}{3}x$

A4 Ausführliche Lösung

b) $f(x) = a_4x^4 + a_3x^3 + a_2x^2 + a_1x + a_0$

$P_1(0\,|\,-4)$: $f(0) = \boxed{a_0 = -4}$

$P_2(-2\,|\,-4)$: $f(-2) = 16a_4 - 8a_3 + 4a_2 - 2a_1 - 4 = -4$

$P_3(2\,|\,12)$: $f(2) = 16a_4 + 8a_3 + 4a_2 + 2a_1 - 4 = 12$

$P_4(1\,|\,-2{,}5)$: $f(1) = 1a_4 + a_3 + a_2 + a_1 - 4 = -2{,}5$

$P_5(-1\,|\,-4{,}5)$: $f(-1) = 1a_4 - 1a_3 + 1a_2 - 1a_1 = -4{,}5$

Gleichungssystem:

$16a_4 - 8a_3 + 4a_2 - 2a_1 = 0$

$16a_4 + 8a_3 + 4a_2 + 2a_1 = 16$

$1a_4 + 1a_3 + 1a_2 + 1a_1 = 1{,}5$

$1a_4 - 1a_3 + 1a_2 - 1a_1 = -0{,}5$

A4 Ausführliche Lösung

b) Gauß- Algorithmus

Die Gleichungen können in beliebiger Reihenfolge eingesetzt werden.

a_4	a_3	a_2	a_1		
1	1	1	1	1,5 | ·2	
1	–1	1	–1	–0,5 I·2	
16	8	4	2	16 I : 2	
16	–8	4	–2	0 | : 2	$6a_1 = 0$
2	2	2	2	3	$\Leftrightarrow a_1 = 0$
2	–2	2	–2	–1 II – I	
8	4	2	1	8 III – I	$-6a_2 = 0$
8	–4	2	–1	0 IV – I	$\Leftrightarrow a_2 = 0$
2	2	2	2	3	
0	–4	0	–4	–4	$-4a_3 = -4$
0	–4	–6	–7	–4 III – II	$\Leftrightarrow a_3 = 1$
0	–12	–6	–9	–12 IV – 3·II	
2	2	2	2	3	$2a_4 + 2a_3 = 3 \Leftrightarrow 2a_4 = 3 - 2 = 1$
0	–4	0	–4	–4	$\Leftrightarrow a_4 = \frac{1}{2}$
0	0	–6	–3	0	
0	0	–6	3	0 IV – III	Funktionsgleichung:
2	2	2	2	3	$f(x) = \frac{1}{2}x^4 + x^3 - 4$
0	–4	0	–4	–4	
0	0	–6	–3	0	
0	0	0	6	0	

A5 Ausführliche Lösung

$P_1(0\,|\,0)$ ist Sattelpunkt $\Rightarrow$ 3 – fache Nullstelle

$P_x(3\,|\,0)$ ist einfache Nullstelle

$\Rightarrow$ Ansatz: $f(x) = a_4x^3(x-3)$

$P_2(2\,|\,-2): f(2) = -2 \Leftrightarrow a_4 \cdot 2^3(2-3) = -2 \Leftrightarrow -8a_4 = -2 \Leftrightarrow a_4 = \frac{1}{4}$

Funktionsgleichung: $f(x) = \frac{1}{4}x^3(x-3) = \frac{1}{4}x^4 - \frac{3}{4}x^3$

A6 Ausführliche Lösung

Achsensymmetrie $\Rightarrow f(x) = a_4x^4 + a_2x^2 + a_0$

$P_y(0\,|\,2) \Rightarrow \boxed{a_0 = 2}$

$P_1\left(\sqrt{6}\,|\,2\right): f\left(\sqrt{6}\right) = 35a_4 + 6a_2 + 2 = 2$

$P_1(1\,|\,0{,}75): f(1) = 1a_4 + 1a_2 + 2 = 0{,}75$

$\Rightarrow \quad 36a_4 + 6a_2 = 0$

$1a_4 + 1a_2 = -1{,}25$

a_4	a_2		
36	6	0	
1	1	$-1{,}25$	$\mid\cdot(-36)$
36	6	0	
-36	-36	45	II + I
36	6	0	
0	-30	45	

$-30a_2 = 45 \Leftrightarrow a_2 = \frac{45}{-30} = -\frac{3}{2} = \underline{-1{,}5}$

$36a_4 + 6a_2 = 0$

$\Leftrightarrow 36a_4 = -6a_2 = \frac{6 \cdot 3}{2} = 9$

$\Leftrightarrow a_4 = \frac{9}{36} = \frac{1}{4} = \underline{\underline{0{,}25}}$

$\underline{\underline{f(x) = 0{,}25x^4 - 1{,}5x^2 + 2}}$

$g(x) = 0{,}25x^2\left(x^2 - 6\right) = 0{,}25x^4 - 1{,}5x^2$

$g(x) = f(x) - 2$

Die Funktion g(x) entsteht aus f(x) durch Verschiebung um 2 LE nach unten.

A7 Ausführliche Lösung

Wir bestimmen die Funktionsgleichung für f*(x) mit der Bedingung 3 fache Nullstelle in $x_1 = 0$ und einfache Nullstelle in $x_2 = 2$.
Danach verschieben wir den Graphen um 3 LE nach oben bzw. nach unten, denn eine Parallele zur x – Achse vom Abstand 3 kann sowohl oberhalb als auch unterhalb der x – Achse verlaufen.

Ansatz : $f^*(x) = a_4x^3(x-2)$

Verschiebung um 3 LE nach oben liefert: $f_1(x) = a_4x^3(x-2) + 3$

Verschiebung um 3 LE nach unten liefert: $f_1(x) = a_4x^3(x-2) - 3$

z.B für $a_4 = 1$ gilt: $f_1(x) = x^3(x-2) + 3 = x^4 - 2x^3 + 3$

$f_2(x) = x^3(x-2) - 3 = x^4 - 2x^3 - 3$

A8 Ausführliche Lösung

a) Der Graph der Funktion $g(x) = -x^3 + 3x$ ist symmetrisch zum Ursprung.
Eine Verschiebung um 2 LE nach oben ergibt $f(x) = g(x) + 2 = -x^3 + 3x + 2$
$\Rightarrow$ f(x) ist symmetrisch zu $P(0\,|\,2)$

A8	Ausführliche Lösung		
	b)	Nullstellen von $f(x)=-x^3+3x+2$: 1. Nullstelle durch raten: $f(2)=-8+6+2=0 \Rightarrow P_{x1}(2\,|\,0)$ Polynomdivision: $(-x^3+3x+2):(x-2)=-x^2-2x-1$ $\Rightarrow x^2+2x+1=0$ $\Leftrightarrow (x+1)^2=0$ I. binomische Formel $\Rightarrow x_{2/3}=-1 \Rightarrow P_{x2/3}(-1\,|\,0)$ ist Berührungspunkt. $f(x)>0$ für $I=\{x\,|\,-1<x<2\}_{\mathbb{R}}$