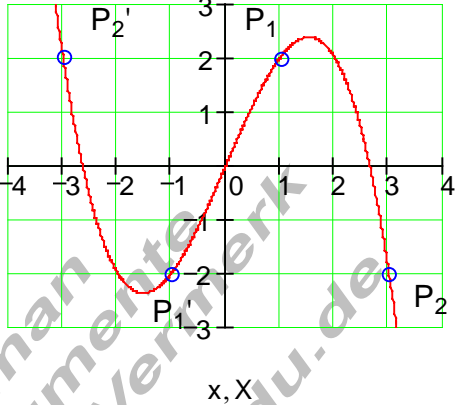
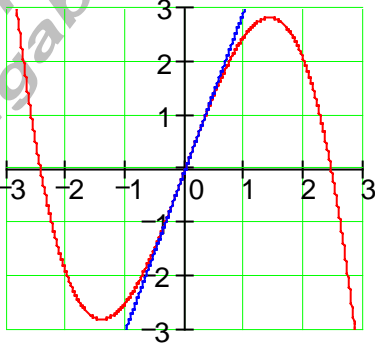
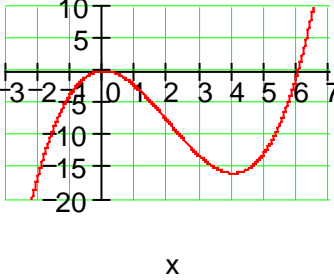


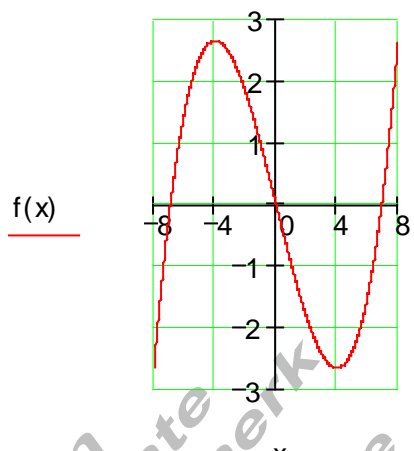
## Lösungen Achsenschnittpunkte und Graphen ganzrationaler Funktionen II

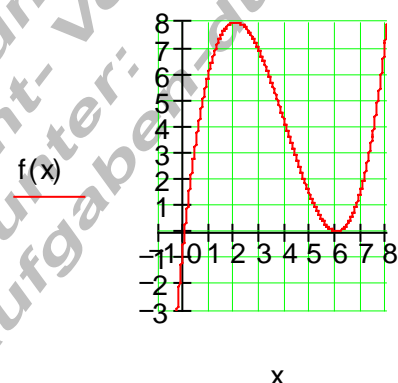
### Ausführliche Lösungen:

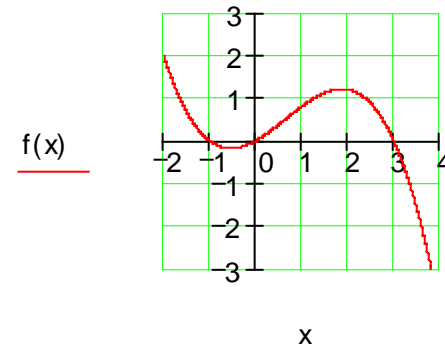
A1	<p><b>Ausführliche Lösung</b></p> <p>a) Symmetrie zum Ursprung bedeutet Punktsymmetrie.</p> $f(-x) = -f(x)$ $P_1(1 2): f(-1) = -f(1) = -2$ $\Rightarrow P_1'(-1 -2)$ $P_2(3 -2): f(-3) = -f(3) = 2$ $\Rightarrow P_2'(-3 2)$ <p>Mit diesen 4 Punkten lässt sich der Graph skizzieren</p>	
A1	<p><b>Ausführliche Lösung</b></p> <p>b) Der Graph ist punktsymmetrisch. Die Steigung des Graphen im Nullpunkt ist gleich der Steigung der Geraden <math>g(x) = 3x</math>.</p> <p>Der Graph durchläuft die Quadranten in der Reihenfolge</p> <p>II – III – I – IV</p>	
A2	<p><b>Ausführliche Lösung</b></p> <p>a) <math>f(x) = \frac{1}{2}x^3 - 3x^2 \Rightarrow</math> keine Symmetrie</p> $f(x) = 0 \Leftrightarrow x^2 \left( \frac{1}{2}x - 3 \right) = 0$ $\Rightarrow x_{1/2} = 0; x_3 = 6$ <p><math>P_{x1/2}(0 0)</math> Berührungspunkt</p> <p><math>P_{x3}(6 0)</math></p> <p>Verlauf: III – IV – I</p>	

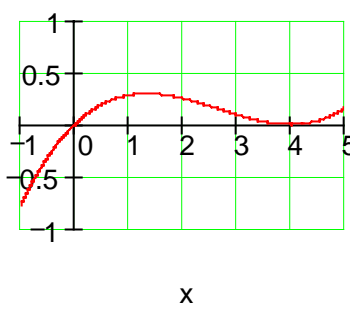
A2	<b>Ausführliche Lösung</b>	
	<p>b)</p> $f(x) = x^3 - \frac{4}{3}x^2 + \frac{1}{3}x$ <p><math>\Rightarrow</math> keine Symmetrie</p> $f(x) = 0 \Leftrightarrow x \left( x^2 - \frac{4}{3}x + \frac{1}{3} \right) = 0$ <p><math>\Rightarrow x_1 = 0; x_2 = \frac{1}{3}; x_3 = 1</math></p> <p><math>P_x(0 0); P_{x_2}\left(\frac{1}{3} 0\right); P_{x_3}(1 0)</math></p> <p>Verlauf: III – I – IV – I</p>	

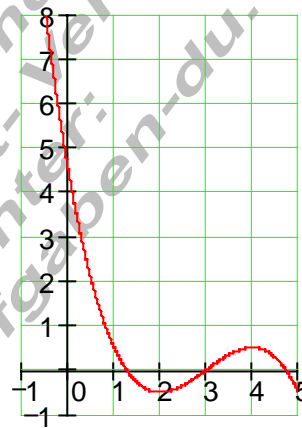
A2	<b>Ausführliche Lösung</b>	
	<p>c)</p> $f(x) = \frac{1}{4}x^3 - \frac{3}{4}x^2 + 5$ <p><math>\Rightarrow</math> keine Symmetrie</p> <p>1. Nullstelle durch probieren:</p> $f(-2) = -\frac{8}{4} - \frac{12}{4} + 5 = 0$ <p><math>\Rightarrow x_1 = -2</math></p> <p>Polynomdivision:</p> $\left( \frac{1}{4}x^3 - \frac{3}{4}x^2 + 5 \right) : (x+1)$ $= \frac{1}{4}x^2 - \frac{5}{4}x + \frac{10}{4}$ <p><math>\Rightarrow f(x) = (x+2) \left( \frac{1}{4}x^2 - \frac{5}{4}x + \frac{10}{4} \right)</math></p> $= \frac{1}{4}(x+2)(x^2 - 5x + 10)$ <p><math>x^2 - 5x + 10 = 0</math></p> <p><math>\Rightarrow p = -5; q = 10</math></p> <p><math>\Rightarrow D = 6,25 - 10 &lt; 0</math></p> <p><math>\Rightarrow</math> keine Lösung</p> <p><math>\Rightarrow</math> keine weitere Nullstelle</p>	

A2	<b>Ausführliche Lösung</b>	
	<p>d)</p> $f(x) = \frac{1}{48}x^3 - x \Rightarrow \text{Punktsymmetrie}$ $f(x) = 0 \Leftrightarrow x \left( \frac{1}{48}x^2 - 1 \right) = 0$ $\Rightarrow x_1 = 0; x_2 = \sqrt{48}; x_3 = -\sqrt{48}$ $P_x(0 0); P_{x_2}(\sqrt{48} 0); P_{x_3}(-\sqrt{48} 0)$ <p>Verlauf: III – II – IV – I</p>	

A2	<b>Ausführliche Lösung</b>	
	<p>e)</p> $f(x) = \frac{1}{4}x^3 - 3x^2 + 9x \Rightarrow \text{keine Symmetrie}$ $f(x) = 0 \Leftrightarrow x \left( \frac{1}{4}x^2 - 3x + 9 \right) = 0 \Rightarrow x_1 = 0$ $\frac{1}{4}x^2 - 3x + 9 = 0 \Leftrightarrow x^2 - 12x + 36 = 0$ $\Rightarrow p = -12; q = 36 \Rightarrow D = 0 \Rightarrow x_{2/3} = 6$ $P_{x_1}(0 0); P_{x_{2/3}}(6 0) \text{ Berührungspunkt}$ <p>Verlauf: III – I</p>	

A2	<b>Ausführliche Lösung</b>	
	<p>f)</p> $f(x) = \frac{1}{5}x(3-x)(x+1)$ $= -\frac{1}{5}x^3 + \frac{2}{5}x^2 + \frac{3}{5}x$ <p><math>\Rightarrow</math> keine Symmetrie</p> $x_1 = -1; x_2 = 0; x_3 = 3$ $P_{x_1}(-1 0); P_{x_2}(0 0); P_{x_3}(3 0)$ <p>Verlauf: II – III – I – IV</p>	

A2	<b>Ausführliche Lösung</b>
g)	$f(x) = \frac{1}{5}x \left( \frac{1}{4}x - 1 \right)^2$ $= -\frac{1}{32}x^3 - \frac{1}{4}x^2 + \frac{1}{2}x$ <p>⇒ keine Symmetrie</p> $x_1 = 0; x_{2/3} = 4$ $P_{x_1}(0 0)$ $P_{x_{2/3}}(4 0) \text{ Berührungspunkt}$ <p>Verlauf: III – I</p>
	

A2	<b>Ausführliche Lösung</b>
h)	$f(x) = -\frac{1}{4}x^3 + \frac{9}{4}x^2 - 6x + \frac{9}{2}$ <p>⇒ keine Symmetrie</p> <p>1. Nullstelle durch probieren:</p> $f(3) = -\frac{27}{4} + \frac{81}{4} - 18 + \frac{9}{2} = 0$ <p>⇒ <math>x_1 = 3</math></p> <p>Polynomdivision:</p> $\left( -\frac{1}{4}x^3 + \frac{9}{4}x^2 - 6x + \frac{9}{2} \right) : (x-3)$ $= -\frac{1}{4}x^2 + \frac{3}{2}x - \frac{3}{2}$ <p>⇒ <math>f(x) = (x-3) \left( -\frac{1}{4}x^2 + \frac{3}{2}x - \frac{3}{2} \right)</math></p> $= -\frac{1}{4}(x-3)(x^2 - 6x + 6)$ $x^2 - 6x + 6 = 0$
	
	$\Rightarrow p = -6; q = 6 \Rightarrow D = 3$ $\Rightarrow x_2 = 3 + \sqrt{3}; x_3 = 3 - \sqrt{3}$ <p>⇒ <math>P_{x_1}(3 0)</math></p> $P_{x_2}(3 + \sqrt{3} 0); P_{x_3}(3 - \sqrt{3} 0)$ <p>Verlauf: II – I – IV – I – IV</p>

A3	<p><b>Ausführliche Lösung</b></p> <p>a) <math>f(x) = x^3 - 3x^2 + 6</math>  <math>f(-2) = -8 - 12 + 6 = -14</math>  <math>f(-1) = -1 - 3 + 6 = 2</math></p> <p>Der Vorzeichenwechsel bei den Funktionswerten bedeutet, dass im Intervall <math>(-2; -1)</math> eine Nullstelle liegen muss.</p> <p>Eine ganzrationale Funktion 3. Grades hat mindestens eine Nullstelle. Da der Tiefpunkt des Graphen von <math>f(x)</math> oberhalb der <math>x</math>-Achse liegt, kann er nur eine Nullstelle haben.</p> <p>Soll der Graph <math>g(x)</math> genau zwei Nullstellen haben, so muss der Graph von <math>f(x)</math> um 2 LE oder um 6 LE nach unten verschoben werden.</p> <p>Es existieren also 2 Möglichkeiten:</p> <ol style="list-style-type: none"> <li><math>g_1(x) = f(x) - 2 = x^3 - 3x^2 + 4</math></li> <li><math>g_2(x) = f(x) - 6 = x^3 - 3x^2</math></li> </ol>	<p><math>f(x) := x^3 - 3x^2 + 6</math>  <math>g_1(x) := x^3 - 3x^2 + 4</math>  <math>g_2(x) := x^3 - 3x^2</math></p>
----	--	--

A3	<p><b>Ausführliche Lösung</b></p> <p>b)</p>	<p>Dreiecksfläche: <math>A = \frac{g \cdot h}{2}</math></p> <p>In Abhängigkeit von <math>u</math>  mit <math>g = u</math> und <math>h = f(u)</math> gilt:</p> $A(u) = \frac{u \cdot f(u)}{2}$ <p>Für <math>u = 2</math> ist <math>f(u) = f(2) = 2</math></p> $\Rightarrow A = \frac{2 \cdot 2}{2} = \underline{\underline{2 \text{ FE}}}$ <p>Allgemein für <math>u &gt; 0</math> gilt:</p> $A(u) = \frac{1}{2} u \cdot f(u)$ $= \frac{1}{2} u (u^3 - 3u^2 + 6)$ $= \underline{\underline{\underline{\frac{1}{2} u^4 - \frac{3}{2} u^3 + 3u}}}}$
----	---	---

A3	Ausführliche Lösung	
	c)	Die Funktion $g(x) = 3f(x)$ hat die gleichen Nullstellen wie $f(x)$ . Begründung: $f(x) = 0 \Rightarrow \underbrace{3 \cdot f(x)}_{g(x)} = 0 \Rightarrow g(x) = 0$

A4	Ausführliche Lösung	
		<p><math>f(x) = 5x^3 - 10,8x + 4</math> Behauptung: <math>x = 0,4</math> ergibt eine Nullstelle, also <math>f(0,4) = 0</math></p> <p>Beweis : <math>f(0,4) = 5 \cdot 0,4^3 - 10,8 \cdot 0,4 + 4 = 0,32 - 4,32 + 4 = 0</math></p> <p>Polynomdivision:</p> $\begin{array}{r} (5x^3 - 10,8x + 4) : (x - 0,4) = 5x^2 + 2x - 10 \\ \underline{-(5x^3 - 2x^2)} \phantom{+ 4} \\ 2x^2 - 10,8x \phantom{+ 4} \\ \underline{-(2x^2 - 0,8x)} \\ -10x + 4 \\ \underline{-(-10x + 4)} \end{array} \quad \Rightarrow 5x^2 + 2x - 10 = 0 \Leftrightarrow x^2 + 0,4x - 2 = 0$ <p style="margin-left: 150px;"><math>p = 0,4 ; q = -2 \Rightarrow D = 2,04</math></p> <p style="margin-left: 150px;"><math>\Rightarrow x_2 = -0,2 + \sqrt{2,04} \approx \underline{\underline{1,23}}</math></p> <p style="margin-left: 150px;"><math>\Rightarrow x_3 = -0,2 - \sqrt{2,04} \approx \underline{\underline{-1,63}}</math></p>

A5	Ausführliche Lösung	
		<p><math>f(x) = x^3 + 2x^2 + 2cx = x(x^2 + 2x + 2c)</math></p> <p>Es können maximal 3 Nullstellen auftreten. <math>P(0   0)</math> ist unabhängig von <math>c</math> immer Nullstelle. Zu untersuchen ist also der Klammerausdruck.</p> <p><math>x^2 + 2x + 2c = 0 \Rightarrow p = 2 ; q = 2c \Rightarrow D = 1 - 2c</math></p> <p>für <math>D &gt; 0 \Rightarrow 1 - 2c &gt; 0 \Leftrightarrow c &lt; 0,5</math></p> <p>für <math>D = 0 \Rightarrow 1 - 2c = 0 \Leftrightarrow c = 0,5 \Rightarrow x_{2/3} = -1</math></p> <p>für <math>D &lt; 0 \Rightarrow 1 - 2c &lt; 0 \Leftrightarrow c &gt; 0,5</math></p> <p>für <math>c = 0 \Leftrightarrow x^2 + 2x = 0 \Leftrightarrow x(x+2) = 0 \Rightarrow x_2 = 0 ; x_3 = -2</math></p> <p>Zusammenfassung: Für <math>c &gt; 0,5</math> hat <math>f(x)</math> genau eine Nullstelle: <math>P_x(0   0)</math>. Für <math>c = 0,5</math> oder <math>c = 0</math> hat <math>f(x)</math> genau zwei Nullstellen Für <math>c &lt; 0,5</math> und <math>c</math> ungleich Null hat <math>f(x)</math> genau drei Nullstellen.</p>