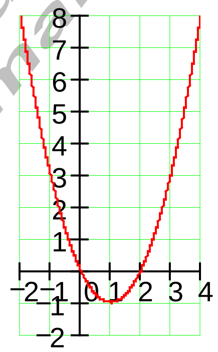
Lösungen quadratische Funktionen zur Vorbereitung einer Klassenarbeit II

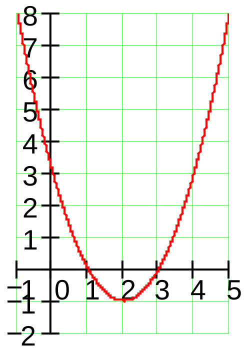
Ergebnisse:

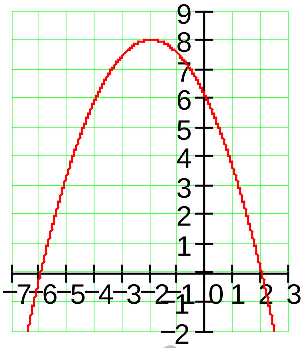
E1	Ergebnisse			
	a)	$x_1 = -2 \qquad x_2 = 2$	b)	$x_1 = -\frac{1}{9} \qquad x_2 = \frac{1}{9}$
	c)	$x_1 = -\sqrt{\frac{1}{2}} \qquad x_2 = \sqrt{\frac{1}{2}}$	d)	$x_1 = 0 \qquad x_2 = -4$
	e)	$x_1 = 0 \qquad x_2 = 6$	f)	$x_1 = 0 \qquad x_{2/3} = -1$

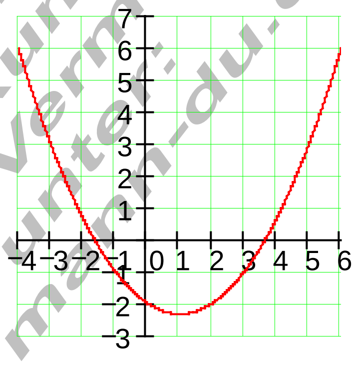
E2	Ergebnis
	D < 0 bedeutet, die Gleichung hat keine Lösung.

E3	Ergebnisse	
	a)	$x_1 = -4 + \sqrt{\frac{88}{5}} \approx 0{,}195 \qquad x_2 = -4 - \sqrt{\frac{88}{5}} \approx -8{,}195$
	b)	$x_{1/2} = -2$ doppelte Nullstelle

E4	Ergebnis		
	a)	Scheitelpunkt: $S(1 \mid -1)$ Nullstellen: $x_1 = 0 \quad \vee \quad x_2 = 2$ $P_{x_1}(0 \mid 0) \quad P_{x_2}(2 \mid 0)$ y - Abschnitt: $P_y(0 \mid 0)$	

E4	Ergebnis		
	b)	Scheitelpunkt: $S(2 \mid -1)$ Nullstellen: $x_1 = 1 \quad \vee \quad x_2 = 3$ $P_{x_1}(1 \mid 0) \quad P_{x_2}(3 \mid 0)$ y - Abschnitt: $P_y(0 \mid 3)$	

E5	Ergebnis	
a)	Achsenschnittpunkte: $P_y(0\,|\,6)$; $P_{x1}(2\,|\,0)$; $P_{x2}(-6\,|\,0)$ Scheitelpunkt: $S(-2\,|\,8)$ Scheitelpunktform: $f(x)=-\frac{1}{2}(x+2)^2+8$ Normalparabel, um den Faktor ½ gestaucht und nach unten geöffnet. Verschiebung um 2 EH nach links. Verschiebung um 8 EH nach oben.	

E5	Ergebnis	
b)	Achsenschnittpunkte: $P_y(0\,|\,-2)$ $P_{x1}\left(1+\sqrt{7}\approx 3{,}646\,|\,0\right)$ $P_{x2}\left(1-\sqrt{7}\approx -1{,}646\,|\,0\right)$ Scheitelpunkt: $S\left(1\,|\,-\frac{7}{3}\right)$ Scheitelpunktform: $f(x)=\frac{1}{3}(x-1)^2-\frac{7}{3}$ Normalparabel, um den Faktor 1/3 gestaucht und nach oben geöffnet. Verschiebung um 1 EH nach rechts. Verschiebung um 7/3 EH nach unten.	

E6	Ergebnisse
a)	Bei einer Geschwindigkeit von 80,36 km/h ist der Verbrauch 7 Liter/100 km.
b)	Bei einer Geschwindigkeit von 45 km/h ist der Verbrauch mit 4,5 Liter/ 100 km am geringsten.

E7	Ergebnisse		
a)	Normalparabel verschoben um 2 EH nach links, um 9 EH nach unten, nach oben geöffnet. $S(-2\,|\,-9)$	b)	Normalparabel verschoben um 4 EH nach rechts, um 3 EH nach unten, nach oben geöffnet, um den Faktor ½ gestaucht. $S(4\,|\,-3)$

E7	Ergebnisse			
	c)	Normalparabel verschoben um 3/2 EH nach rechts, um 5/4 EH nach oben, nach unten geöffnet, um den Faktor 7/3 gestreckt. $S\left(\frac{3}{2} \middle| \frac{5}{4}\right)$	d)	Normalparabel verschoben um 3/4 EH nach links, um 1/3 EH nach unten, nach unten geöffnet, um den Faktor 4 gestreckt. $S\left(-\frac{3}{4} \middle| -\frac{1}{3}\right)$

E8	Ergebnisse			
	a)	$f(3) = -7$ ist der kleinste Wert	b)	$f\left(\frac{1}{2}\right) = -\frac{47}{8}$ ist der größte Wert.

E9	Ergebnis
	Für $\underline{\underline{a = 4{,}5\ \text{cm}}}$ und $\underline{\underline{b = 4{,}5\ \text{cm}}}$ hat das Rechteck den größten Flächeninhalt $A = a \cdot b = 4{,}5\ \text{cm} \cdot 4{,}5\ \text{cm} = \underline{\underline{20{,}25\ \text{cm}^2}}$. Das ist ein Quadrat.

Ausführliche Lösungen:

A1	Ausführliche Lösungen		
a)	$4x^2-16=0 \mid +16$ $\Leftrightarrow 4x^2=16 \mid :4$ $\Leftrightarrow x^2=4 \mid \sqrt{\ }$ $\Leftrightarrow x_{1/2}=\pm 2$	b)	$1-81x^2=0 \mid -1$ $\Leftrightarrow -81x^2=-1 \mid \cdot(-1)$ $\Leftrightarrow 81x^2=1 \mid :81$ $\Leftrightarrow x^2=\frac{1}{81} \mid \sqrt{\ } \Leftrightarrow x_{1/2}=\pm\frac{1}{9}$
c)	$x^2-\frac{1}{2}=0 \mid +\frac{1}{2}$ $\Leftrightarrow x^2=\frac{1}{2} \mid \sqrt{\ } \Leftrightarrow x_{1/2}=\pm\sqrt{\frac{1}{2}}$	d)	$x^2+4x=0$ $\Leftrightarrow x(x+4)=0$ $\Leftrightarrow x_1=0 \quad x_2=-4$
e)	$x^2-6x=0$ $\Leftrightarrow x(x-6)=0$ $\Leftrightarrow x_1=0 \quad x_2=6$	f)	$(x-1)(x+1)^2=0$ $\Leftrightarrow (x-1)(x+1)(x+1)$ $\Leftrightarrow x_1=0 \quad x_{2/3}=-1$

A2	Ausführliche Lösung
	$-24-x=6x^2+23x+12 \mid +24+x$ $\Leftrightarrow \quad 6x^2+24x+36=0 \mid :6$ $\Leftrightarrow \quad x^2+4x+6=0$ $p=4 \quad q=6 \quad D=\left(\frac{p}{2}\right)^2-q=4-6=-2 \Rightarrow$ $\underline{\underline{\text{keine Lösung}}}$

A3	Ausführliche Lösung	
	a)	$\frac{1}{4}x^2+2x-\frac{2}{5}=0 \mid \cdot 4$ $\Leftrightarrow \quad x^2+8x-\frac{8}{5}=0$ $p=8 \quad q=-\frac{8}{5} \Rightarrow D=\left(\frac{p}{2}\right)^2-q=16+\frac{8}{5}=\frac{88}{5} \Rightarrow$ zwei Lösungen $x_{1/2}=-\frac{p}{2}\pm\sqrt{D} \;\Bigg\vert\; \begin{array}{l} x_1=-4+\sqrt{\frac{88}{5}}\approx 0{,}195 \\ x_2=-4-\sqrt{\frac{88}{5}}\approx -8{,}195 \end{array}$

A3 Ausführliche Lösung

b)

$$0 = 0{,}1x^2 + 0{,}4x + 0{,}4 \;|\cdot 10$$

$$\Leftrightarrow \quad x^2 + 4x + 4 = 0$$

$$p = 4 \quad q = 4 \Rightarrow D = \left(\frac{p}{2}\right)^2 - q = 4 - 4 = 0 \Rightarrow \text{eine doppelte Lösung}$$

$$x_{1/2} = -\frac{p}{2} = -\frac{4}{2} = \underline{\underline{-2}}$$

A4 Ausführliche Lösung

a) Berechnung:

$$f(x) = (x-1)^2 - 1 \text{ Scheitelpunktform } \Rightarrow \underline{\underline{S(1\,|-1)}}$$

$$f(0) = (0-1)^2 - 1 = 1 - 1 = 0 \Rightarrow \underline{\underline{P_y(0\,|\,0)}}$$

$$f(x) = 0 \Leftrightarrow (x-1)^2 - 1 = 0 \;|+1$$

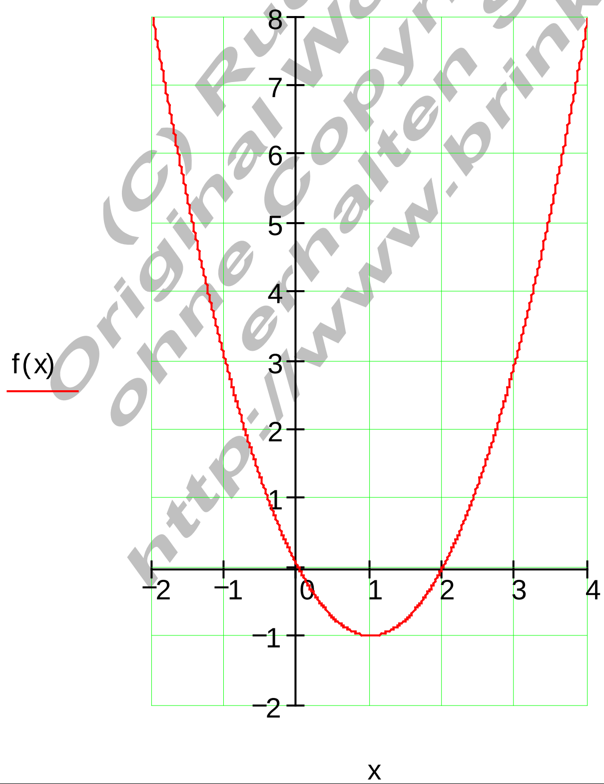
$$\Leftrightarrow (x-1)^2 = 1 \;|\sqrt{} \Leftrightarrow |x-1| = \sqrt{1} = 1$$

$$\Leftrightarrow x - 1 = 1 \;|+1 \Leftrightarrow x_1 = 2 \qquad x - 1 = -1 \;|+1 \Leftrightarrow x_2 = 0$$

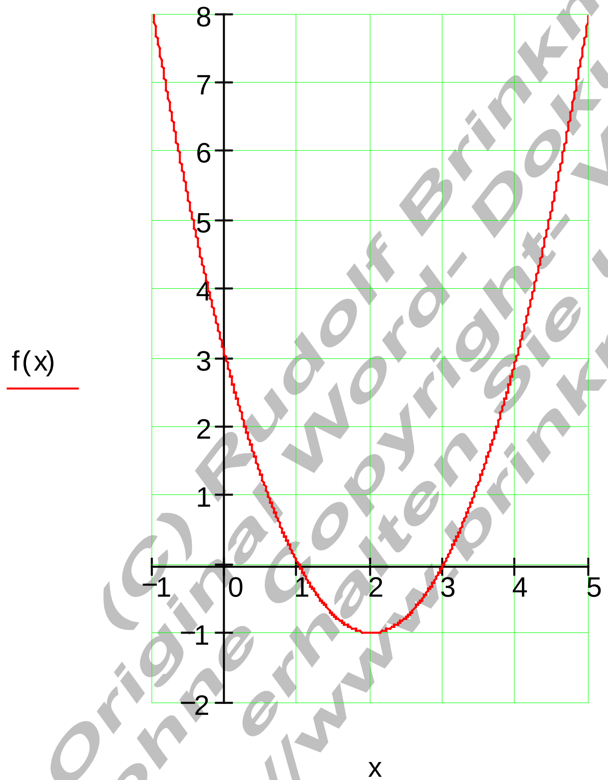
$$\Rightarrow \underline{\underline{P_{x1}(2\,|\,0)}} \qquad \underline{\underline{P_{x2}(0\,|\,0)}}$$

A4 Ausführliche Lösung

a) Der Graph:



A4	Ausführliche Lösung	
	b)	Berechnung:
		$f(x) = (x-2)^2 - 1$ Scheitelpunktform $\Rightarrow S(2 \mid -1)$
		$f(0) = (0-2)^2 - 1 = 4 - 1 = 3 \Rightarrow \underline{\underline{P_y(0 \mid 3)}}$
		$f(x) = 0 \Leftrightarrow (x-2)^2 - 1 = 0 \mid +1$
		$\Leftrightarrow (x-2)^2 = 1 \mid \sqrt{} \Leftrightarrow \lvert x-2 \rvert = \sqrt{1} = 1$
		$\Leftrightarrow x - 2 = 1 \mid +2 \Leftrightarrow x_1 = 3 \qquad x - 2 = -1 \mid +2 \Leftrightarrow x_2 = 1$
		$\Rightarrow \underline{\underline{P_{x1}(3 \mid 0)}} \qquad \underline{\underline{P_{x2}(1 \mid 0)}}$

A4	Ausführliche Lösung	
	b)	Der Graph:
		

A5 Ausführliche Lösung

a) Berechnung:

$$f(x) = -\frac{1}{2}x^2 - 2x + 6 \qquad f(0) = 6 \Rightarrow \underline{\underline{P_y(0\,|\,6)}}$$

$$f(x) = 0 \Leftrightarrow -\frac{1}{2}x^2 - 2x + 6 = 0 \,|\cdot(-2) \Leftrightarrow x^2 + 4x - 12 = 0$$

$$p = 4\,;\, q = -12 \Rightarrow D = \left(\frac{p}{2}\right)^2 - q = 4 + 12 = 16 \Rightarrow \sqrt{D} = \sqrt{16} = 4$$

$$x_{1/2} = -\frac{p}{2} \pm \sqrt{D} \quad \left| \begin{array}{l} x_1 = -2 + 4 = 2 \\ x_2 = -2 - 4 = -6 \end{array} \right. \quad \Rightarrow \quad \begin{array}{l} \underline{\underline{P_{x1}(2\,|\,0)}} \\ \underline{\underline{P_{x2}(-6\,|\,0)}} \end{array}$$

$$x_s = \frac{x_1 + x_2}{2} = \frac{2 + (-6)}{2} = \frac{-4}{2} = -2$$

$$\Rightarrow \underline{\underline{S(-2\,|\,8)}}$$

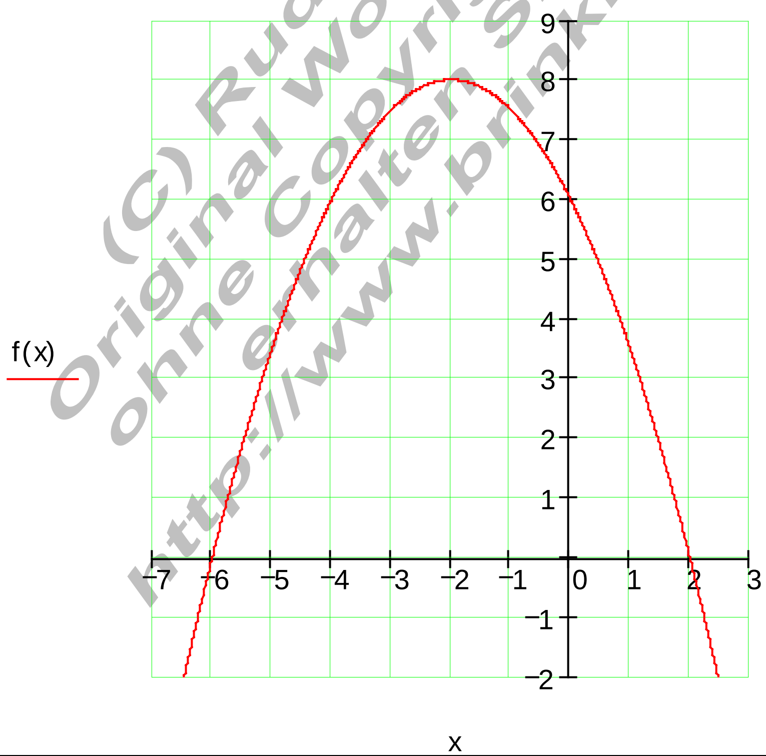
$$y_s = f(x_s) = f(-2) = -\frac{1}{2}\cdot 4 - 2\cdot(-2) + 6 = -2 + 4 + 6 = 8$$

$$f(x) = -\frac{1}{2}(x+2)^2 + 8 \text{ Scheitelpunktform}$$

Normalparabel, um den Faktor ½ gestaucht und nach unten geöffnet.
Verschiebung um 2 EH nach links. Verschiebung um 8 EH nach oben.

A5 Ausführliche Lösung

a) Der Graph:



A5 Ausführliche Lösung

b) Berechnung:

$$f(x)=\frac{1}{3}x^2-\frac{2}{3}x-2 \qquad f(0)=-2 \Rightarrow \underline{\underline{P_y(0\,|\,-2)}}$$

$$f(x)=0 \Leftrightarrow \frac{1}{3}x^2-\frac{2}{3}x-2=0\,|\cdot 3 \Leftrightarrow x^2-2x-6=0$$

$$p=-2\,;\,q=-6 \Rightarrow D=\left(\frac{p}{2}\right)^2-q=1+6=7 \Rightarrow \sqrt{D}=\sqrt{7}$$

$$x_{1/2}=-\frac{p}{2}\pm\sqrt{D} \quad \left| \begin{array}{l} x_1=1+\sqrt{7}\approx 3{,}65 \\ x_2=1-\sqrt{7}\approx -1{,}65 \end{array} \right. \Rightarrow \begin{array}{l} \underline{\underline{P_{x1}\left(1+\sqrt{7}\approx 3{,}65\,|\,0\right)}} \\ \underline{\underline{P_{x2}\left(1-\sqrt{7}\approx -1{,}65\,|\,0\right)}} \end{array}$$

$$x_s=\frac{x_1+x_2}{2}=\frac{1+\sqrt{7}+1-\sqrt{7}}{2}=\frac{2}{2}=1$$

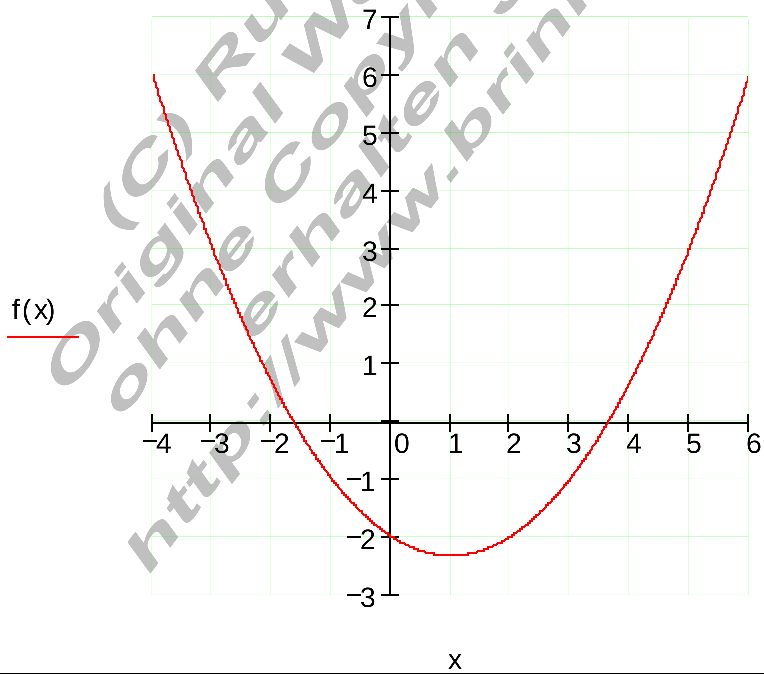
$$y_s=f(x_s)=f(1)=\frac{1}{3}-\frac{2}{3}-2=\frac{1}{3}-\frac{2}{3}-\frac{6}{3}=-\frac{7}{3} \qquad \Rightarrow \underline{\underline{S\left(1\,|\,-\frac{7}{3}\right)}}$$

$$f(x)=\frac{1}{3}(x-1)^2-\frac{7}{3} \quad \text{Scheitelpunktform}$$

Normalparabel, um den Faktor 1/3 gestaucht und nach oben geöffnet.
Verschiebung um 1 EH nach rechts. Verschiebung um 7/3 EH nach unten.

A5 Ausführliche Lösung

b) Der Graph:



A6	Ausführliche Lösung
a)	$K(v) = 0{,}002v^2 - 0{,}18v + 8{,}55$ für $v > 40$ $K(v) = 7 \Leftrightarrow 0{,}002v^2 - 0{,}18v + 8{,}55 = 7 \Leftrightarrow v^2 - 90v + 775 = 0$ $p = -90\,;\; q = 775 \Rightarrow D = 1250$ $v_1 = 45 + \sqrt{1250} \approx 80{,}36$ $v_2 = 45 - \sqrt{1250} \approx 9{,}6$ scheidet aus wegen $v > 40$ Bei einer Geschwindigkeit von 80,36 km/h ist der Verbrauch 7 Liter/100 km.

A6	Ausführliche Lösung
b)	Scheitelpunkt ist Minimum $v_s = \frac{v_1 + v_2}{2} = \frac{45 + \sqrt{1250} + 45 - \sqrt{1250}}{2} = \underline{\underline{45}}$ $K(45) = 0{,}002 \cdot 45^2 - 0{,}18 \cdot 45 + 8{,}55 = \underline{\underline{4{,}5}}$ Bei einer Geschwindigkeit von 45 km/h ist der Verbrauch mit 4,5 Liter/ 100 km am geringsten.

A7	Ausführliche Lösungen		
a)	Normalparabel verschoben um 2 EH nach links, um 9 EH nach unten, nach oben geöffnet. Der Scheitelpunkt hat die Koordinaten: $S(-2 \mid -9)$	b)	Normalparabel verschoben um 4 EH nach rechts, um 3 EH nach unten, nach oben geöffnet, um den Faktor ½ gestaucht. Der Scheitelpunkt hat die Koordinaten: $S(4 \mid -3)$

A7	Ausführliche Lösungen		
c)	Normalparabel verschoben um 3/2 EH nach rechts, um 5/4 EH nach oben, nach unten geöffnet, um den Faktor 7/3 gestreckt. Der Scheitelpunkt hat die Koordinaten: $S\left(\frac{3}{2} \middle| \frac{5}{4}\right)$	d)	Normalparabel verschoben um 3/4 EH nach links, um 1/3 EH nach unten, nach unten geöffnet, um den Faktor 4 gestreckt. Der Scheitelpunkt hat die Koordinaten: $S\left(-\frac{3}{4} \middle| -\frac{1}{3}\right)$

A8	Ausführliche Lösung
a)	$f(x) = (x-2)^2 - 2x - 2 = x^2 - 6x + 2$ Die Parabel nach oben geöffnet, Scheitel ist Minimum. $f(x) = x^2 - 6x + 3^2 - 3^2 + 2 = (x-3)^2 - 7 \Rightarrow S(3 \mid -7)$ $\Rightarrow$ $\underline{\underline{f(3) = -7 \text{ ist der kleinste Wert.}}}$

A8	Ausführliche Lösung
	b) $f(x) = -0,5x^2 + 0,5x - 6$ Parabel ist nach unten geöffnet, Scheitel ist Maximum. $f(x) = -0,5\left[x^2 - x + 12\right] = -0,5\left[x^2 - x + \left(\frac{1}{2}\right)^2 - \left(\frac{1}{2}\right)^2 + 12\right]$ $= -0,5\left[\left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{47}{4}\right] = -0,5\left(x - \frac{1}{2}\right)^2 - \frac{47}{8} \Rightarrow S\left(\frac{1}{2} \mid -\frac{47}{8}\right)$ $f\left(\frac{1}{2}\right) = -\frac{47}{8}$ ist der größte Wert.

A9	Ausführliche Lösung:
	Umfang eines Rechtecks: $U = 2a + 2b$ Rechteckfläche: $A = a \cdot b$ Ansatz: $U = 2a + 2b \Rightarrow b = \frac{U}{2} - a$ in die Flächenformel einsetzen: $A(a) = a\left(\frac{U}{2} - a\right) = \frac{U}{2}a - a^2 = -a^2 + \frac{U}{2}a$ Parabel nach unten geöffnet Die Scheitelkoordinaten liefern das Maximum für die Fläche $A(a) = -1\left[a^2 - \frac{U}{2}a + \left(\frac{U}{4}\right)^2 - \left(\frac{U}{4}\right)^2\right] = -\left(a - \frac{U}{4}\right)^2 + \left(\frac{U}{4}\right)^2$ Scheitelpunktform $\Rightarrow S\left(\frac{U}{4} \,\middle|\, \left(\frac{U}{4}\right)^2\right) \Rightarrow$ für $a = \frac{U}{4}$ ist $A(a) = \left(\frac{U}{4}\right)^2$ das Flächenmaximum Für $U = 18\text{ cm}$ gilt: $a = \frac{18\text{ cm}}{4} = 4{,}5\text{ cm}$ und $b = \frac{U}{2} - a = 9\text{ cm} - 4{,}5\text{ cm} = 4{,}5\text{ cm}$ Für $a = 4{,}5\text{ cm}$ und $b = 4{,}5\text{ cm}$ hat das Rechteck den größten Flächeninhalt $A = a \cdot b = 4{,}5\text{ cm} \cdot 4{,}5\text{ cm} = 20{,}25\text{ cm}^2$ Das ist ein Quadrat. Bitte mit $U = 30\text{ cm}$ überprüfen!