Lösungen Geraden und Parabeln zur Vorbereitung der Klassenarbeit I

Ergebnisse ohne Graphen:

E1	Ergebnis
	Die Funktionsgleichung lautet: $f(x) = -\frac{4}{5}x + \frac{2}{5}$

E2	Ergebnis
	Die Funktionsgleichung lautet: $f(x) = -\frac{3}{5}x - \frac{9}{10}$

E3	Ergebnis
	$f(x) = x + 2\,;\, g(x) = -x + 4 \Rightarrow S(1\,\vert\,3)$

E4	Ergebnisse			
	a)	$f(x) = (x+1)^2 - 4\,;\, S(-1\,\vert\,4)$	b)	$f(x) = \frac{1}{2}(x-1)^2 - 9\,;\, S(1\,\vert\,-9)$

E5	Ergebnisse			
	a)	Normalparabel verschoben um 2 EH nach links, um 9 EH nach unten, nach oben geöffnet. $S(-2\,\vert\,-9)$	b)	Normalparabel verschoben um 4 EH nach rechts, um 3 EH nach unten, nach oben geöffnet, um den Faktor ½ gestaucht. $S(4\,\vert\,-3)$
	c)	Normalparabel verschoben um 3/2 EH nach rechts, um 5/4 EH nach oben, nach unten geöffnet, um den Faktor 7/3 gestreckt $S\left(\frac{3}{2}\,\middle\vert\,\frac{5}{4}\right)$	d)	Normalparabel verschoben um 3/4 EH nach links, um 1/3 EH nach unten, nach unten geöffnet, um den Faktor 4 gestreckt $S\left(-\frac{3}{4}\,\middle\vert\,-\frac{1}{3}\right)$

E6	Ergebnis
	$f(x) = -\frac{2}{5}(x-4)^2 - 3$ Die Parabel ist nach unten geöffnet.

E7	Ergebnisse			
	a)	$P_{x1}(-5\,\vert\,0)\,;\, P_{x2}(1\,\vert\,0)\,;\, P_y(0\,\vert\,-5)$	b)	$P_{x1}\left(-2+\sqrt{5} \approx 0{,}24\,\vert\,0\right)$ $P_{x2}\left(-2-\sqrt{5} \approx -4{,}24\,\vert\,0\right)\,;\, P_y(0\,\vert\,1)$
	c)	$P_{x1}(-2\,\vert\,0)\,;\, P_{x2}(3\,\vert\,0)\,;\, P_y(0\,\vert\,6)$	d)	$P_{x1}(-6\,\vert\,0)\,;\, P_{x2}(2\,\vert\,0)\,;\, P_y(0\,\vert\,6)$

E8	Ergebnisse			
	a)	$f(x) = -\left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{25}{4}\,;\, S\left(\frac{1}{2}\,\middle\vert\,\frac{25}{4}\right)$	b)	$f(x) = (x+3)^2 - 5\,;\, S(-3\,\vert\,-5)$

E9	Ergebnis
	$f(x) = x^2 + 5x + 2{,}25\,;\, g(x) = -1{,}5x - 5{,}25 \Rightarrow P_1\left(-\frac{3}{2}\middle\vert -3\right);\, P_2\left(-5\middle\vert \frac{9}{4}\right)$

E10	Ergebnis
	$f(x) = x^2 - 4x + 1;\, g(x) = -x^2 + 2x + 1 \Rightarrow P_1(0\,\vert\,1)\,;\, P_2(3\,\vert\,-2)$

E11	Ergebnis
	$f(x) = \frac{1}{2}(x-4)^2 - 3\,;\, g(x) = \frac{2}{3}(x+3)^2 - 6 \Rightarrow h(x) = \frac{3}{7}x - \frac{33}{7}$

E12	Ergebnis
	$f(x) = (x+2)^2 - 2\,;\, g(x) = -(x+2)^2 + 5$ Die Scheitelpunkte beider Parabeln haben einen Abstand von 7 Einheiten.

Ausführliche Lösungen:

A1 Ausführliche Lösung

Ansatz:

$f(x) = a_1 x + a_0$ mit $a_1 = -\frac{4}{5}$ wird

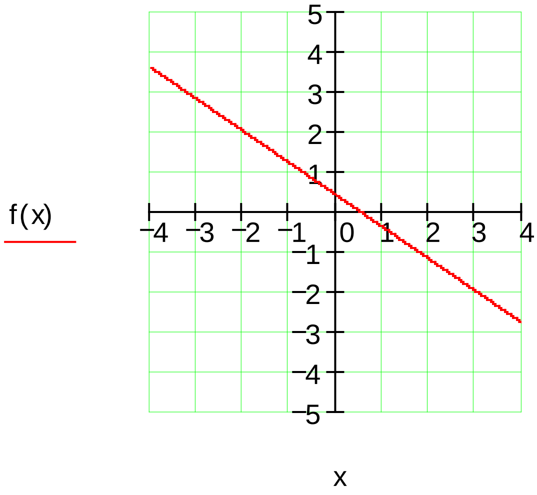
$f(x) = -\frac{4}{5}x + a_0$

Punktprobe mit $P_1(3\,|\,-2)$ ergibt:

$f(3) = -2 \Leftrightarrow -\frac{4}{5}\cdot 3 + a_0 = -2 \;|\; +\frac{12}{5}$

$\Leftrightarrow a_0 = \frac{2}{5}$

$\underline{\underline{f(x) = -\frac{4}{5}x + \frac{2}{5}}}$



A2 Ausführliche Lösung

$f(x) = a_1 x + a_0$

$P_1\left(-4 \,\middle|\, \frac{3}{2}\right); P_2\left(\frac{7}{2} \,\middle|\, -3\right)$

$a_1 = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{-3 - \frac{3}{2}}{\frac{7}{2} - (-4)} = -\frac{3}{5}$

$\Rightarrow f(x) = -\frac{3}{5}x + a_0$

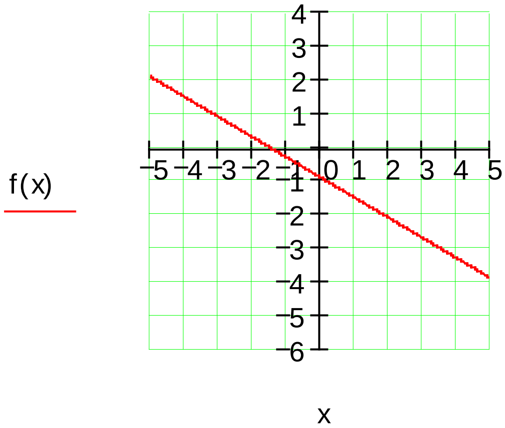
Punktprobe mit $P_1\left(-4 \,\middle|\, \frac{3}{2}\right)$ ergibt:

$f(-4) = \frac{3}{2}$

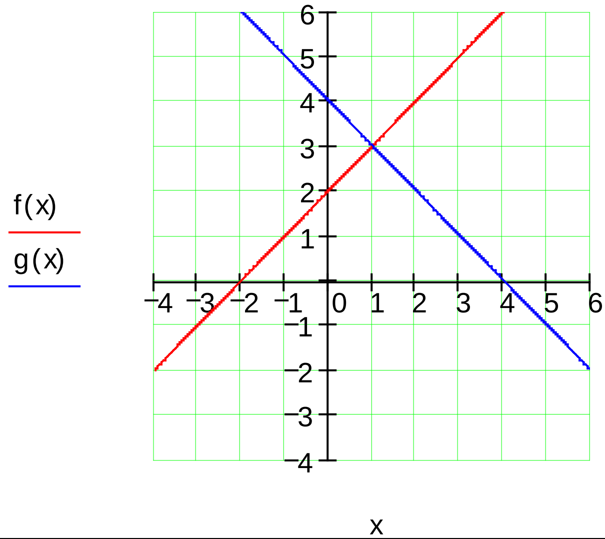
$\Leftrightarrow -\frac{3}{5}\cdot(-4) + a_0 = \frac{3}{2} \;|\; -\frac{12}{5}$

$\Leftrightarrow a_0 = -\frac{9}{10}$

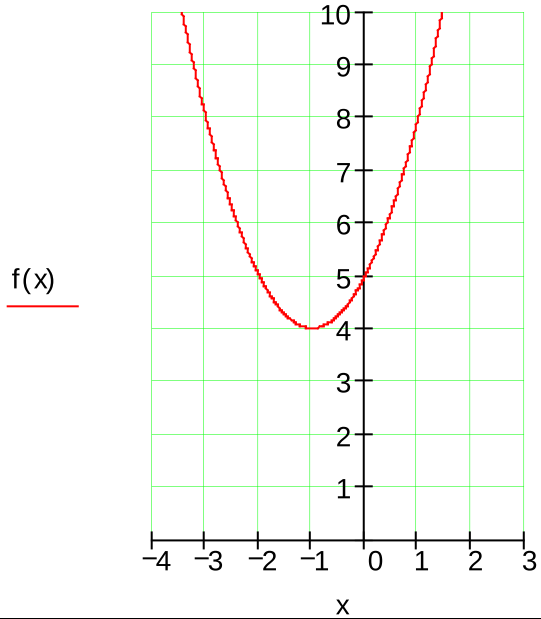
$\underline{\underline{f(x) = -\frac{3}{5}x - \frac{9}{10}}}$



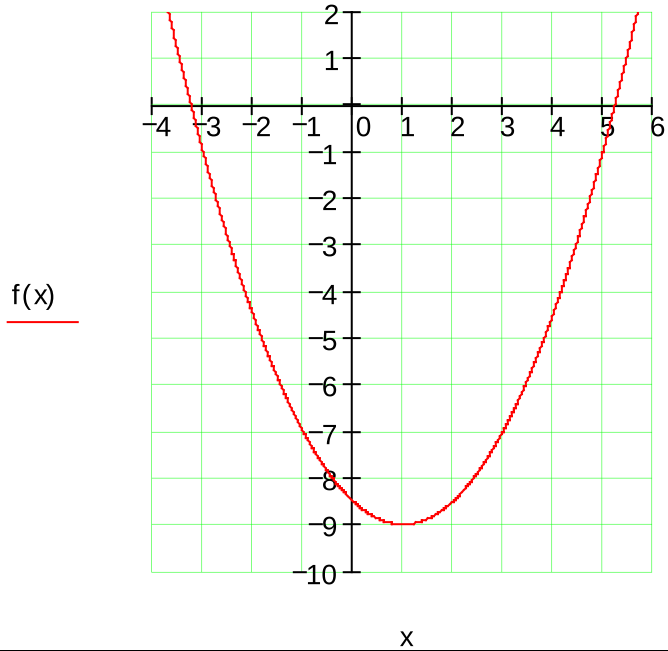
A3	Ausführliche Lösung
	$P(x_s \mid y_s)$ sei der Schnittpunkt beider Geraden.
	Ansatz: Gleichsetzen beider Funktionsgleichungen.
	$f(x_s) = g(x_s)$
	$\Leftrightarrow x_s + 2 = -x_s + 4 \mid +x_s$
	$\Leftrightarrow 2x_s + 2 = 4 \mid -2$
	$\Leftrightarrow 2x_s = 2 \mid :2$
	$\Leftrightarrow x_s = 1$ ist die x – Koordinate des Schnittpunktes.
	$y_s = f(x_s) = f(1) = 1 + 2 = 3 \Rightarrow \underline{\underline{P(1 \mid 3)}}$ ist der Geradenschnittpunkt

A3	Ausführliche Lösung
	

A4	Ausführliche Lösung
a)	$f(x) = x^2 + 2x + 5$ Lösung durch quadratische Ergänzung.
	$f(x) = \underbrace{x^2 + 2x + 1^2}_{\text{1. bin. Formel}} \underbrace{-1^2 + 5}_{4}$
	$f(x) = (x+1)^2 + 4$ ist die Scheitelpunktform, $S(-1 \mid 4)$ ist der Scheitelpunkt.

A4	Ausführliche Lösung
a)	

A4	Ausführliche Lösung
b)	$f(x)=\frac{1}{2}x^2-x-\frac{17}{2}$ den Faktor $\frac{1}{2}$ ausklammern. $f(x)=\frac{1}{2}\left[x^2-2x-17\right] \Leftrightarrow f(x)=\frac{1}{2}\left[\underbrace{x^2-2x+1^2}_{\text{2. bin. Formel}}\underbrace{-1^2-17}_{-18}\right]$ $\Leftrightarrow f(x)=\frac{1}{2}\left[(x-1)^2-18\right] \Rightarrow f(x)=\frac{1}{2}(x-1)^2-9 \Rightarrow S(1\mid -9)$

A4	Ausführliche Lösung
b)	

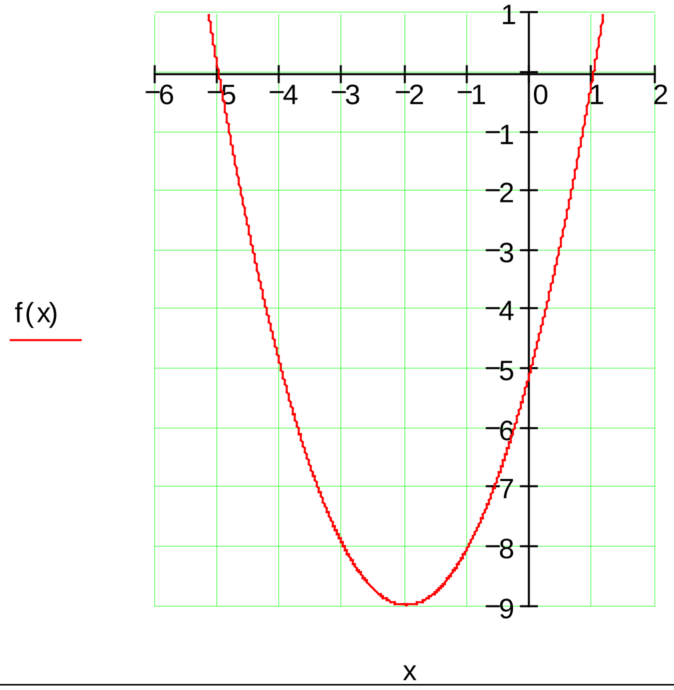
A5	Ausführliche Lösung		
a)	Normalparabel verschoben um 2 EH nach links, um 9 EH nach unten, nach oben geöffnet. Der Scheitelpunkt hat die Koordinaten: $S(-2 \mid -9)$	b)	Normalparabel verschoben um 4 EH nach rechts, um 3 EH nach unten, nach oben geöffnet, um den Faktor ½ gestaucht. Der Scheitelpunkt hat die Koordinaten: $S(4 \mid -3)$
c)	Normalparabel verschoben um 3/2 EH nach rechts, um 5/4 EH nach oben, nach unten geöffnet, um den Faktor 7/3 gestreckt. Der Scheitelpunkt hat die Koordinaten: $S\left(\frac{3}{2} \mid \frac{5}{4}\right)$	d)	Normalparabel verschoben um 3/4 EH nach links, um 1/3 EH nach unten, nach unten geöffnet, um den Faktor 4 gestreckt. Der Scheitelpunkt hat die Koordinaten: $S\left(-\frac{3}{4} \mid -\frac{1}{3}\right)$

A6	Ausführliche Lösung
	$f(x) = \underbrace{-\frac{2}{5}}_{\text{Formfaktor}} \left(x \underbrace{-4}_{\text{4 EH nach rechts}}\right)^2 \underbrace{-3}_{\text{3 EH nach unten}}$ Die Parabel ist nach unten geöffnet, da der Formfaktor negativ ist.

A7	Ausführliche Lösung
a)	Berechnung: $f(x) = (x+2)^2 - 9$ Ansatz für Nullstellen: $f(x) = 0$ $\Leftrightarrow (x+2)^2 - 9 = 0 \mid +9 \Leftrightarrow (x+2)^2 = 9 \mid \sqrt{} \Leftrightarrow \lvert x+2 \rvert = 3$ 1. $x+2 = 3 \Rightarrow x_1 = 1$ 2. $x+2 = -3 \Rightarrow x_2 = -5$ Ansatz für $P_y : y_s = f(0) = (0+2)^2 - 9 = -5$ Achsenschnittpunkte: $P_{x1}(1 \mid 0); P_{x2}(-5 \mid 0); P_y(0 \mid -5)$

A7 Ausführliche Lösung

a) Der Graph:



A7 Ausführliche Lösung

b) Berechnung:

$f(x) = -(x+2)^2 + 5$ Ansatz für Nullstellen: $f(x) = 0$

$\Leftrightarrow -(x+2)^2 + 9 = 0 \mid -5 \Leftrightarrow -(x+2)^2 = -5 \mid \cdot(-1)$

$\Leftrightarrow (x+2)^2 = 5 \mid \sqrt{} \Leftrightarrow |x+2| = \sqrt{5}$

1. $x+2 = \sqrt{5} \Rightarrow x_1 = -2+\sqrt{5} \approx 0{,}24$

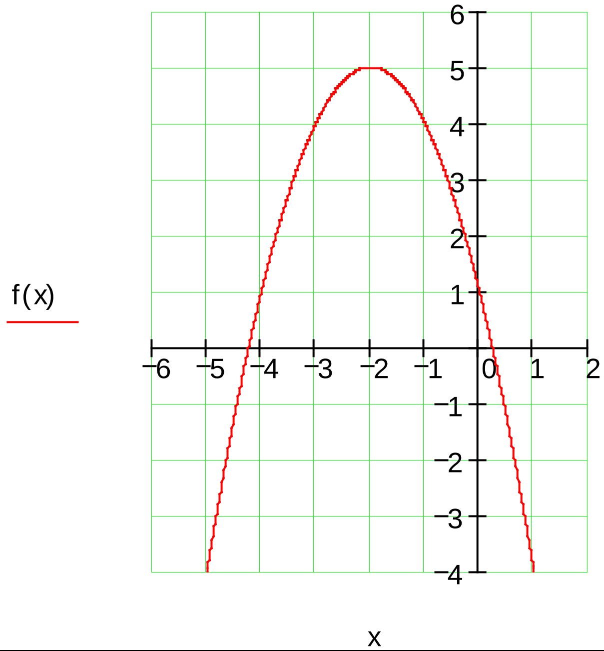
2. $x+2 = -\sqrt{5} \Rightarrow x_2 = -2-\sqrt{5} \approx -4{,}24$

Ansatz für $P_y : y_s = f(0) = -(0+2)^2 + 5 = 1$

Achsenschnittpunkte:

$P_{x1}\left(-2+\sqrt{5} \approx 0{,}24 \mid 0\right); P_{x2}\left(-2-\sqrt{5} \approx -4{,}24 \mid 0\right); P_y(0 \mid 1)$

A7	Ausführliche Lösung
	b) Der Graph:



A7	Ausführliche Lösung
	c) Berechnung:

$f(x) = -x^2 + x + 6$ Ansatz für Nullstellen: $f(x) = 0$

$$\Leftrightarrow -x^2 + x + 6 = 0 \mid \cdot(-1) \Leftrightarrow x^2 - x - 6 = 0 \Leftrightarrow \underbrace{x^2 - x + \left(\frac{1}{2}\right)^2}_{\text{2. bin. Formel}} \underbrace{-\left(\frac{1}{2}\right)^2 - 6}_{-\frac{25}{4}} = 0$$

$$\Leftrightarrow \left(x - \frac{1}{2}\right)^2 - \frac{25}{4} = 0 \mid + \frac{25}{4} \Leftrightarrow \left(x - \frac{1}{2}\right)^2 = \frac{25}{4} \mid \sqrt{\ } \Leftrightarrow \left|x - \frac{1}{2}\right| = \frac{5}{2}$$

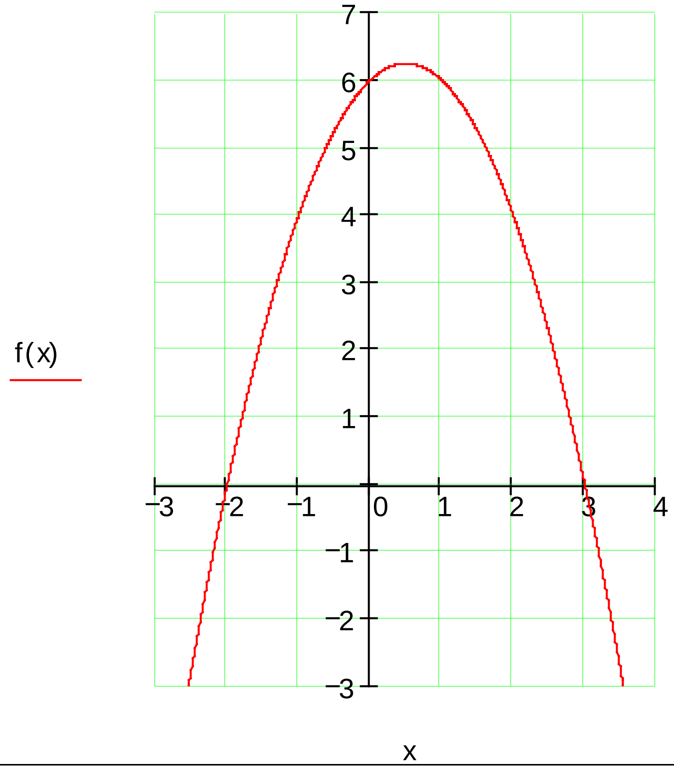
1. $x - \frac{1}{2} = \frac{5}{2} \Rightarrow x_1 = 3$

2. $x - \frac{1}{2} = -\frac{5}{2} \Rightarrow x_2 = -2$

Ansatz für P_y : $y_s = f(0) = -0^2 + 0 + 6 = 6$

Achsenschnittpunkte: $P_{x1}(3 \mid 0); P_{x2}(-2 \mid 0); P_y(0 \mid 6)$

A7	Ausführliche Lösung	
	c)	Der Graph:



A7	Ausführliche Lösung	
	d)	Berechnung:

$f(x) = -\frac{1}{2}x^2 - 2x + 6$ Ansatz für Nullstellen: $f(x) = 0$

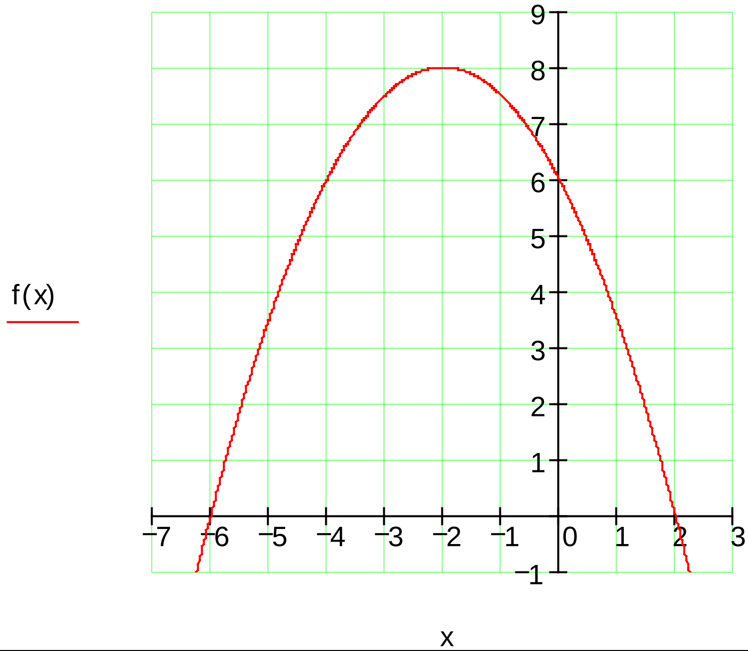
$\Leftrightarrow -\frac{1}{2}x^2 - 2x + 6 = 0 \,|\, : \left(-\frac{1}{2}\right) \Leftrightarrow x^2 + 4x - 12 = 0 \Leftrightarrow \underbrace{x^2 + 4x + (2)^2}_{\text{1. bin. Formel}} \underbrace{-(2)^2 - 12}_{-16} = 0$

$\Leftrightarrow (x+2)^2 - 16 = 0 \,|\, +16 \Leftrightarrow (x+2)^2 = 16 \,|\, \sqrt{} \Leftrightarrow |x+2| = 4$

1. $x + 2 = 4 \Rightarrow x_1 = 2$
2. $x + 2 = -4 \Rightarrow x_2 = -6$

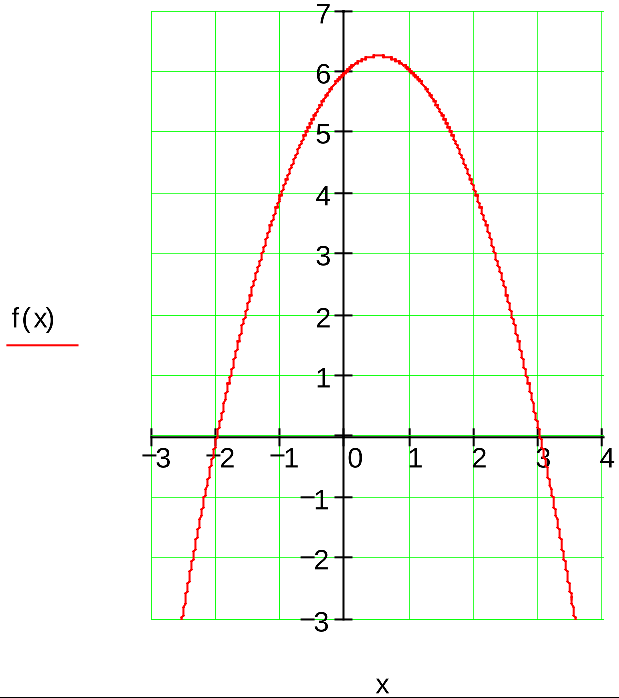
Ansatz für $P_y : y_s = f(0) = -\frac{1}{2} \cdot 0^2 - 2 \cdot 0 + 6 = 6$

Achsenschnittpunkte: $P_{x1}(2\,|\,0)\,;\,P_{x2}(-6\,|\,0)\,;\,P_y(0\,|\,6)$

A7	Ausführliche Lösung	
	d)	Der Graph: 

A8	Ausführliche Lösung	
	a)	Berechnung:
		$f(x) = -x^2 + x + 6$ Scheitelpunkt über Nullstellen.
		$x_s = \frac{x_1 + x_2}{2} = \frac{-2+3}{2} = \frac{1}{2}$ $\quad y_s = f(x_s) = f\left(\frac{1}{2}\right) = -\left(\frac{1}{2}\right)^2 + \frac{1}{2} + 6 = \frac{25}{4}$
		$S\left(\frac{1}{2} = 0{,}5 \,\middle|\, \frac{25}{4} = 6{,}25\right)$ $\quad f(x) = -\left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{25}{4}$

A8	Ausführliche Lösung
	a) Der Graph:



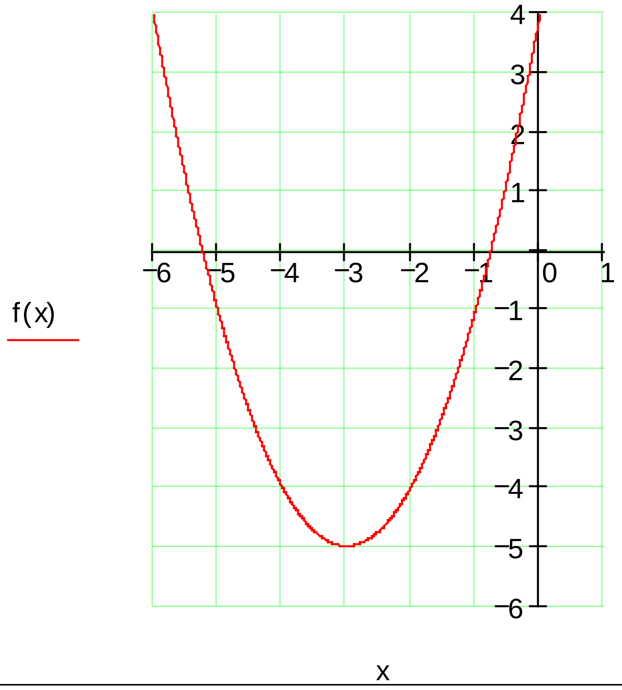
A8	Ausführliche Lösung
	b) Berechnung:

$f(x) = x^2 + 6x + 4$ Scheitelpunkt über Nullstellen.

$$x_s = \frac{x_1 + x_2}{2} = \frac{-3+\sqrt{5}+\left(-3-\sqrt{5}\right)}{2} = -3$$

$$y_s = f(x_s) = f(-3) = (-3)^2 + 6\cdot(-3) + 4 = -5$$

$S(-3\,|\,-5)$ $\qquad$ $f(x) = (x+3)^2 - 5$

A8	Ausführliche Lösung	
	b)	Der Graph: 

A9	Ausführliche Lösung
	$f(x) = x^2 + 5x + \frac{9}{4} \qquad g(x) = -\frac{3}{2}x - 5\frac{1}{4}$
	Ansatz:
	$f(x) = g(x) \Leftrightarrow x^2 + 5x + \frac{9}{4} = -\frac{3}{2}x - 5\frac{1}{4} \mid +\frac{3}{2}x$
	$\Leftrightarrow x^2 + \frac{13}{2}x + \frac{9}{4} = -\frac{21}{4} \mid +\frac{21}{4}$
	$\Leftrightarrow x^2 + \frac{13}{2}x + \frac{15}{2} = 0$ Lösung durch quadratische Ergänzung
	$\Leftrightarrow x^2 + \frac{13}{2}x + \left(\frac{13}{4}\right)^2 - \left(\frac{13}{4}\right)^2 + \frac{15}{2} = 0 \Leftrightarrow \left(x + \frac{13}{4}\right)^2 - \frac{49}{16} = 0 \mid + \frac{49}{16}$
	$\Leftrightarrow \left(x + \frac{13}{4}\right)^2 = \frac{49}{16} \mid \sqrt{\ } \Leftrightarrow \left\lvert x + \frac{13}{4} \right\rvert = \frac{7}{4}$
	Fall 1: $x + \frac{13}{4} = \frac{7}{4} \Rightarrow x_1 = -\frac{3}{2}$ Fall 2: $x + \frac{13}{4} = -\frac{7}{4} \Rightarrow x_2 = -5$
	x_1 und x_2 sind die x – Koordinaten der Schnittpunkte.
	Die y – Koordinaten der Schnittpunkte finden wir
	durch einsetzen in $f(x)$ oder in $g(x)$.
	$y_1 = g(x_1) = g\left(-\frac{3}{2}\right) = -\frac{3}{2} \cdot \left(-\frac{3}{2}\right) - \frac{21}{4} = -3$
	$y_2 = g(x_2) = g(-5) = -\frac{3}{2} \cdot (-5) - \frac{21}{4} = \frac{9}{4}$
	Die Gerade schneidet die Parabel in den Punkten $P_1\left(-\frac{3}{2} \,\middle|\, -3\right)$ und $P_2\left(-5 \,\middle|\, \frac{9}{4}\right)$

A10	Ausführliche Lösung
	$f(x) = x^2 - 4x + 1$ und $g(x) = -x^2 + 2x + 1$
	Ansatz : $f(x) = g(x) \Leftrightarrow x^2 - 4x + 1 = -x^2 + 2x + 1 \mid + x^2$
	$\Leftrightarrow 2x^2 - 4x + 1 = 2x + 1 \mid -2x \Leftrightarrow 2x^2 - 6x + 1 = 1 \mid -1$
	$\Leftrightarrow 2x^2 - 6x = 0 \mid :2 \Leftrightarrow x^2 - 3x = 0$ q. E.
	$\Leftrightarrow x^2 - 3x + \left(\frac{3}{2}\right)^2 - \left(\frac{3}{2}\right)^2 = 0 \Leftrightarrow \left(x - \frac{3}{2}\right)^2 = \frac{9}{4} \mid \sqrt{\ } \Leftrightarrow \left\lvert x - \frac{3}{2} \right\rvert = \frac{3}{2}$
	Fall I: $x - \frac{3}{2} = \frac{3}{2} \Rightarrow x_1 = 3$ Fall II: $x - \frac{3}{2} = -\frac{3}{2} \Rightarrow x_2 = 0$
	$y_1 = f(x_1) = f(3) = 3^2 - 4 \cdot 3 + 1 = -2$
	$y_2 = f(x_2) = f(0) = 0^2 - 4 \cdot 0 + 1 = 1$
	Die Parabeln schneiden sich in den Punkten $P_1(3 \mid -2)$ und $P_2(0 \mid 1)$

A11	Ausführliche Lösung
	$f(x)=\frac{1}{2}(x-4)^2-3 \Rightarrow S_1(4\,\vert\,-3)$ $g(x)=\frac{2}{3}(x+3)^2-6 \Rightarrow S_2(-3\,\vert\,-6)$ Die Gerade verläuft durch die beiden Scheitelpunkte. Ansatz: $f_g(x)=a_1x+a_0$ $a_1=\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}=\frac{-6-(-3)}{-3-4}=\frac{3}{7}$ $f_g(x)=\frac{3}{7}x+a_0$ Punktprpbe mit $S_1(4\,\vert\,-3)$: $f_g(4)=3 \Leftrightarrow \frac{3}{7}\cdot 4+a_0=-3 \,\vert\, -\frac{3}{7}$ $\Leftrightarrow a_0=-\frac{33}{7} \Rightarrow f_g(x)=\frac{3}{7}x-\frac{33}{7}$

A12	Ausführliche Lösung
	Da beide Scheitelpunkte die x – Koordinate x = -2 haben, liegen sie übereinander. Der Abstand berechnet sich aus dem Betrag der Differenz der y - Koordinaten. Er beträgt 7 EH. $\text{Abstand}=\vert 5-(-2)\vert=\vert 5+2\vert=7$