Beispiel I Training quadratische Funktionen I

Ausführliches Beispiel zur Aufstellung einer Wertetabelle:

Um den Graphen einer ganzrationalen Funktion zeichnen zu können, ist in den meisten Fällen notwendig, eine Wertetabelle aufzustellen.
Dazu ist ein Taschenrechner hilfreich, aber nicht immer notwendig.

Einfaches Beispiel, Lösung ohne Taschenrechner

Funktionsgleichung: $f(x) = x^2 - 4x + 3$

Wir beginnen mit der Variablen $x = 0$.

$x = 0 : f(0) = 0^2 - 4\cdot 0 + 3 = 0 - 0 + 3 = 3$

$x = 1 : f(1) = 1^2 - 4\cdot 1 + 3 = 1 - 4 + 3 = 0$

$x = 2 : f(2) = 2^2 - 4\cdot 2 + 3 = 4 - 8 + 3 = -1$

$x = 3 : f(3) = 3^2 - 4\cdot 3 + 3 = 9 - 12 + 3 = 0$

$x = 4 : f(4) = 4^2 - 4\cdot 4 + 3 = 16 - 16 + 3 = 3$

$x = 5 : f(5) = 5^2 - 4\cdot 5 + 3 = 25 - 20 + 3 = 8$

$x = 6 : f(6) = 6^2 - 4\cdot 6 + 3 = 36 - 24 + 3 = 15$

Sobald der Funktionswert größer als ± 10 wird, kann man aufhören.

Jetzt werden die Funktionswerte für negative $x -$ Werte bestimmt.

$x = -1 : f(-1) = (-1)^2 - 4\cdot(-1) + 3 = 1 + 4 + 3 = 8$

$x = -2 : f(-2) = (-2)^2 - 4\cdot(-2) + 3 = 4 + 8 + 3 = 15$

Nun werden alle Werte in eine Tabelle eingetragen.

x	-2	-1	0	1	2	3	4	5	6
$f(x)$	15	8	3	0	-1	0	3	8	15

Mit diesen Werten lässt sich nun der Graph von $f(x)$ zeichnen.
Sollte sich beim zeichnen herausstellen, dass noch Zwischenwerte fehlen, so kann man diese nachträglich berechnen z.B. für $x = \pm\frac{1}{2}$

$$x = -\frac{1}{2} : f\left(-\frac{1}{2}\right) = \left(-\frac{1}{2}\right)^2 - 4\cdot\left(-\frac{1}{2}\right) + 3 = \frac{1}{4} + 4\cdot\frac{1}{2} + 3 = \frac{1}{4} + 2 + 3 = 5\frac{1}{4} = 5,25$$

$$x = \frac{1}{2} : f\left(\frac{1}{2}\right) = \left(\frac{1}{2}\right)^2 - 4\cdot\frac{1}{2} + 3 = \frac{1}{4} - 4\cdot\frac{1}{2} + 3 = \frac{1}{4} - 2 + 3 = 1\frac{1}{4} = 1,25$$

Nicht jeder ist fit mit dem Taschenrechner.
Um herauszufinden, wie gut Sie mit dem Taschenrechner umgehen können, berechnen Sie die letzten beiden Funktionswerte mit dem Rechner.

Anspruchvolles Beispiel, Lösung teilweise mit Taschenrechner

Funktionsgleichung: $f(x) = \frac{4}{5}x^2 - \frac{3}{4}x - \frac{7}{2}$

Wir beginnen mit der Variablen $x = 0$.

$$x = 0: f(0) = \frac{4}{5}\cdot 0^2 - \frac{3}{4}\cdot 0 - \frac{7}{2} = 0 - 0 - \frac{7}{2} = -\frac{7}{2} = -3{,}5$$

$$x = 1: f(1) = \frac{4}{5}\cdot 1^2 - \frac{3}{4}\cdot 1 - \frac{7}{2} = \frac{4}{5} - \frac{3}{4} - \frac{7}{2} \underbrace{=}_{HN=20} \frac{16}{20} - \frac{15}{20} - \frac{70}{20} = -\frac{69}{20} = -3{,}45$$

$$x = 2: f(2) = \frac{4}{5}\cdot 2^2 - \frac{3}{4}\cdot 2 - \frac{7}{2} = \frac{16}{5} - \frac{3}{2} - \frac{7}{2} \underbrace{=}_{HN=10} \frac{32}{10} - \frac{15}{10} - \frac{35}{10} = -\frac{18}{10} = -\frac{9}{5} = -1{,}8$$

$$x = 3: f(3) = \frac{4}{5}\cdot 3^2 - \frac{3}{4}\cdot 3 - \frac{7}{2} = \frac{36}{5} - \frac{9}{4} - \frac{7}{2} \underbrace{=}_{HN=20} \frac{144}{20} - \frac{45}{20} - \frac{70}{20} = \frac{29}{20} = 1{,}45$$

$$x = 4: f(4) = \frac{4}{5}\cdot 4^2 - \frac{3}{4}\cdot 4 - \frac{7}{2} = \frac{64}{5} - 3 - \frac{7}{2} \underbrace{=}_{HN=10} \frac{128}{10} - \frac{30}{10} - \frac{35}{10} = \frac{63}{10} = 6{,}3$$

$$x = 5: f(5) = \frac{4}{5}\cdot 5^2 - \frac{3}{4}\cdot 5 - \frac{7}{2} = 20 - \frac{15}{4} - \frac{7}{2} \underbrace{=}_{HN=4} \frac{80}{4} - \frac{15}{4} - \frac{14}{4} = \frac{51}{4} = 12{,}75$$

Jetzt werden die Funktionswerte für negative x – Werte bestimmt.

$$x = -1: f(-1) = \frac{4}{5}\cdot(-1)^2 - \frac{3}{4}\cdot(-1) - \frac{7}{2} = \frac{4}{5} + \frac{3}{4} - \frac{7}{2} \underbrace{=}_{HN=20} \frac{16}{20} + \frac{15}{20} - \frac{70}{20} = -\frac{39}{20} = -1{,}95$$

$$x = -2: f(-2) = \frac{4}{5}\cdot(-2)^2 - \frac{3}{4}\cdot(-2) - \frac{7}{2} = \frac{16}{5} + \frac{3}{2} - \frac{7}{2} \underbrace{=}_{HN=10} \frac{32}{10} + \frac{15}{10} - \frac{35}{10} = \frac{12}{10} = \frac{6}{5} = 1{,}2$$

$$x = -3: f(-3) = \frac{4}{5}\cdot(-3)^2 - \frac{3}{4}\cdot(-3) - \frac{7}{2} = \frac{36}{5} + \frac{9}{4} - \frac{7}{2} \underbrace{=}_{HN=20} \frac{144}{20} + \frac{45}{20} - \frac{70}{20} = \frac{119}{20} = 5{,}95$$

$$x = -4: f(-4) = \frac{4}{5}\cdot(-4)^2 - \frac{3}{4}\cdot(-4) - \frac{7}{2} = \frac{64}{5} + 3 - \frac{7}{2} \underbrace{=}_{HN=10} \frac{128}{10} + \frac{30}{10} - \frac{35}{10} = \frac{123}{10} = 12{,}3$$

Nun werden alle Werte in eine Tabelle eingetragen.

x	–4	–3	–2	–1	0	1	2	3	4	5
$f(x)$	12,3	5,95	1,2	-1,95	-3,5	-3,45	-1,8	1,45	6,3	12,75

Mit diesen Werten lässt sich nun der Graph von $f(x)$ zeichnen.
Sollte sich beim zeichnen herausstellen, dass noch Zwischenwerte fehlen, so kann man diese nachträglich berechnen z.B. für $x = \pm\frac{5}{2}$

$$x = -\frac{5}{2}: f\left(-\frac{5}{2}\right) = \frac{4}{5}\cdot\left(-\frac{5}{2}\right)^2 - \frac{3}{4}\cdot\left(-\frac{5}{2}\right) - \frac{7}{2} = \frac{4}{5}\cdot\frac{25}{4} + \frac{3}{4}\cdot\frac{5}{2} - \frac{7}{2}$$
$$= \frac{25}{5} + \frac{15}{8} - \frac{7}{2} = 5 + \frac{15}{8} - \frac{7}{2} \underbrace{=}_{HN=8} \frac{40}{8} + \frac{15}{8} - \frac{28}{8} = \frac{27}{8} = 3{,}375$$

$$x = \frac{5}{2}: f\left(\frac{5}{2}\right) = \frac{4}{5}\cdot\left(\frac{5}{2}\right)^2 - \frac{3}{4}\cdot\frac{5}{2} - \frac{7}{2} = \frac{4}{5}\cdot\frac{25}{4} - \frac{3}{4}\cdot\frac{5}{2} - \frac{7}{2}$$
$$= \frac{25}{5} - \frac{15}{8} - \frac{7}{2} = 5 - \frac{15}{8} - \frac{7}{2} \underbrace{=}_{HN=8} \frac{40}{8} - \frac{15}{8} - \frac{28}{8} = -\frac{3}{8} = -0{,}375$$