Lösungen Text- und Anwendungsaufgaben II

Ausführliche Lösungen:

A1 Ausführliche Lösung

a) Scheitelpunktform:

$$f(x)=-\frac{1}{2}x^2+2x+1 \Leftrightarrow f(x)=-\frac{1}{2}\left(x^2-4x-2\right)$$

$$\Leftrightarrow f(x)=-\frac{1}{2}\left(x^2-4x+2^2-2^2-2\right) \Leftrightarrow f(x)=-\frac{1}{2}\left[(x-2)^2-4-2\right]$$

$$\Leftrightarrow f(x)=-\frac{1}{2}\left[(x-2)^2-6\right] \Leftrightarrow f(x)=-\frac{1}{2}(x-2)^2+3 \Rightarrow S(2\,|\,3)$$

A1 Ausführliche Lösung

b) Achsenschnittpunkte:

$$f(x)=-\frac{1}{2}x^2+2x+1 \Rightarrow f(0)=1 \Rightarrow P_y(0\,|\,1)$$

$$f(x)=0 \Leftrightarrow -\frac{1}{2}x^2+2x+1=0 \;|\cdot(-2)$$

$$\Leftrightarrow x^2-4x-2=0$$

$$\Rightarrow p=-4\,;\,q=-2$$

$$\Rightarrow D=\left(\frac{p}{2}\right)^2-q=(-2)^2+2=4+2=6$$

$$x_{1/2}=-\frac{p}{2}\pm\sqrt{D} \qquad x_1=2+\sqrt{6} \qquad x_2=2-\sqrt{6}$$

$$\Rightarrow P_{x_1}\left(2+\sqrt{6}\approx 4{,}45\,|\,0\right)$$

$$P_{x_2}\left(2-\sqrt{6}\approx -0{,}45\,|\,0\right)$$

A1 Ausführliche Lösung

c) Der Punkt der Parabel, der auf der y- Achse liegt, ist $P_y(0\,|\,1)$. Dieser soll zum Punkt P (-3 | -1) verschoben werden.

$$P_y(0\,|\,1) \underset{\text{Verschiebung}}{\rightarrow} P(-3\,|\,-1)$$

$0 \rightarrow -3$: Verschiebung un 3 Einheiten nach links.

$1 \rightarrow -1$: Verschiebung um 2 Einheiten nach unten.

Wenn ein Punkt der Parabel diese Verschiebung erfährt, dann erfährt jeder Punkt der Parabel diese Verschiebung, also auch der Scheitelpunkt.
Der Scheitelpunkt der Parabel mit der Funktionsgleichung f(x) wird um 3 Einheiten nach links und um 2 Einheiten nach unten verschoben, so dass daraus der Scheitelpunkt der verschobenen Parabel wird.

$$S(2\,|\,3) \underset{\text{3 EH nach links und 2 EH nach unten}}{\rightarrow} S(-1\,|\,1)$$

$$\Rightarrow g(x)=-\frac{1}{2}(x+1)^2+1$$

$$\Leftrightarrow g(x)=-\frac{1}{2}\left(x^2+2x+1\right)+1=-\frac{1}{2}x^2-x+\frac{1}{2}$$

A1 Ausführliche Lösung

d) Parabelschnittpunkt:

$$f(x)=g(x)\Leftrightarrow -\frac{1}{2}x^2+2x+1=-\frac{1}{2}x^2-x+\frac{1}{2}\;\Big|+\frac{1}{2}x^2$$

$$\Leftrightarrow 2x+1=-x+\frac{1}{2}\;\Big|+x$$

$$\Leftrightarrow 3x+1=\frac{1}{2}\;\Big|-1$$

$$\Leftrightarrow 3x=-\frac{1}{2}\;\Big|:3$$

$$\Leftrightarrow x=x_S=-\frac{1}{6}$$

$$y_s=f(x_S)=f\left(-\frac{1}{6}\right)$$

$$\Leftrightarrow y_S=-\frac{1}{2}\cdot\left(-\frac{1}{6}\right)^2+2\cdot\left(-\frac{1}{6}\right)+1$$

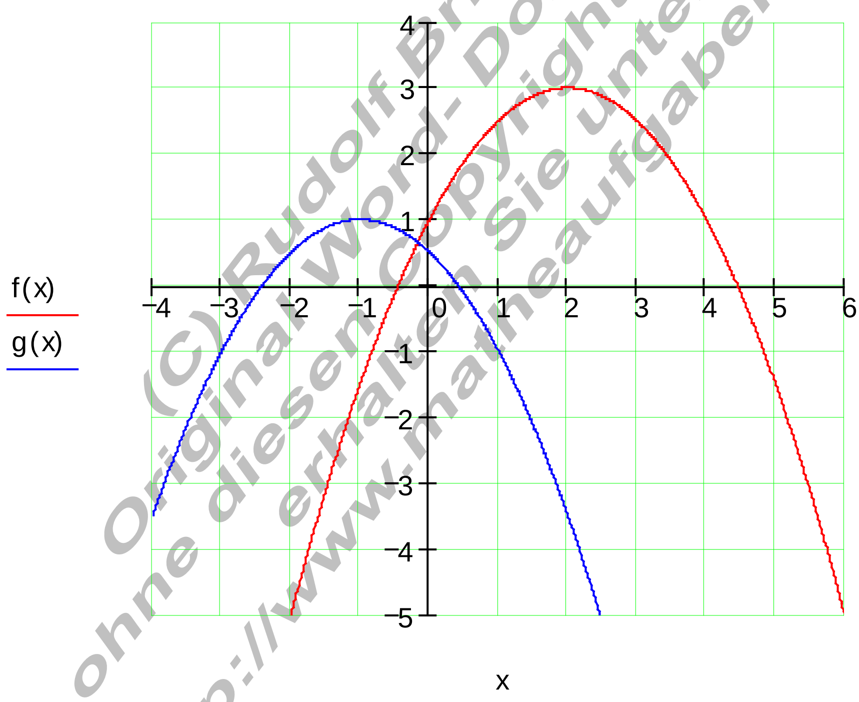
$$\Leftrightarrow y_S=-\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{36}-\frac{2}{6}+1$$

$$\Leftrightarrow y_S=-\frac{1}{72}-\frac{24}{72}+\frac{72}{72}=\frac{47}{72}$$

Parabelschnittpunkt: $S\left(-\frac{1}{6}\approx -0{,}17\;\middle|\;\frac{47}{72}\approx 0{,}65\right)$

A1 Ausführliche Lösung

e)



A2 Ausführliche Lösung

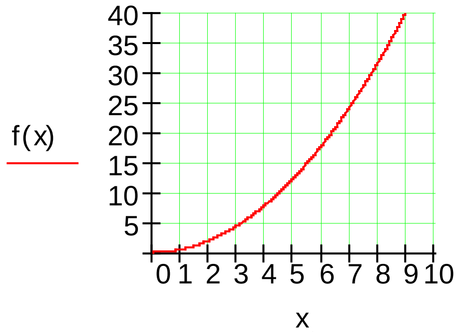
a)

Zeit in h	0	2	4	6	8
Zellteilungen	0	2	8	18	32

Funktionsgleichung: $f(x)=\frac{1}{2}x^2$

Die Funktionsgleichung kann durch probieren gefunden werden.

b)



c)

$f(x)=200 \Leftrightarrow \frac{1}{2}x^2=200 \mid \cdot 2$

$\Leftrightarrow x^2=400$

$\Leftrightarrow x=20$

$\Rightarrow$ 200 Teilungen nach 20 h

d)

$f(x)=1800 \Leftrightarrow \frac{1}{2}x^2=1800 \mid \cdot 2$

$\Leftrightarrow x^2=3600$

$\Leftrightarrow x=60$

$\Rightarrow$ 1800 Teilungen nach 60 h

A3 Ausführliche Lösung

$\underline{\underline{g(x)=3x}}\,;\,h(x)=-2x+a_0$

$P(3\mid 0): h(3)=-2\cdot 3+a_0=0 \Leftrightarrow a_0=6 \Rightarrow \underline{\underline{h(x)=-2x+6}}$

Dreieckfläche: $A=\frac{g\cdot h}{2}=\frac{\overline{BC}\cdot a}{2}$

Die x – Koordinaten der Punkte B und C sind zu bestimmen.

B: Schnitt $g(x)$ mit $f(x): g(x)=f(x) \Leftrightarrow 3x=a \Leftrightarrow x=\frac{a}{3} \Rightarrow \underline{\underline{B\left(\frac{a}{3}\,\middle|\,a\right)}}$

C: Schnitt $h(x)$ mit $f(x): h(x)=f(x) \Leftrightarrow -2x+6=a \Leftrightarrow x=3-\frac{5a}{6} \Rightarrow \underline{\underline{C\left(3-\frac{a}{2}\,\middle|\,a\right)}}$

Abstand $\overline{BC}: 3-\frac{a}{2}-\frac{a}{3}=\underline{\underline{3-\frac{5a}{6}}}$

Flächeninhalt: $A=\frac{\overline{BC}\cdot a}{2}=\frac{\left(3-\frac{5a}{6}\right)\cdot a}{2}=-\frac{5}{12}a^2+\frac{3}{2}a=A(a)$

Parabel nach unten geöffnet

Nullstellen: $a\left(-\frac{5}{12}a+\frac{3}{2}\right)=0 \Rightarrow a_1=0\,;\,a_2=\frac{18}{5}$

1. Scheitelkoordinate: $\frac{a_1+a_2}{2}=\frac{0+\frac{18}{5}}{2}=\frac{9}{5}=\underline{\underline{1{,}8}}$

2. Scheitelkoordinate: $A\left(\frac{9}{5}\right)=\frac{27}{20}=\underline{\underline{1{,}35}}$

Für $\underline{\underline{a=1{,}8}}$ ist der Flächeninhalt des Dreiecks maximal und zwar $\underline{\underline{1{,}35\text{ FE}}}$

A4 Ausführliche Lösung

a)

$$K(v) = 0{,}002v^2 - 0{,}18v + 8{,}55 \text{ für } v > 40$$

$$K(v) = 7 \Leftrightarrow 0{,}002v^2 - 0{,}18v + 8{,}55 = 7 \Leftrightarrow v^2 - 90v + 775 = 0$$

$$p = -90\,;\, q = 775 \Rightarrow D = 1250$$

$$v_1 = 45 + \sqrt{1250} \approx 80{,}36$$

$$v_2 = 45 - \sqrt{1250} \approx 9{,}6 \text{ scheidet aus wegen } v > 40$$

Bei einer Geschwindigkeit von 80,36 km/h ist der Verbrauch 7 Liter/100 km.

b) Scheitelpunkt ist Minimum

$$v_s = \frac{v_1 + v_2}{2} = \frac{45 + \sqrt{1250} + 45 - \sqrt{1250}}{2} = \underline{\underline{45}}$$

$$K(45) = 0{,}02 \cdot 45^2 - 0{,}18 \cdot 45 + 8{,}55 = \underline{\underline{4{,}5}}$$

Bei einer Geschwindigkeit von 45 km/h ist der Verbrauch mit 4,5 Liter/ 100 km am geringsten.

A5 Ausführliche Lösung

Der Koordinatenursprung wird in den Scheitelpunkt des Brückenbogens gelegt.

$f(x) = a_2x^2$ mit $P(9\,|\,-4{,}5)$ folgt:

$$f(9) = 81a_2 = -4{,}5 \Rightarrow a_2 = -\frac{1}{18} \text{ und } \underline{\underline{f(x) = -\frac{1}{18}x^2}}$$

Die Abstände der Pfeiler vom Scheitelpunkt sind: $\pm 1\,;\, \pm 3\,;\, \pm 5\,;\, \pm 7\,;\, \pm 9$

$f(1) = f(-1) = -0{,}056\,;\, f(3) = f(-3) = -0{,}5\,;\, f(5) = f(-5) = -1{,}389$

$f(7) = f(-7) = -2{,}722\,;\, f(9) = f(-9) = -4{,}5$

Pfeilerlängen für je 2 Pfeiler: $\underline{\underline{0{,}056\text{ m}}}\,;\, \underline{\underline{0{,}5\text{ m}}}\,;\, \underline{\underline{1{,}389\text{ m}}}\,;\, \underline{\underline{2{,}722\text{ m}}}\,;\, \underline{\underline{4{,}5\text{ m}}}$