Lösungen Parabeln aus gegebenen Bedingungen I

Ausführliche Lösungen:

A1 Ausführliche Lösung

$f(x)=x^2+a_1x+a_0$ Bedingung für keine Nullstelle: $D<0$

$$p=a_1\,;\,q=a_0\Rightarrow D=\left(\frac{p}{2}\right)^2-q=\left(\frac{a_1}{2}\right)^2-a_0=\frac{a_1^2}{4}-a_0$$

$$D<0\Leftrightarrow\frac{a_1^2}{4}-a_0<0\,|+a_0\Leftrightarrow\frac{a_1^2}{4}<a_0\,|\cdot4\Leftrightarrow\underline{\underline{a_1^2<4a_0}}$$

A2 Ausführliche Lösung

$f(x)=-x^2+1;\ g(x)=ax^2-a$

$g(x)=f(x)\Leftrightarrow ax^2-a=-x^2+1\Leftrightarrow(a+1)x^2-(a+1)=0$

Betrachtung von a:

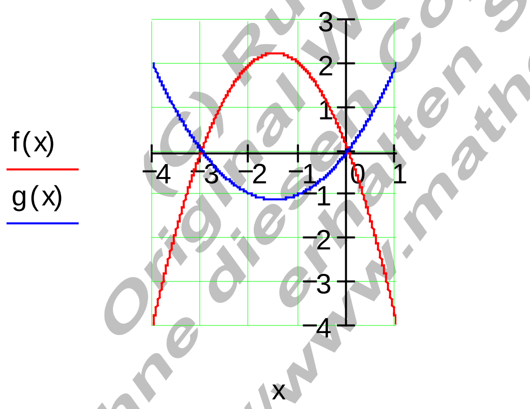
$\underline{\underline{a=-1}}\Rightarrow f(x)=g(x)$ identische Parabeln mit unendlich vielen Schnittpunkten.

$\underline{\underline{a\neq-1}}\Rightarrow(a+1)x^2-(a+1)=0\Leftrightarrow x^2=1$

$\Rightarrow x_{1/2}=\pm1$ zwei verschiedene Schnittpunkte

A3 Ausführliche Lösung

a)



$f(x)=-x^2-3x=-x(x+3)$

$\Rightarrow P_{x1}(0\,|\,0);P_{x2}(-3\,|\,0)$

$g(x)=0{,}5x(x+3)$

$\Rightarrow P_{x1}(0\,|\,0);P_{x2}(-3\,|\,0)$

f(x) und g(x) haben die gleichen Nullstellen.

$f(x):S(-1{,}5\,|\,2{,}25)$

$g(x)=-0{,}5\cdot f(x)$

$\Rightarrow y_s=-0{,}5\cdot2{,}25=-1{,}125$

$\Rightarrow S(-1{,}5\,|\,-1{,}125)$

A3 Ausführliche Lösung

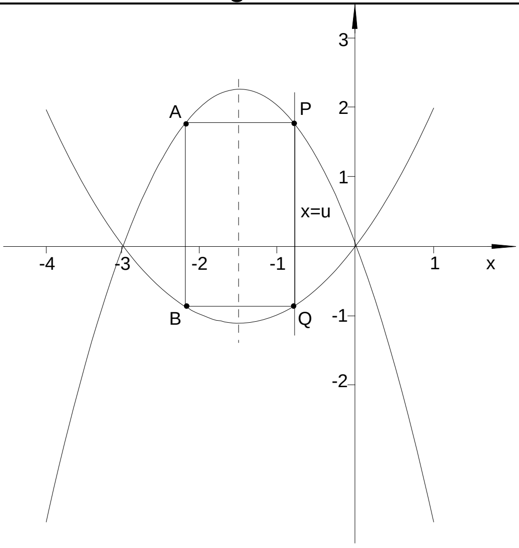
b) Einsetzen von $x=u$ in die Funktionsgleichungen ergibt die $y-$Werte:

$f(u)=-u^2-3u\quad\Rightarrow\underline{\underline{P\left(u\,|\,-u^2-3u\right)}}$

$g(u)=0{,}5u(u+3)\Rightarrow\underline{\underline{Q\left(u\,|\,0{,}5u(u+3)\right)}}$

A3 Ausführliche Lösung

c)



Ergebnis aus b)

$P\left(u \mid -u^2 - 3u\right)$ oder $P\left(u \mid -u(u+3)\right)$

$Q\left(u \mid 0{,}5u(u+3)\right)$

x – Koordinate des Scheitels

$x_S = -1{,}5$

Für u gilt:

$-3 \le u \le 0 \Rightarrow$ u ist negativ

$$\overline{PQ} = \left|\underbrace{-u}_{+}\underbrace{(u+3)}_{+}\right| + \left|\underbrace{0{,}5u}_{-}\underbrace{(u+3)}_{+}\right|$$

$$\Rightarrow \overline{PQ} = -u(u+3) - 0{,}5u(u+3)$$

$$\overline{PQ} = -1{,}5u(u+3)$$

$\overline{AP} = \overline{BQ}$

<u>Falls $-1{,}5 \le u \le 0$</u> $(x = u$ liegt rechts vom Scheitel$)$

dann gilt: $\dfrac{\overline{AP}}{2} = |-1{,}5| - |u| = 1{,}5 + u \;(\text{da u negativ}) \Rightarrow AP = 2(1{,}5 + u)$

Rechteckfläche: $A = \overline{PQ} \cdot \overline{AP} = -1{,}5u(u+3) \cdot 2(1{,}5+u)$

Speziell für $u = -1$ gilt: $A = -1{,}5 \cdot (-1)(-1+3) \cdot 2(1{,}5-1) = \underline{\underline{3FE}}$

Der Umfang des Rechtecks in Abhängigkeit von u:

$$U = 2\left(\overline{PQ} + \overline{AP}\right) = 2\left[-1{,}5u(u+3) + 2(1{,}5+u)\right] = \underline{\underline{-3u^2 - 5u + 6}}$$

<u>Falls $-3 \le u \le -1{,}5$</u> $(x = u$ liegt links vom Scheitel$)$

dann gilt: $\dfrac{\overline{AP}}{2} = |u| - |-1{,}5| = -u - 1{,}5 \;(\text{da u negativ}) \Rightarrow AP = 2(-u - 1{,}5)$

Der Umfang des Rechtecks in Abhängigkeit von u:

$$U = 2\left(\overline{PQ} + \overline{AP}\right) = 2\left[-1{,}5u(u+3) + 2(-u-1{,}5)\right] = \underline{\underline{-3u^2 - 13u - 6}}$$

A3 Ausführliche Lösung

d)

$f(x) = -x^2 - 3x\,;\; g(x) = 0{,}5x(x+3) = 0{,}5x^2 + 1{,}5x$

Die in y – Richtung verschobene Parabel g(x) hat die Funktionsgleichung:

$g^*(x) = 0{,}5x^2 + 1{,}5x + a_0 \quad (x\text{ – Wert des Scheitels bleibt } x_s = -1{,}5)$

Bedingung für die Berührung beider Parabeln:

$f(x) = g^*(x)$ und $D = 0$

$f(x) = g^*(x) \Leftrightarrow x^2 + 3x + \frac{2}{3}a_0 = 0 \Rightarrow p = 3\,;\; q = \frac{2}{3}a_0 \Rightarrow D = \frac{9}{4} - \frac{2}{3}a_0$

$D = 0 \Leftrightarrow a_0 = \frac{27}{8} = 3{,}375 \Rightarrow g^*(x) = 0{,}5x^2 + 1{,}5x + 3{,}375$

Berührungspunkt: $B(-1{,}5 \mid g^*(-1{,}5)) \Rightarrow B(-1{,}5 \mid 2{,}25)$

Die Parabel g(x) wird um $\underline{\underline{3{,}375\text{ LE}}}$ nach oben geschoben

und berührt f(x) in $\underline{\underline{B(-1{,}5 \mid 2{,}25)}}$

A3 Ausführliche Lösung

e)

$f(x) = -x^2 - 3x$

$f(a) = -a^2 - 3a$

$f(a+1) = -(a+1)^2 - 3(a+1) = -a^2 - 5a - 4$

$f(a) - f(a+1) = 4 \Leftrightarrow -a^2 - 3a - (-a^2 - 5a - 4) = 4$

$\Leftrightarrow 2a + 4 = 4 \Leftrightarrow \underline{\underline{a = 0}}$

A4 Ausführliche Lösung

$f(x) = (x-1)(x-2) = x^2 - 3x + 2\,;\; g(x) = ax^2$

$f(x) = g(x) \Leftrightarrow (1-a)x^2 - 3x + 2 = 0\,;$ mit $a \neq 1$

$\Leftrightarrow x^2 - \frac{3}{1-a}x + \frac{2}{1-a} = 0 \Rightarrow p = -\frac{3}{1-a}\,;\; q = \frac{2}{1-a}$

Bedingung für Berührung ist $D = 0$

$$\Rightarrow D = \left(\frac{p}{2}\right)^2 - q = \left(-\frac{3}{2(1-a)}\right)^2 - \frac{2}{1-a} = 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{9}{4(1-a)^2} - \frac{2}{1-a} = 0 \Leftrightarrow \frac{9}{4(1-a)^2} - \frac{8(1-a)}{4(1-a)^2} = 0$$

$$\Leftrightarrow 9 - 8(1-a) = 0 \Leftrightarrow a = -\frac{1}{8}$$

$\underline{\underline{g(x) = -\frac{1}{8}x^2 \text{ berührt } f(x)}}$

A5 Ausführliche Lösung

Normalparabel: $g(x) = x^2$; $f(x) = ax^2 + 1$

$f(x) = g(x) \Leftrightarrow x^2 = -\frac{1}{a-1}$ für $a \neq 1$

für $a > 1 \Rightarrow x^2 = -\frac{1}{a-1} < 0 \Rightarrow$ keine Lösung

für $a < 1 \Rightarrow x^2 = -\frac{1}{a-1} > 0 \Rightarrow$ zwei Lösungen $x_{1/2} = \pm\sqrt{-\frac{1}{a-1}}$

A6 Ausführliche Lösung

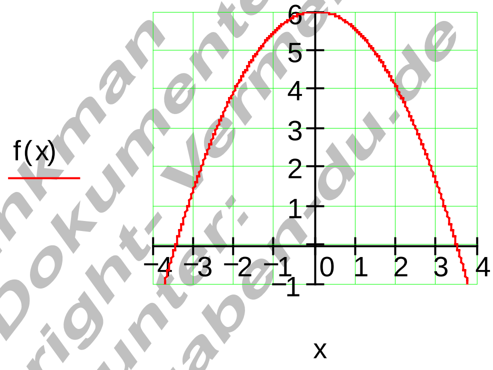
$S(0\,|\,6) \Rightarrow f(x) = a_2x^2 + 6$

$P_x\left(2\sqrt{3}\,|\,0\right)$

$\Rightarrow f\left(2\sqrt{3}\right) = a_2\left(2\sqrt{3}\right)^2 + 6 = 0$

$\Leftrightarrow 12a_2 + 6 = 0 \Leftrightarrow a_2 = -\frac{1}{2}$

$\Rightarrow \underline{\underline{f(x) = -\frac{1}{2}x^2 + 6}}$



A7 Ausführliche Lösung

$f(x) = a_2(x-k)(x+2)$ Linearfaktoren

$f(0) = -k \Leftrightarrow a_2(-k)(2) = -k \Rightarrow a_2 = \frac{1}{2}$

$\Rightarrow f(x) = \frac{1}{2}(x-k)(x+2) = \underline{\underline{\frac{1}{2}\left[x^2 + (2-k)x - 2k\right]}}$

A8 Ausführliche Lösung

$f(x) = a_2x^2 + a_1x + 3$; $g(x) = 2x - 1$

$g(-1) = -2 - 1 = -3 \Rightarrow f(-1) = -3 \Leftrightarrow a_2 - a_1 + 3 = -3$

$g(0{,}5) = 1 - 1 = 0 \Rightarrow f(0{,}5) = 0 \Leftrightarrow 0{,}25a_2 + 0{,}5a_1 + 3 = 0$

$\Rightarrow a_2 = -8$; $a_1 = -2$

$\underline{\underline{f(x) = -8x^2 - 2x + 3}}$