Lösungen Grundlagen quadratische Funktionen IV

Ausführliche Lösungen:

A1 Ausführliche Lösung

$$f(x) = -\frac{1}{2}x^2 + \frac{3}{2}x - \frac{9}{8}$$

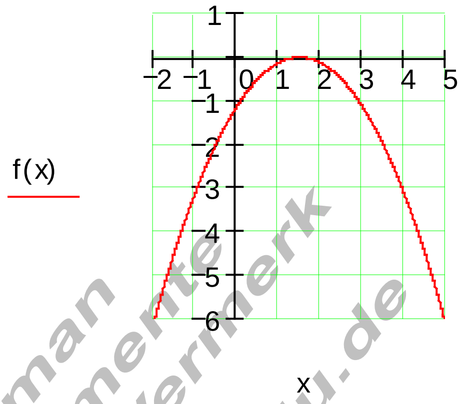
$$f(x) = 0 \Leftrightarrow -\frac{1}{2}x^2 + \frac{3}{2}x - \frac{9}{8} = 0 \mid \cdot(-2)$$

$$\Leftrightarrow x^2 - 3x + \frac{9}{4} = 0 \Rightarrow p = -3\,;\, q = \frac{9}{4}$$

$$\Rightarrow D = 0 \text{ Berührungspunkt} = \text{Scheitel}$$

$$\Rightarrow x_{1/2} = -\frac{p}{2} = \frac{3}{2} \Rightarrow \underline{\underline{P_{x1/2}\left(\frac{3}{2}\,\middle|\,0\right)}}$$

$$\text{Scheitelpunkt}: \underline{\underline{S\left(\frac{3}{2}\,\middle|\,0\right)}}$$



A2 Ausführliche Lösung

a)

$$f(x) = -\frac{1}{8}x^2 + \frac{3}{4}x \Rightarrow \underline{\underline{P_y(0\,|\,0)}}$$

$$f(x) = 0 \Leftrightarrow -\frac{1}{8}x^2 + \frac{3}{4}x = 0$$

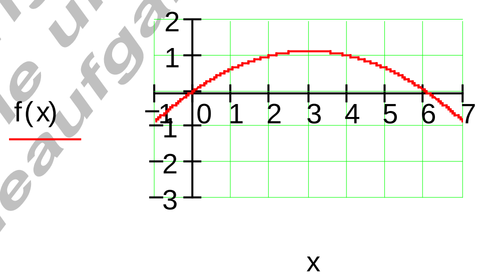
$$\Leftrightarrow x\left(-\frac{1}{8}x + \frac{3}{4}\right) = 0$$

$$\Rightarrow x_1 = 0 \Rightarrow \underline{\underline{P_{x1}(0\,|\,0)}}$$

$$-\frac{1}{8}x + \frac{3}{4} = 0 \Rightarrow x_2 = 6 \Rightarrow \underline{\underline{P_{x2}(6\,|\,0)}}$$

$$x_s = \frac{x_1 + x_2}{3} = \frac{0+6}{2} = 3$$

$$y_s = f(x_s) = f(3) = \frac{9}{8} \Rightarrow \underline{\underline{S\left(3\,\middle|\,\frac{9}{8}\right)}}$$



A2 Ausführliche Lösung

b)

$$f(x) = -\frac{1}{2}(x-3)(x+2)$$

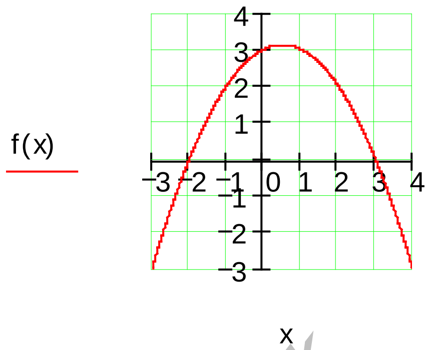
$$f(0) = -\frac{1}{2}(-3)(2) = 3 \Rightarrow \underline{\underline{P_y(0\,|\,3)}}$$

$$f(x) = 0 \Rightarrow x_1 = 3\,;\, x_2 = -2$$

$$\Rightarrow \underline{\underline{P_{x1}(3\,|\,0)\,;\,P_{x2}(-2\,|\,0)}}$$

$$x_s = \frac{3+(-2)}{2} = \frac{1}{2}\,;\, f\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{25}{8}$$

$$\Rightarrow \underline{\underline{S\left(\frac{1}{2}\,|\,\frac{25}{8}\right)}}$$



A2 Ausführliche Lösung

c)

$$f(x) = x^2 + 4x + 1 \Rightarrow \underline{\underline{P_y(0\,|\,1)}}$$

$$f(x) = 0 \Leftrightarrow x^2 + 4x + 1 = 0$$

$$\Rightarrow p = 4\,;\, q = 1 \Rightarrow D = 3$$

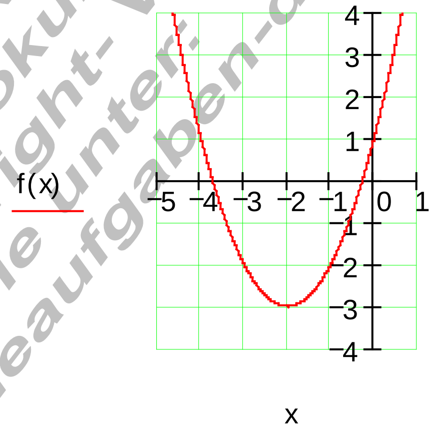
$$x_1 = -2+\sqrt{3}\,;\, x_1 = -2-\sqrt{3}$$

$$\Rightarrow \underline{\underline{P_{x1}\left(-2+\sqrt{3}\,|\,0\right);P_{x2}\left(-2-\sqrt{3}\,|\,0\right)}}$$

$$x_s = \frac{x_1 + x_2}{2}$$

$$= \frac{-2+\sqrt{3}+\left(-2+\sqrt{3}\right)}{2} = -2$$

$$y_s = f(x_s) = f(-2) = -3 \Rightarrow \underline{\underline{S(-2\,|\,-3)}}$$



A2 Ausführliche Lösung

d)

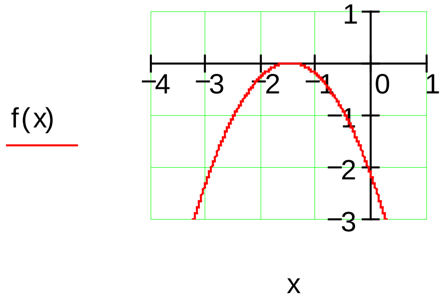
$$f(x) = -0{,}25\left(4x^2 + 12x + 9\right)$$

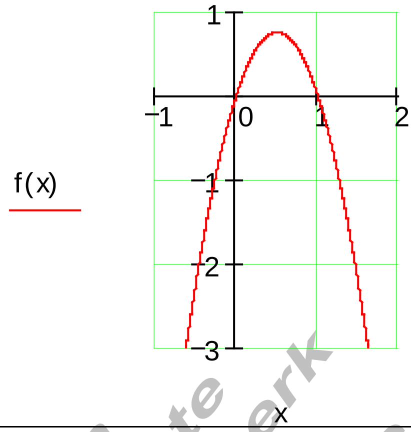
$$= -x^2 - 3x - \frac{9}{4} \Rightarrow \underline{\underline{P_y\left(0\,|\,-\frac{9}{4}\right)}}$$

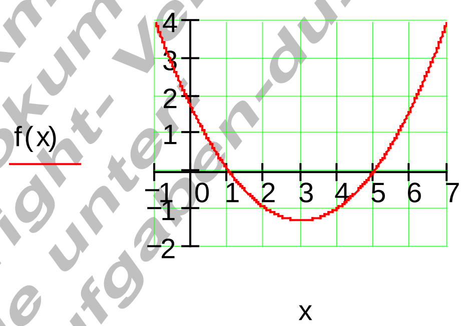
$$f(x) = 0 \Rightarrow \underline{\underline{P_{x1/2}\left(-\frac{3}{2}\,|\,0\right)}}$$

Da $P_{x1/2}$ Berührungspunkt:

$$\Rightarrow \underline{\underline{S\left(-\frac{3}{2}\,|\,0\right)}}$$



A2	Ausführliche Lösung		
	e)	$f(x) = 3x(1-x)$ $f(0) = 0 \Rightarrow \underline{\underline{P_y(0\mid 0)}}$ $f(x) = 0 \Leftrightarrow 3x(1-x) = 0$ $\Rightarrow x_1 = 0\,;\,(1-x) = 0 \Leftrightarrow x_2 = 1$ $\Rightarrow \underline{\underline{P_{x1}(0\mid 0)\,;\,P_{x2}(1\mid 0)}}$ $x_s = \frac{1}{2}\,;\,y_s = f\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{3}{4} \Rightarrow \underline{\underline{S\left(\frac{1}{2}\mid\frac{3}{4}\right)}}$	

A2	Ausführliche Lösung		
	f)	$f(x) = \frac{1}{3}x^2 - 2x + \frac{5}{3} \Rightarrow \underline{\underline{P_y\left(0\mid\frac{5}{3}\right)}}$ $f(x) = 0 \Leftrightarrow \frac{1}{3}x^2 - 2x + \frac{5}{3} = 0 \mid \cdot 3$ $\Leftrightarrow x^2 - 6x + 5 = 0 \Rightarrow x_1 = 1;\, x_2 = 5$ $\Rightarrow \underline{\underline{P_{x1}(1\mid 0)\,;\,P_{x2}(5\mid 0)}}$ $\underline{\underline{S\left(3\mid -\frac{4}{3}\right)}}$	

A3 Ausführliche Lösung

Umfang eines Rechtecks: $U = 2a + 2b$

Rechteckfläche: $A = a \cdot b$

Ansatz: $U = 2a + 2b \Rightarrow b = \frac{U}{2} - a$ in die Flächenformel einsetzen:

$A(a) = a\left(\frac{U}{2} - a\right) = \frac{U}{2}a - a^2 = -a^2 + \frac{U}{2}a$ Parabel nach unten geöffnet

Die Scheitelkoordinaten liefern das Maximum für die Fläche

$A(a) = -1\left[a^2 - \frac{U}{2}a + \left(\frac{U}{4}\right)^2 - \left(\frac{U}{4}\right)^2\right] = -\left(a - \frac{U}{4}\right)^2 + \left(\frac{U}{4}\right)^2$ Scheitelpunktform

$\Rightarrow S\left(\frac{U}{4} \mid \left(\frac{U}{4}\right)^2\right) \Rightarrow$ für $a = \frac{U}{4}$ ist $A(a) = \left(\frac{U}{4}\right)^2$ das Flächenmaximum

Für $U = 18\text{ cm}$ gilt: $a = \frac{18\text{ cm}}{4} = 4{,}5\text{ cm}$ und $b = \frac{U}{2} - a = 9\text{ cm} - 4{,}5\text{ cm} = 4{,}5\text{ cm}$

Für $\underline{\underline{a = 4{,}5\text{ cm}}}$ und $\underline{\underline{b = 4{,}5\text{ cm}}}$ hat das Rechteck den größten Flächeninhalt

$A = a \cdot b = 4{,}5\text{ cm} \cdot 4{,}5\text{ cm} = \underline{\underline{20{,}25\text{ cm}^2}}$ Das ist zufällig ein Quadrat.

Bitte mit $U = 30\text{ cm}$ überprüfen!

A4 Ausführliche Lösungen

a) f(x):

Nullstellen:

$-3 < x_1 < -2$ und

$1 < x_2 < 2$ Symmetrie

Parabel ist nach unten geöffnet

$x_s = -0{,}5$ wegen Symmetrie

g(x):

$P_{x1}(-2 \mid 0); P_{x2}(1 \mid 0)$

Aus der Wertetabelle abgelesen

Parabel ist nach oben geöffnet

$x_s = \frac{x_1 + x_2}{2} = \frac{-2+1}{2} = -0{,}5$

f(x) und g(x) sind symmetrisch zu $x = -0{,}5$

b) f(x): Scheitel $S(2 \mid 4)$

$\Rightarrow f(x) = a_2(x-2)^2 + 4$

$f(0) = 0 \Leftrightarrow a_2 = -1$

$\Rightarrow f(x) = -(x-2)^2 + 4$

Nullstellen:

$(x-2)^2 = 4 \Rightarrow x_1 = 0\,;\ x_2 = 4$

Parabel ist nach unten geöffnet

g(x): Scheitel $S(2 \mid -4{,}5)$

$\Rightarrow g(x) = a_2(x-2)^2 - 4{,}5$

$g(1) = -4 \Rightarrow a_2 = 0{,}5$

$\Rightarrow g(x) = 0{,}5(x-2)^2 - 4{,}5$

Parabel ist nach oben geöffnet

Nullstellen:

$0{,}5(x-2)^2 = 4{,}5 \Rightarrow x_1 = 5\,;\ x_2 = -1$

f(x) und g(x) sind symmetrisch zu $x = 2$

A5	Ausführliche Lösung
	$f(x) = -x^2 - x + 6$ Form einer Normalparabel nach unten geöffnet $P_y\left(0 \mid 6\right)$ $g(x) = \left(2 - x\right)\left(x + 3\right)$ Form einer Normalparabel nach unten geöffnet $P_{x1}\left(-3 \mid 0\right); P_{x2}\left(2 \mid 0\right)$ $h(x) = -\left(x + 0{,}5\right)^2 + \frac{25}{4} \Rightarrow S\left(-\frac{1}{2} \middle\| \frac{25}{4}\right)$ Form einer Normalparabel nach unten geöffnet