

Lösungen Grundaufgaben für lineare und quadratische Funktionen I**Ergebnisse:**

E1	Ergebnisse	
	$f(x) = \frac{1}{2}x + \frac{3}{4} \Rightarrow P_y\left(0 \mid \frac{3}{4}\right)$	$f(x) = \frac{1}{2}x + \frac{3}{4} \Rightarrow P_x\left(-\frac{3}{2} \mid 0\right)$
E2	Ergebnis	
	$f(x) = mx + b$ mit $m = 2$ und $P(-3 \mid 5) \Rightarrow f(x) = 2x + 11$	
E3	Ergebnis	
	$P_1(-3 \mid 5); P_2(2 \mid -1) \Rightarrow f(x) = -\frac{6}{5}x + \frac{7}{5}$	
E4	Ergebnis	
	$f_1(x) = 2x + 1; f_2(x) = -x + 2 \Rightarrow P_s\left(\frac{1}{3} \mid \frac{5}{3}\right)$	
E5	Ergebnis	
	$f(x) = 3x - 7; P(1 \mid -4) \Rightarrow g(x) = -\frac{1}{3}x - \frac{11}{3}$	
E6	Ergebnis	
	$f(x) = x^2 - 2x - 3 \Rightarrow P_y(0 \mid -3); P_{x_1}(3 \mid 0); P_{x_2}(-1 \mid 0); S(1 \mid -4)$	
E7	Ergebnis	
	$f(x) = 2x^2 - 4x + 5 \Leftrightarrow f(x) = 2(x-1)^2 + 3 \Rightarrow S(1 \mid 3)$	
E8	Ergebnis	
	$f_1(x) = \frac{3}{4}x + \frac{7}{4}; f_2(x) = \frac{7}{8}x^2 - x - \frac{7}{8} \Rightarrow P_1(3 \mid 4); P_2(-1 \mid 1)$	
E9	Ergebnis	
	$f_1(x) = x^2 - 6x + 6; f_2(x) = -\frac{3}{4}x^2 + \frac{9}{2}x - \frac{11}{4}$ $\Rightarrow P_1(5 \mid 1); P_2(1 \mid 1); S_1(3 \mid -3); S_2(3 \mid 4)$ Abstand: $ -3 + 4 = 7$	
E10	Ergebnis	
	$P_1(-1 \mid -1); P_2(2 \mid -2); P_3(3 \mid 1) \Rightarrow f(x) = \frac{5}{6}x^2 - \frac{7}{6}x - 3$	
E11	Ergebnisse	
	a)	b)
	$2x + 4y + z = 13$	$x - 2y + z = -1$
	$x - y - z = -4 \Rightarrow L = \{1; 2; 3\}$	$3x + y - z = -4 \Rightarrow L = \{-1; 1; 2\}$
	$x + 2y + 2z = 11$	$x + 4y - 2z = -1$

Ausführliche Lösungen:

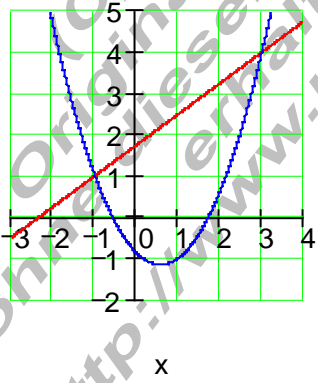
A1	Ausführliche Lösung $f(x) = \frac{1}{2}x + \frac{3}{4}$ Schnittpunkt mit der y – Achse : Bedingung: x – Wert = 0 $\Rightarrow y_s = f(0)$ $\Leftrightarrow f(0) = \frac{1}{2} \cdot 0 + \frac{3}{4}$ $\Leftrightarrow f(x) = \frac{3}{4} \Rightarrow \underline{\underline{P_y \left(0 \mid \frac{3}{4} \right)}}$	$f(x) = \frac{1}{2}x + \frac{3}{4}$ Schnittpunkt mit der x – Achse : Bedingung: $y = f(x_s) = 0$ $\Rightarrow \frac{1}{2}x_s + \frac{3}{4} = 0 \mid -\frac{3}{4} \Leftrightarrow \frac{1}{2}x_s = -\frac{3}{4} \mid \cdot 2$ $\Leftrightarrow x_s = -\frac{3}{4} \cdot 2 \Leftrightarrow x_s = -\frac{3}{2}$ $\Rightarrow \underline{\underline{P_x \left(-\frac{3}{2} \mid 0 \right)}}$
A2	Ausführliche Lösung $f(x) = mx + b$ mit $m = 2$ folgt $f(x) = 2x + b$ $P(-3 \mid 5) \Rightarrow f(-3) = 5 \Leftrightarrow 2 \cdot (-3) + b = 5$ $\Leftrightarrow -6 + b = 5 \mid +6 \Leftrightarrow b = 5 + 6 \Leftrightarrow b = 11$ $\Rightarrow \underline{\underline{f(x) = 2x + 11}}$ Vorgehensweise: 1. Der Wert der Steigung und die Koordinaten des Punktes P werden in die Funktionsgleichung eingesetzt. 2. Die so entstandene Gleichung wird nach b aufgelöst.	
A3	Ausführliche Lösung $P_1(-3 \mid 5); P_2(2 \mid -1)$ für die Steigung m gilt: $m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{-1 - 5}{2 - (-3)} = \frac{-6}{5} = -\frac{6}{5}$ $\Rightarrow f(x) = -\frac{6}{5}x + b$ $P_2(2 \mid -1) \Rightarrow f(2) = -1 \Leftrightarrow -\frac{6}{5} \cdot 2 + b = -1 \Leftrightarrow -\frac{12}{5} + b = -1 \mid +\frac{12}{5}$ $\Leftrightarrow b = -1 + \frac{12}{5} \Leftrightarrow b = -\frac{5}{5} + \frac{12}{5} \Leftrightarrow b = \frac{7}{5} \Rightarrow \underline{\underline{f(x) = -\frac{6}{5}x + \frac{7}{5}}}$ Vorgehensweise: 1. Die Steigung m wird mit der Steigungsformel berechnet. 2. Die Koordinaten eines der beiden Punkte (hier P_2) werden in die Funktionsgleichung eingesetzt. 3. Die so entstandene Gleichung wird nach b aufgelöst.	

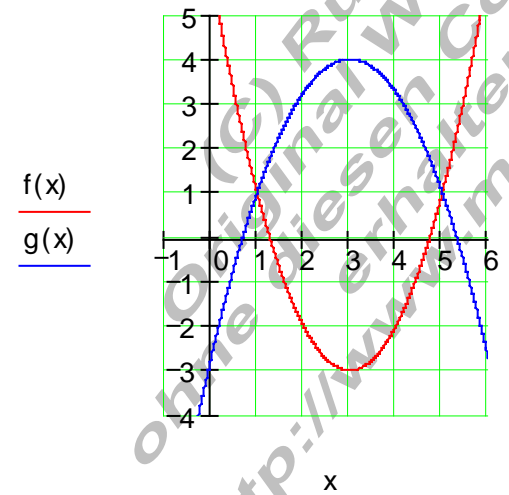
A4	<p>Ausführliche Lösung</p> $f_1(x) = 2x + 1 \quad \text{und} \quad f_2(x) = -x + 2$ $f_1(x_s) = f_2(x_s) \Leftrightarrow 2x_s + 1 = -x_s + 2 \quad +x_s \Leftrightarrow 3x_s + 1 = 2 \quad -1$ $\Leftrightarrow 3x_s = 1 \quad :3 \Leftrightarrow x_s = \frac{1}{3}$ $y_s = f_1(x_s) = f\left(\frac{1}{3}\right) = 2 \cdot \frac{1}{3} + 1 = \frac{2}{3} + 1 = \frac{5}{3} \Rightarrow \underline{\underline{P_s\left(\frac{1}{3} \mid \frac{5}{3}\right)}}$ <p>Vorgehensweise: Für den Schnittpunkt beider Geraden gilt: $f_1(x_s) = f_2(x_s)$ Das Gleichsetzen beider Funktionsgleichungen liefert die x-Koordinate des Schnittpunktes. Den y- Wert erhält man durch Einsetzen des Wertes in einer der beiden Funktionsgleichungen.</p>
----	--

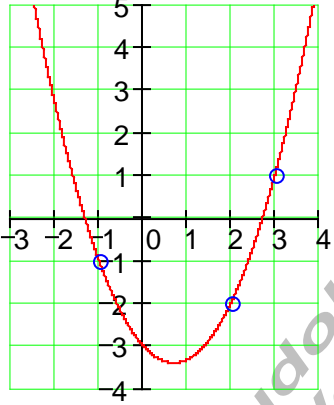
A5	<p>Ausführliche Lösung</p> $f(x) = 3x - 7 \quad P(1 \mid -4)$ $m_1 = 3 \Rightarrow m_2 = -\frac{1}{m_1} = -\frac{1}{3} \Rightarrow g(x) = -\frac{1}{3}x + b$ $P(1 \mid -4) \Rightarrow g(1) = -4 \Leftrightarrow -\frac{1}{3} \cdot 1 + b = -4 \quad +\frac{1}{3}$ $\Leftrightarrow b = -4 + \frac{1}{3} \Leftrightarrow b = -\frac{12}{3} + \frac{1}{3} \Leftrightarrow b = -\frac{11}{3}$ $\Rightarrow \underline{\underline{g(x) = -\frac{1}{3}x - \frac{11}{3}}}$ <p>Vorgehensweise: Zuerst wird die Steigung m_2 der senkrechten Geraden aus der Steigung der bekannten Geraden bestimmt. $\Rightarrow g(x) = m_2x + b$ Die x – Koordinate von P wird in die Gleichung eingesetzt. Daraus lässt sich dann b errechnen.</p>
----	---

A6	<p>Ausführliche Lösung</p> $f(x) = x^2 - 2x - 3$ $P_y(0 y_s) \Rightarrow y_s = f(0) = 0^2 - 2 \cdot 0 - 3 = -3 \Rightarrow \underline{\underline{P_y(0 -3)}}$ $P_x(x_s 0) \Rightarrow f(x_s) = 0 \Leftrightarrow x_s^2 - 2x_s - 3 = 0 \text{ quadratische Gleichung}$ $p = -2; q = -3 \Rightarrow D = \left(\frac{p}{2}\right)^2 - q = 1 + 3 = 4 \Rightarrow \sqrt{D} = \sqrt{4} = 2$ $x_{1/2} = -\frac{p}{2} \pm \sqrt{D} \quad \left \begin{array}{l} x_1 = 1 + 2 = 3 \\ x_2 = 1 - 2 = -1 \end{array} \right. \Rightarrow \underline{\underline{P_{x1}(3 0) \quad P_{x2}(-1 0)}}$ $x_s = \frac{x_1 + x_2}{2} = \frac{3 + (-1)}{2} = \frac{2}{2} = 1$ $y_s = f(x_s) = f(1) = 1^2 - 2 \cdot 1 - 3 = -4 \Rightarrow \underline{\underline{S(1 -4)}}$ <p>Vorgehensweise: Die x - Koordinate des Scheitelpunktes liegt symmetrisch zu den Nullstellen. Der Schnittpunkt mit der y- Achse hat die x- Koordinate 0, also $f(0) = y_s$ Schnittpunkte mit der x- Achse haben die y- Koordinate 0, also $f(x_s) = 0$ Das führt auf eine quadratische Gleichung, deren Lösung die x- Koordinaten der Achsenschnittpunkte sind.</p>
----	---

A6	<p>Der Graph</p> <p>Der Graph einer quadratischen Funktion ist eine Parabel.</p> <p>Jede Parabel ist symmetrisch zu der Achse, die durch den Scheitelpunkt führt.</p> <p>Falls es Schnittpunkte mit der x- Achse gibt, liegen auch diese symmetrisch zu der Scheitelachse.</p> <p>Die x- Koordinate des Scheitelpunktes liegt genau in der Mitte zwischen den Nullstellen.</p>	<p style="text-align: center;">x</p>
----	---	--------------------------------------

A7	<p>Ausführliche Lösung</p> <p>Der Koeffizient von x^2 wird ausgeklammert.</p> <p>In der eckigen Klammer wird eine quadratische Ergänzung durchgeführt.</p> <p>Nach Multiplikation mit dem Koeffizienten erhält man die Scheitelpunktform, aus der sich die Scheitelkoordinaten ablesen lassen.</p>	$f(x) = 2x^2 - 4x + 5$ $\Leftrightarrow f(x) = 2 \left[x^2 - 2x + \frac{5}{2} \right]$ $\Leftrightarrow f(x) = 2 \left[\underbrace{x^2 - 2x + 1^2}_{\text{2. bin. Formel}} - 1^2 + \frac{5}{2} \right]$ $\Leftrightarrow f(x) = 2 \left[(x-1)^2 + \frac{3}{2} \right]$ $\Leftrightarrow f(x) = 2(x-1)^2 + 3 \Rightarrow \underline{\underline{S(1 3)}}$
A8	<p>Ausführliche Lösung</p> <p>Für den Schnittpunkt der Geraden mit der Parabel gilt: $f_1(x) = f_2(x)$</p> <p>Das Gleichsetzen beider Funktionsgleichungen liefert eine quadratische Gleichung. Deren Lösung liefert die x- Koordinaten für den Schnittpunkt.</p> <p>Die dazugehörigen y- Koordinaten erhält man durch Einsetzen der Werte in f_1 oder f_2.</p> <div style="display: flex; align-items: center;"> <div style="margin-right: 10px;"> $f_1(x)$ <hr style="width: 20px; border: 1px solid red;"/> $f_2(x)$ <hr style="width: 20px; border: 1px solid blue;"/> </div>  </div>	$f_1(x) = \frac{3}{4}x + \frac{7}{4}; f_2(x) = \frac{7}{8}x^2 - x - \frac{7}{8}$ <p>Bedingung für Schnitt: $f_1(x) = f_2(x)$</p> $\Leftrightarrow \frac{3}{4}x + \frac{7}{4} = \frac{7}{8}x^2 - x - \frac{7}{8}$ $\Leftrightarrow -\frac{7}{8}x^2 + \frac{3}{4}x + x + \frac{7}{4} + \frac{7}{8} = 0$ $\Leftrightarrow -\frac{7}{8}x^2 + \frac{6}{8}x + \frac{8}{8}x + \frac{14}{8} + \frac{7}{8} = 0$ $\Leftrightarrow -\frac{7}{8}x^2 + \frac{14}{8}x + \frac{21}{8} = 0$ $\Leftrightarrow x^2 - 2x - 3 = 0 \Rightarrow p = -2; q = -3$ $\Rightarrow D = \left(\frac{p}{2}\right)^2 - q = 1 + 3 = 4 \Rightarrow \sqrt{D} = 2$ $x_{1/2} = -\frac{p}{2} \pm \sqrt{D} \quad \left \begin{array}{l} x_1 = 1 + 2 = 3 \\ x_2 = 1 - 2 = -1 \end{array} \right.$ $y_1 = f_1(3) = \frac{3}{4} \cdot 3 + \frac{7}{4} = \frac{16}{4} = 4$ $y_2 = f_1(-1) = \frac{3}{4} \cdot (-1) + \frac{7}{4} = \frac{4}{4} = 1$ $\Rightarrow \underline{\underline{P_1(3 4) \quad P_2(-1 1)}}$

A9	Ausführliche Lösung	
	<p> $f_1(x) = x^2 - 6x + 6$ $f_2(x) = -\frac{3}{4}x^2 + \frac{9}{2}x - \frac{11}{4}$ Für den Schnittpunkt beider Parabeln gilt: $f_1(x) = f_2(x)$ </p> <p>Das Gleichsetzen beider Funktionsgleichungen liefert eine quadratische Gleichung. Deren Lösung liefert die x- Koordinaten für den Schnittpunkt.</p> <p>Die dazugehörigen y- Koordinaten erhält man durch Einsetzen der Werte in f_1 oder f_2.</p> <p>Da beide y- Koordinaten auf gleicher Höhe liegen und aus der Symmetrie der Parabel findet man die x- Koordinate der Scheitelpunkte. Damit gelangt man an die Scheitelkoordinaten und kann den Abstand bestimmen.</p>	<p> $f_1(x) = f_2(x)$ $\Leftrightarrow x^2 - 6x + 6 = -\frac{3}{4}x^2 + \frac{9}{2}x - \frac{11}{4}$ $\Leftrightarrow x^2 + \frac{3}{4}x^2 - 6x - \frac{9}{2}x + 6 + \frac{11}{4} = 0$ $\Leftrightarrow \frac{7}{4}x^2 - \frac{21}{2}x + \frac{35}{4} = 0 \quad \cdot \frac{4}{7}$ $\Leftrightarrow x^2 - 6x + 5 = 0$ $\Leftrightarrow x^2 - 6x + 3^2 - 3^2 + 5 = 0$ $\Leftrightarrow (x-3)^2 - 9 + 5 = 0$ $\Leftrightarrow (x-3)^2 = 4$ $\Leftrightarrow x-3 = 2$ $\Leftrightarrow x-3 = 2 \Rightarrow \underline{x_1 = 5}$ $\quad \quad \quad x-3 = -2 \Rightarrow \underline{x_2 = 1}$ $f_1(5) = 25 - 30 + 6 = 1$ $f_1(1) = 1 - 6 + 6 = 1$ $\Rightarrow \underline{P_1(5 1)} \quad \underline{P_2(1 1)}$ </p>
		<p>x - Koordinate der Scheitels:</p> $x_{s_1} = x_{s_2} = \frac{5+1}{2} = 3$ $\Rightarrow y_{s_1} = f_1(x_{s_1}) = f_1(3)$ $= 9 - 18 + 6 = -3$ $y_{s_2} = f_2(x_{s_2}) = f_2(3)$ $= -\frac{3}{4} \cdot 9 + \frac{9}{2} \cdot 3 - \frac{11}{4} = 4$ $\Rightarrow \underline{S_1(3 -3)} \quad \underline{S_2(3 4)}$ $\Rightarrow \text{Abstand: } -3 + 4 = \underline{7}$

A10	Ausführliche Lösung	
	<p>Durch Einsetzen der Koordinaten der drei Punkte in die allgemeine Funktionsgleichung entsteht ein Gleichungssystem mit drei Variablen.</p> $f(x) = ax^2 + bx + c$ $P_1(-1 -1): 1 \cdot a - 1 \cdot b + 1 \cdot c = -1$ $P_2(2 -2): 4 \cdot a + 2 \cdot b + 1 \cdot c = -2$ $P_3(3 1): 9 \cdot a + 3 \cdot b + 1 \cdot c = 1$ <p>Dieses ist mit den Gauß- Algorithmus lösbar und liefert die Koeffizienten a, b und c.</p>	$\begin{array}{ccc c} 1 & -1 & 1 & -1 \\ 4 & 2 & 1 & -2 \\ 9 & 3 & 1 & 1 \end{array} \quad \begin{array}{l} \\ \text{II} - 4 \cdot \text{I} \\ \text{III} - 9 \cdot \text{I} \end{array}$ <hr/> $\begin{array}{ccc c} 1 & -1 & 1 & -1 \\ 0 & 6 & -3 & 2 \\ 0 & 12 & -8 & 10 \end{array} \quad \begin{array}{l} \\ \\ \text{III} - 2 \cdot \text{II} \end{array}$ <hr/> $\begin{array}{ccc c} 1 & -1 & 1 & -1 \\ 0 & 6 & -3 & 2 \\ 0 & 0 & -2 & 6 \end{array}$ <hr/> $-2c = 6 \Leftrightarrow \underline{\underline{c = -3}}$ $6b - 3 \cdot (-3) = 2 \Leftrightarrow \underline{\underline{b = -\frac{7}{6}}}$ $a - 1 \cdot \left(-\frac{7}{6}\right) + 1 \cdot (-3) = -1 \Leftrightarrow \underline{\underline{a = \frac{5}{6}}}$ $\underline{\underline{f(x) = \frac{5}{6}x^2 - \frac{7}{6}x - 3}}$
		

A11	Ausführliche Lösung	
	<p>a) $2x + 4y + z = 13$ $x - y - z = -4$ $x + 2y + 2z = 11$</p> $\begin{array}{ccc c} 2 & 4 & 1 & 13 \\ 1 & -1 & -1 & -4 \\ 1 & 2 & 2 & 11 \\ \hline 1 & 2 & 2 & 11 \\ 1 & -1 & -1 & -4 & \text{II-I} \\ 2 & 4 & 1 & 13 & \text{III-2}\cdot\text{I} \\ \hline 1 & 2 & 2 & 11 \\ 0 & -3 & -3 & -15 \\ 0 & 0 & -3 & -9 \\ \hline -3z = -9 \\ \Rightarrow \underline{\underline{z = 3}} \\ -3y - 3\cdot 3 = -15 \\ \Rightarrow \underline{\underline{y = 2}} \\ x + 2\cdot 2 + 2\cdot 3 = 11 \\ \Rightarrow \underline{\underline{x = 1}} \end{array}$	<p>b) $x - 2y + z = -1$ $3x + y - z = -4$ $x + 4y - 2z = -1$</p> $\begin{array}{ccc c} 1 & -2 & 2 & 1 \\ 3 & 1 & -1 & -4 & \text{II-3}\cdot\text{I} \\ 1 & 4 & -2 & -1 & \text{III-I} \\ \hline 1 & -2 & 2 & 1 \\ 0 & 7 & -7 & -7 & :7 \\ 0 & 6 & -4 & -2 & :2 \\ \hline 1 & -2 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & -1 \\ 0 & 3 & -2 & -1 & \text{III-3}\cdot\text{II} \\ \hline 1 & -2 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ \hline \underline{\underline{z = 2}} \\ y - 1\cdot 2 = -1 \\ \Leftrightarrow \underline{\underline{y = 1}} \\ x - 2\cdot 1 + 2\cdot 2 = 1 \\ \Leftrightarrow \underline{\underline{x = -1}} \end{array}$