Trainingsaufgaben zur Abiturvorbereitung

4. Exponentialgleichungen lösen

Aufgaben

Lösen Sie folgende Exponentialgleichungen.
Falls nötig, benutzen Sie auch die auf der letzten Seite stehenden Potenz- und Logarithmengesetze.

1.	$6-\frac{3}{2}e^{2-2x}=0$	2.	$\frac{1}{4}e^{4x}-\frac{e}{2}=1$
3.	$\frac{1}{2}e^{x}-e^{x+1}=0$	4.	$(3+2x)e^{x-1}=0$
5.	$-2x^{2}e^{-x+2}=0$	6.	$-\frac{1}{5}e^{x}-1+10e^{-x}=0$
7.	$4-3e^{-\frac{1}{2}x}=e^{\frac{1}{2}x}$	8.	$-\frac{3}{4}e^{-2x}+5=e^{-x}$
9.	$\frac{2x}{e^{x}+1}=0$	10.	$\left(2-e^{x}\right)^{2}=\left(e^{x}-3\right)^{2}$

p4_expgl_t_01.doc

Potenzgesetze

$a^m\cdot a^n=a^{m+n}$	$\frac{a^m}{a^n}=a^{m-n}$	$a^n\cdot b^n=(a\cdot b)^n$	$\frac{a^n}{b^n}=\left(\frac{a}{b}\right)^n$
$\left(a^n\right)^m=a^{n\cdot m}$	$\sqrt[n]{a^m}=a^{\frac{m}{n}}$	$a^0=1$	$\frac{1}{a^n}=a^{-n}$

Allgemeine Logarithmengesetze

$a^b=c\Leftrightarrow b=\log_a(c)$	$\log_{10}(c)=\lg(c)$	$\log_e(c)=\ln(c)$
$\log_a(u\cdot v)=\log_a(u)+\log_a(v)$	$\log_a\left(\frac{u}{v}\right)=\log_a(u)-\log_a(v)$	$\log_a\left(c^q\right)=q\cdot\log_a(c)$

Besonderheiten bei speziellen Basen

Basis 10	$10^0=1$	$\lg(1)=0$	$\lg(10)=1$	$c=10^{\lg(c)}$
Basis e	$e^0=1$	$\ln(1)=0$	$\ln(e)=1$	$c=e^{\ln(c)}$
Basis a	$a^0=1$	$\log_a(1)=0$	$\log_a(a)=1$	$c=a^{\log_a(c)}$

Trainingsaufgaben zur Abiturvorbereitung

4. Exponentialgleichungen lösen

Ergebnisse:

E1	Ergebnis
	$6-\frac{3}{2}e^{2-2x}=0 \Rightarrow x=1-\ln(2)$

E2	Ergebnis
	$\frac{1}{4}e^{4x}-\frac{e}{2}=1 \Rightarrow x=\frac{1}{4}\ln(4+2e)$

E3	Ergebnis
	$\frac{1}{2}e^{x}-e^{x+1}=0 \Rightarrow$ keine Lösung

E4	Ergebnis
	$(3+2x)e^{x-1}=0 \Rightarrow x=-\frac{3}{2}$

E5	Ergebnis
	$-2x^2e^{-x+2}=0 \Rightarrow x=0$

E6	Ergebnis
	$-\frac{1}{5}e^{x}-1+10e^{-x}=0 \Rightarrow x_1=\ln(5)$

E7	Ergebnis
	$4-3e^{-\frac{1}{2}x}=e^{\frac{1}{2}x} \Rightarrow x_1=2\ln(3)$ und $x_2=0$

E8	Ergebnis
	$-\frac{3}{4}e^{-2x}+5=e^{-x} \Rightarrow x_1=-\ln(2)$

E9	Ergebnis
	$\frac{2x}{e^{x}+1}=0 \Rightarrow x=0$

E10	Ergebnis
	$\left(2-e^{x}\right)^2=\left(e^{x}-3\right)^2 \Rightarrow x=\ln\left(\frac{5}{2}\right)$

Ausführliche Lösungen:

A1	Ausführliche Lösung
	$6-\frac{3}{2}e^{2-2x}=0 \Leftrightarrow \frac{3}{2}e^{2-2x}=6 \mid :\frac{3}{2} \Leftrightarrow e^{2-2x}=4 \mid \ln(\ )$ $\Leftrightarrow 2-2x=\ln(4) \mid -2 \Leftrightarrow -2x=\ln(4)-2 \mid :(-2) \Leftrightarrow x=1-\frac{1}{2}\ln(4)$ $\Leftrightarrow x=1-\ln\left(4^{\frac{1}{2}}\right) \Leftrightarrow \underline{\underline{x=1-\ln(2)}}$

A2	Ausführliche Lösung
	$\frac{1}{4}e^{4x}-\frac{1}{2}e=1 \mid +\frac{1}{2}e \Leftrightarrow \frac{1}{4}e^{4x}=1+\frac{1}{2}e \mid \cdot 4 \Leftrightarrow e^{4x}=4+2e \mid \ln(\ )$ $\Leftrightarrow 4x=\ln(4+2e) \mid :4 \Leftrightarrow \underline{\underline{x=\frac{1}{4}\ln(4+2e)}}$

A3	Ausführliche Lösung
	$\frac{1}{2}e^{x}-e^{x+1}=0 \mid \cdot 2 \Leftrightarrow e^{x}-2e^{x+1}=0 \mid +2e^{x+1} \Leftrightarrow e^{x}=2e^{x+1} \mid \ln(\ )$ $\Leftrightarrow \ln\left(e^{x}\right)=\ln\left(2e^{x+1}\right) \Leftrightarrow x=\ln(2)+\ln\left(e^{x+1}\right) \Leftrightarrow x=\ln(2)+x+1 \mid -x$ $\Leftrightarrow 0=\ln(2)+1 \mid -1 \Leftrightarrow \ln(2)=-1$ widerspruch $\Leftrightarrow$ keine Lösung

A4	Ausführliche Lösung
	$(3+2x)e^{x-1}=0 \Leftrightarrow 3+2x=0 \mid -3$ $\Leftrightarrow 2x=-3 \mid :2 \Leftrightarrow \underline{\underline{x=-\frac{3}{2}}}$ e^{x-1} ist die Funktion x^{x} verschoben um 1 EH auf der x – Achse nach rechts. Die Funktion e^{x} hat keine Nullstelle.

A5	Ausführliche Lösung
	$-2x^{2}e^{-x+2}=0$ $-2x^{2}e^{-x+2}=0 \Leftrightarrow -2x^{2}=0$ $\Leftrightarrow \underline{\underline{x=0}}$ e^{-x+2} ist die Funktion e^{-x} verschoben um 2 EH auf der x – Achse nach links. Die Funktion e^{-x} hat keine Nullstelle.

A6	Ausführliche Lösung
	$-\frac{1}{5}e^x-1+10e^{-x}=0$ Substitution $u=e^x \Leftrightarrow -\frac{1}{5}u-1+\frac{10}{u}=0 \mid \cdot u$
	$\Leftrightarrow -\frac{1}{5}u-1+\frac{10}{u}=0 \mid \cdot(-5) \quad \Leftrightarrow \quad u^2+5u-50=0$
	$p=5\,;\,q=-50 \Rightarrow D=\left(\frac{p}{2}\right)^2-q=\frac{25}{4}+\frac{200}{4}=\frac{225}{4} \Rightarrow \sqrt{D}=\sqrt{\frac{225}{4}}=\frac{15}{2}$
	$u_{1/2}=-\frac{p}{2}\pm\sqrt{D} \;\Big\vert\; u_1=-\frac{5}{2}+\frac{15}{2}=5 \quad u_2=-\frac{5}{2}-\frac{15}{2}=-10$
	$u_1=5 \Leftrightarrow e^x=5 \Leftrightarrow \underline{\underline{x_1=\ln(5)}}$
	$u_2=-10 \Leftrightarrow e^x=-10 \Rightarrow$ keine Lösung

A7	Ausführliche Lösung
	$4-3e^{-\frac{1}{2}x}=e^{\frac{1}{2}x}$ Substitution $u=e^{\frac{1}{2}x} \Leftrightarrow 4-\frac{3}{u}=u \mid \cdot u$
	$\Leftrightarrow 4u-3=u^2 \mid -u^2 \quad \Leftrightarrow \quad -u^2+4u-3=0 \mid \cdot(-1) \quad \Leftrightarrow \quad u^2-4u+3=0$
	$p=-4\,;\,q=3 \Rightarrow D=\left(\frac{p}{2}\right)^2-q=4-3=1 \Rightarrow \sqrt{D}=\sqrt{1}=1$
	$u_{1/2}=-\frac{p}{2}\pm\sqrt{D} \;\Big\vert\; u_1=2+1=3 \quad u_2=2-1=1$
	$u_1=3 \Leftrightarrow e^{\frac{1}{2}x}=3 \Leftrightarrow \frac{1}{2}x=\ln(3) \Leftrightarrow \underline{\underline{x_1=2\ln(3)}}$
	$u_2=1 \Leftrightarrow e^{\frac{1}{2}x}=1 \Leftrightarrow \frac{1}{2}x=\ln(1) \Leftrightarrow x_2=2\underbrace{\ln(1)}_{0} \Leftrightarrow \underline{\underline{x_2=0}}$

A8	Ausführliche Lösung
	$-\frac{3}{4}e^{-2x}+5=e^{-x}$ Substitution $u=e^{-x} \Leftrightarrow -\frac{3}{4}u^2+5=u \mid -u$ $\Leftrightarrow -\frac{3}{4}u^2-u+5=0 \mid :\left(-\frac{3}{4}\right) \quad \Leftrightarrow \quad u^2+\frac{4}{3}u-\frac{20}{3}=0$ $p=\frac{4}{3};\, q=-\frac{20}{3} \Rightarrow D=\left(\frac{p}{2}\right)^2-q=\frac{4}{9}+\frac{60}{9}=\frac{64}{9} \Rightarrow \sqrt{D}=\sqrt{\frac{64}{9}}=\frac{8}{3}$ $u_{1/2}=-\frac{p}{2}\pm\sqrt{D} \;\Big\vert\; u_1=-\frac{2}{3}+\frac{8}{3}=2 \quad u_2=-\frac{2}{3}-\frac{8}{3}=-\frac{11}{3}$ $u_1=2 \Leftrightarrow e^{-x}=2 \Leftrightarrow -x=\ln(2) \Leftrightarrow \underline{\underline{x_1=-\ln(2)}}$ $u_2=-\frac{11}{3} \Leftrightarrow e^{-x}=-\frac{11}{3} \Leftrightarrow -x=\underbrace{\ln\left(-\frac{11}{3}\right)}_{\text{nicht definiert}} \Rightarrow$ keine Lösung

A9	Ausführliche Lösung
	$\frac{2x}{e^x+1}=0 \mid \cdot\left(e^x+1\right) \quad \Leftrightarrow \quad 2x=0 \quad \Leftrightarrow \quad \underline{\underline{x=0}}$

A10	Ausführliche Lösung
	$\left(2-e^x\right)^2=\left(e^x-3\right)^2 \quad \Leftrightarrow \quad 4-4e^x+e^{2x}=e^{2x}-6e^x+9 \mid -e^{2x}$ $\Leftrightarrow 4-4e^x=-6e^x+9 \mid +6e^x \quad \Leftrightarrow \quad 4+2e^x=9 \mid -4 \quad \Leftrightarrow \quad 2e^x=5 \mid :2$ $\Leftrightarrow e^x=\frac{5}{2} \mid \ln(\;) \quad \Leftrightarrow \quad \underline{\underline{x=\ln\left(\frac{5}{2}\right)}}$