

## Trainingsaufgaben zur Abiturvorbereitung

### 4. Exponentialgleichungen lösen

#### Aufgaben

Lösen Sie folgende Exponentialgleichungen. Falls nötig, benutzen Sie auch die auf der letzten Seite stehenden Potenz- und Logarithmengesetze.	
1.	$6 - \frac{3}{2}e^{2-2x} = 0$
2.	$\frac{1}{4}e^{4x} - \frac{e}{2} = 1$
3.	$\frac{1}{2}e^x - e^{x+1} = 0$
4.	$(3 + 2x)e^{x-1} = 0$
5.	$-2x^2e^{-x+2} = 0$
6.	$-\frac{1}{5}e^x - 1 + 10e^{-x} = 0$
7.	$4 - 3e^{-\frac{1}{2}x} = e^{\frac{1}{2}x}$
8.	$-\frac{3}{4}e^{-2x} + 5 = e^{-x}$
9.	$\frac{2x}{e^x + 1} = 0$
10.	$(2 - e^x)^2 = (e^x - 3)^2$

p4\_exppl\_t\_01.doc

#### Potenzgesetze

$a^m \cdot a^n = a^{m+n}$	$\frac{a^m}{a^n} = a^{m-n}$	$a^n \cdot b^n = (a \cdot b)^n$	$\frac{a^n}{b^n} = \left(\frac{a}{b}\right)^n$
$(a^n)^m = a^{n \cdot m}$	$\sqrt[n]{a^m} = a^{\frac{m}{n}}$	$a^0 = 1$	$\frac{1}{a^n} = a^{-n}$

#### Allgemeine Logarithmengesetze

$a^b = c \Leftrightarrow b = \log_a(c)$	$\log_{10}(c) = \lg(c)$	$\log_e(c) = \ln(c)$
$\log_a(u \cdot v) = \log_a(u) + \log_a(v)$	$\log_a\left(\frac{u}{v}\right) = \log_a(u) - \log_a(v)$	$\log_a(c^q) = q \cdot \log_a(c)$

#### Besonderheiten bei speziellen Basen

Basis 10	$10^0 = 1$	$\lg(1) = 0$	$\lg(10) = 1$	$c = 10^{\lg(c)}$
Basis e	$e^0 = 1$	$\ln(1) = 0$	$\ln(e) = 1$	$c = e^{\ln(c)}$
Basis a	$a^0 = 1$	$\log_a(1) = 0$	$\log_a(a) = 1$	$c = a^{\log_a(c)}$

**Trainingsaufgaben zur Abiturvorbereitung****4. Exponentialgleichungen lösen****Ergebnisse:**

E1	Ergebnis $6 - \frac{3}{2}e^{2-2x} = 0 \Rightarrow x = 1 - \ln(2)$
E2	Ergebnis $\frac{1}{4}e^{4x} - \frac{e}{2} = 1 \Rightarrow x = \frac{1}{4}\ln(4 + 2e)$
E3	Ergebnis $\frac{1}{2}e^x - e^{x+1} = 0 \Rightarrow$ keine Lösung
E4	Ergebnis $(3 + 2x)e^{x-1} = 0 \Rightarrow x = -\frac{3}{2}$
E5	Ergebnis $-2x^2e^{-x+2} = 0 \Rightarrow x = 0$
E6	Ergebnis $-\frac{1}{5}e^x - 1 + 10e^{-x} = 0 \Rightarrow x_1 = \ln(5)$
E7	Ergebnis $4 - 3e^{-\frac{1}{2}x} = e^{\frac{1}{2}x} \Rightarrow x_1 = 2\ln(3)$ und $x_2 = 0$
E8	Ergebnis $-\frac{3}{4}e^{-2x} + 5 = e^{-x} \Rightarrow x_1 = -\ln(2)$
E9	Ergebnis $\frac{2x}{e^x + 1} = 0 \Rightarrow x = 0$
E10	Ergebnis $(2 - e^x)^2 = (e^x - 3)^2 \Rightarrow x = \ln\left(\frac{5}{2}\right)$

**Ausführliche Lösungen:**

A1	<b>Ausführliche Lösung</b> $6 - \frac{3}{2}e^{2-2x} = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \frac{3}{2}e^{2-2x} = 6 \quad   : \frac{3}{2} \quad \Leftrightarrow \quad e^{2-2x} = 4 \quad   \ln( )$ $\Leftrightarrow 2 - 2x = \ln(4) \quad   -2 \quad \Leftrightarrow \quad -2x = \ln(4) - 2 \quad   : (-2) \quad \Leftrightarrow \quad x = 1 - \frac{1}{2}\ln(4)$ $\Leftrightarrow x = 1 - \ln\left(4^{\frac{1}{2}}\right) \quad \Leftrightarrow \quad \underline{\underline{x = 1 - \ln(2)}}$
A2	<b>Ausführliche Lösung</b> $\frac{1}{4}e^{4x} - \frac{1}{2}e = 1 \quad   + \frac{1}{2}e \quad \Leftrightarrow \quad \frac{1}{4}e^{4x} = 1 + \frac{1}{2}e \quad   \cdot 4 \quad \Leftrightarrow \quad e^{4x} = 4 + 2e \quad   \ln( )$ $\Leftrightarrow 4x = \ln(4 + 2e) \quad   : 4 \quad \Leftrightarrow \quad \underline{\underline{x = \frac{1}{4}\ln(4 + 2e)}}$
A3	<b>Ausführliche Lösung</b> $\frac{1}{2}e^x - e^{x+1} = 0 \quad   \cdot 2 \quad \Leftrightarrow \quad e^x - 2e^{x+1} = 0 \quad   + 2e^{x+1} \quad \Leftrightarrow \quad e^x = 2e^{x+1} \quad   \ln( )$ $\Leftrightarrow \ln(e^x) = \ln(2e^{x+1}) \quad \Leftrightarrow \quad x = \ln(2) + \ln(e^{x+1}) \quad \Leftrightarrow \quad x = \ln(2) + x + 1 \quad   - x$ $\Leftrightarrow 0 = \ln(2) + 1 \quad   -1 \quad \Leftrightarrow \quad \ln(2) = -1 \quad \text{widerspruch} \quad \Leftrightarrow \quad \text{keine Lösung}$
A4	<b>Ausführliche Lösung</b> $(3 + 2x)e^{x-1} = 0 \quad \Leftrightarrow \quad 3 + 2x = 0 \quad   -3$ $\Leftrightarrow 2x = -3 \quad   : 2 \quad \Leftrightarrow \quad \underline{\underline{x = -\frac{3}{2}}}$ <p><math>e^{x-1}</math> ist die Funktion <math>x^x</math> verschoben um 1 EH auf der x – Achse nach rechts. Die Funktion <math>e^x</math> hat keine Nullstelle.</p>
A5	<b>Ausführliche Lösung</b> $-2x^2e^{-x+2} = 0$ $-2x^2e^{-x+2} = 0 \quad \Leftrightarrow \quad -2x^2 = 0$ $\Leftrightarrow \quad \underline{\underline{x = 0}}$ <p><math>e^{-x+2}</math> ist die Funktion <math>e^{-x}</math> verschoben um 2 EH auf der x – Achse nach links. Die Funktion <math>e^{-x}</math> hat keine Nullstelle.</p>

A6	<p><b>Ausführliche Lösung</b></p> $-\frac{1}{5}e^x - 1 + 10e^{-x} = 0 \text{ Substitution } u = e^x \Leftrightarrow -\frac{1}{5}u - 1 + \frac{10}{u} = 0 \mid \cdot u$ $\Leftrightarrow -\frac{1}{5}u - 1 + \frac{10}{u} = 0 \mid \cdot (-5) \Leftrightarrow u^2 + 5u - 50 = 0$ $p = 5; q = -50 \Rightarrow D = \left(\frac{p}{2}\right)^2 - q = \frac{25}{4} + \frac{200}{4} = \frac{225}{4} \Rightarrow \sqrt{D} = \sqrt{\frac{225}{4}} = \frac{15}{2}$ $u_{1/2} = -\frac{p}{2} \pm \sqrt{D} \quad \left. \begin{array}{l} u_1 = -\frac{5}{2} + \frac{15}{2} = 5 \\ u_2 = -\frac{5}{2} - \frac{15}{2} = -10 \end{array} \right\}$ $u_1 = 5 \Leftrightarrow e^x = 5 \Leftrightarrow \underline{\underline{x_1 = \ln(5)}}$ $u_2 = -10 \Leftrightarrow e^x = -10 \Rightarrow \text{keine Lösung}$
A7	<p><b>Ausführliche Lösung</b></p> $4 - 3e^{-\frac{1}{2}x} = e^{\frac{1}{2}x} \text{ Substitution } u = e^{\frac{1}{2}x} \Leftrightarrow 4 - \frac{3}{u} = u \mid \cdot u$ $\Leftrightarrow 4u - 3 = u^2 \mid -u^2 \Leftrightarrow -u^2 + 4u - 3 = 0 \mid \cdot (-1) \Leftrightarrow u^2 - 4u + 3 = 0$ $p = -4; q = 3 \Rightarrow D = \left(\frac{p}{2}\right)^2 - q = 4 - 3 = 1 \Rightarrow \sqrt{D} = \sqrt{1} = 1$ $u_{1/2} = -\frac{p}{2} \pm \sqrt{D} \quad \left. \begin{array}{l} u_1 = 2 + 1 = 3 \\ u_2 = 2 - 1 = 1 \end{array} \right\}$ $u_1 = 3 \Leftrightarrow e^{\frac{1}{2}x} = 3 \Leftrightarrow \frac{1}{2}x = \ln(3) \Leftrightarrow \underline{\underline{x_1 = 2\ln(3)}}$ $u_2 = 1 \Leftrightarrow e^{\frac{1}{2}x} = 1 \Leftrightarrow \frac{1}{2}x = \ln(1) \Leftrightarrow x_2 = \underbrace{2\ln(1)}_0 \Leftrightarrow \underline{\underline{x_2 = 0}}$

A8	Ausführliche Lösung
$-\frac{3}{4}e^{-2x} + 5 = e^{-x} \quad \text{Substitution } u = e^{-x} \Leftrightarrow -\frac{3}{4}u^2 + 5 = u \quad   -u$ $\Leftrightarrow -\frac{3}{4}u^2 - u + 5 = 0 \quad   : \left(-\frac{3}{4}\right) \Leftrightarrow u^2 + \frac{4}{3}u - \frac{20}{3} = 0$ $p = \frac{4}{3}; q = -\frac{20}{3} \Rightarrow D = \left(\frac{p}{2}\right)^2 - q = \frac{4}{9} + \frac{60}{9} = \frac{64}{9} \Rightarrow \sqrt{D} = \sqrt{\frac{64}{9}} = \frac{8}{3}$ $u_{1/2} = -\frac{p}{2} \pm \sqrt{D} \quad \left. \begin{array}{l} u_1 = -\frac{2}{3} + \frac{8}{3} = 2 \\ u_2 = -\frac{2}{3} - \frac{8}{3} = -\frac{11}{3} \end{array} \right\}$ $u_1 = 2 \Leftrightarrow e^{-x} = 2 \Leftrightarrow -x = \ln(2) \Leftrightarrow \underline{\underline{x_1 = -\ln(2)}}$ $u_2 = -\frac{11}{3} \Leftrightarrow e^{-x} = -\frac{11}{3} \Leftrightarrow -x = \ln\left(-\frac{11}{3}\right) \Rightarrow \text{keine Lösung}$ <p style="text-align: center;">nicht definiert</p>	
A9	Ausführliche Lösung
$\frac{2x}{e^x + 1} = 0 \quad   \cdot (e^x + 1) \Leftrightarrow 2x = 0 \Leftrightarrow \underline{\underline{x = 0}}$	
A10	Ausführliche Lösung
$(2 - e^x)^2 = (e^x - 3)^2 \Leftrightarrow 4 - 4e^x + e^{2x} = e^{2x} - 6e^x + 9 \quad   -e^{2x}$ $\Leftrightarrow 4 - 4e^x = -6e^x + 9 \quad   +6e^x \Leftrightarrow 4 + 2e^x = 9 \quad   -4 \Leftrightarrow 2e^x = 5 \quad   :2$ $\Leftrightarrow e^x = \frac{5}{2} \quad   \ln(\ ) \Leftrightarrow \underline{\underline{x = \ln\left(\frac{5}{2}\right)}}$	