Abiturvorbereitung

Alkoholsünder, bedingte Wahrscheinlichkeit, Hypothesentest
Aufgabenblatt

Aufgabe 10

10.	In einer bestimmten Stadt an einer bestimmten Stelle führt die Polizei in regelmäßigen Abständen in der Nacht von Sonnabend auf Sonntag zwischen 1 Uhr und 4 Uhr Verkehrskontrollen durch. Dabei muss der Fahrer „in die Röhre pusten“, um festzustellen, ob der Alkoholgehalt im Blut im gesetzlich erlaubten Rahmen liegt oder nicht. Aus mehrjähriger Erfahrung weiß die Polizei, dass ungefähr 12% aller männlichen und 7% aller weiblichen Fahrer um diese Zeit an dieser Stelle die „Promillegrenze“ überschreiten. Wir nennen diese Personen hier kurz „Alkoholsünder“. Am letzten Wochenende wurden 100 Verkehrsteilnehmer überprüft. Darunter befanden sich 40 Frauen.	
	a)	Gehen Sie davon aus, dass die Erfahrungswerte der Polizei stimmen. Stellen Sie diesen Sachverhalt in Form einer Vierfeldtafel dar. Berechnen Sie für die zufällige Auswahl einer überprüften Person (die Polizei protokolliert jede Überprüfung) die Wahrscheinlichkeit folgender Ereignisse: A: Die überprüfte Person ist weiblich und Alkoholsünderin. B: Die überprüfte Person ist nüchtern. C: Falls die ausgewählte Person männlich ist, mit welcher Wahrscheinlichkeit liegt Trunkenheit am Steuer vor? D: Falls ein Alkoholsünder ausgewählt wurde, mit welcher Wahrscheinlichkeit ist die Person weiblich? Formulieren Sie zu jedem Ergebnis einen aussagekräftigen Antwortsatz. **M:** männlich, **W:** weiblich, **A:** Alkoholsünder **N:** kein Alkoholsünder (nüchtern)
	Im Folgenden wird davon ausgegangen, dass 10% aller Verkehrsteilnehmer, die an der entsprechenden Stelle kontrolliert werden Alkoholsünder sind. Weiterhin wird angenommen, dass die Anzahl der Alkoholsünder in den Kontrollen einer Binomialverteilung genügt. Eine Tabelle der Binomialverteilung für n = 100 und p = 0,1 ist beigefügt.	
	b)	Überprüfen Sie, ob für die Verteilungsfunktion der Laplacebedingung genügt.
	c)	Mit wie vielen Fahrverboten kann die Polizei bei der Überprüfung von 100 Verkehrsteilnehmern rechnen?
	d)	Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit für den Erwartungswert.
	e)	Mit welcher Wahrscheinlichkeit liegt die Anzahl der Alkoholsünder zwischen 6 und 14?
	f)	Die Annahme p = 0,1 für Alkoholsünder soll auf einem Signifikanzniveau von höchstens 5% getestet werden. Bestimmen Sie den Annahme und den Ablehnungsbereich. Überprüfen Sie die für den gewählten Ablehnungsbereich den Fehler 1. Art und kommentieren Sie das Ergebnis.
	g)	Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeiten aus d), e) und f) mit der Tabelle der Normalverteilung und bestimmen Sie die prozentuale Abweichung der Werte bezogen auf die der Binomialverteilung.

Kumulierte Binomialverteilung für $n = 100$ und $p = 0{,}1$

k	$P(X \le k)$	k	$P(X \le k)$	k	$P(X \le k)$	k	$P(X \le k)$	k	$P(X \le k)$	k	$P(X \le k)$
0	0,000	4	0,024	8	0,321	12	0,802	16	0,979	20	0,999
1	0,000	5	0,058	9	0,451	13	0,876	17	0,990	21	1,000
2	0,002	6	0,117	10	0,583	14	0,927	18	0,995	22	1,000
3	0,008	7	0,206	11	0,703	15	0,960	19	0,998	23	1,000

E10	**Ergebnisse**	
	a)	A: $P(A) = P(W \cap A) = 0{,}028$
		B: $P(B) = P(N) = 0{,}9$
		C: $P(C) = P_M(A) = \frac{P(M \cap A)}{P(M)} = \frac{0{,}072}{0{,}6} = 0{,}12$
		D: $P(D) = P_A(W) = \frac{P(A \cap W)}{P(A)} = \frac{0{,}028}{0{,}1} = 0{,}28$
	b)	Laplace- Bedingung ist mit Sigma = 3 gerade noch erfüllt.
	c)	Die Polizei kann mit etwa 10 Fahrverboten rechnen.
	d)	Die Wahrscheinlichkeit für den Erwartungswert beträgt 0,132.
	e)	Die Anzahl der Alkoholsünder liegt mit einer Wahrscheinlichkeit von 0,869 zwischen 6 und 14 einschließlich.
	f)	Siehe ausführliche Lösung.
	g)	Siehe ausführliche Lösung.

(C) Rudolf Brinkmann
Original Word- Dokument
ohne diesen Copyright- Vermerk
erhalten Sie unter:
http://www.matheaufgaben-du.de

Ausführliche Lösungen

A10 Bedingte Wahrscheinlichkeit

a) $n = 100$ Personen werden überprüft. Darunter sind 40 Frauen und 60 Männer.

12% der überprüften Männer sind Alkoholsünder: $\Rightarrow M \cap A = \frac{0{,}12 \cdot 60}{100} = 0{,}072$

7% der überprüften Frauen sind Alkoholsünder: $\Rightarrow W \cap A = \frac{0{,}07 \cdot 40}{100} = 0{,}028$

	A	N	
M	0,072	0,528	0,6
W	0,028	0,372	0,4
	0,1	0,9	1

M : Mann
W : Frau
A : Alkoholsünder
N : kein Alkoholsünder

$P(A) = P(W \cap A) = 0{,}028$

Eine zufällig ausgewählte Person ist mit einer Wahrscheinlichkeit von 0,028 weiblich und eine Alkoholsünderin.

$P(B) = P(N) = 0{,}9$

Eine zufällig ausgewählte Person ist mit einer Wahrscheinlichkeit von 0,9 nüchtern.

$$P(C) = P_M(A) = \frac{P(M \cap A)}{P(M)} = \frac{0{,}072}{0{,}6} = 0{,}12$$

Eine zufällig ausgewählte Person, von der man weiß, dass sie männlich ist, ist mit einer Wahrscheinlichkeit von 0,12 Alkoholsünder.

$$P(D) = P_A(W) = \frac{P(A \cap W)}{P(A)} = \frac{0{,}028}{0{,}1} = 0{,}28$$

Eine zufällig ausgewählte Person, von der man weiß, dass sie Alkoholsünder ist, ist mit einer Wahrscheinlichkeit von 0,28 weiblich.

(C) Rudolf Brinkmann Original Word- Dokumente ohne diesen Copyright- Vermerk erhalten Sie unter: http://www.matheaufgaben-du.de

A10 Laplace- Bedingung:

b) $p = 0{,}1 \quad n = 100$

$\sigma = \sqrt{n \cdot p(1-p)} = \sqrt{100 \cdot 0{,}1 \cdot 0{,}9} = \sqrt{9} = 3$

Laplace- Bedingung: $\sigma > 3$

Da $\sigma = 3$, ist die Laplace- Bedingung gerade nicht erfüllt.
Man befindet sich im Grenzbereich.

A10 Anzahl der Fahrverbote

c) Die Polizei kann bei der Überprüfung von n = 100 Personen mit etwa 10 Fahrverboten rechnen. Das entspricht dem Erwartungswert.

A10 Erwartungswert

d) $P(X = 10) = P(X \le 10) - P(X \le 9) = 0{,}583 - 0{,}451 = \underline{\underline{0{,}132}}$

Die Wahrscheinlichkeit für den Erwartungswert beträgt 0,132.

A10	Intervallwahrscheinlichkeit	
	e)	$P(6 \le X \le 14) = P(X \le 14) - P(X \le 5) = 0{,}927 - 0{,}058 = \underline{\underline{0{,}869}}$ Die Anzahl der Alkoholsünder liegt mit einer Wahrscheinlichkeit von 0,869 zwischen 6 und 14 einschließlich.

A10	Aufgabenanalyse und aufstellen der Hypothesen.	
	f)	Es soll überprüft werden, ob der Anteil der Alkoholsünder bei der nächtlichen Kontrolle10% beträgt. Da weder eine eindeutige Abweichung nach oben oder nach unten vermutet wird, handelt es sich um einen zweiseitigen Hypothesentest. Die Hypothesen lauten: Nullhypothese: H_0: p = 0,1; Alternativhypothese H_1: $p \neq 0{,}1$. Der Ablehnungsbereich, bestimmt durch das Signifikanzniveau von 5%, verteilt sich gleichmäßig auf beide Seiten.

A10 Hypothesentest

f)

Nullhypothese: $H_0: p = 0{,}1$ Signifikanzniveau: $\alpha \le 5\%$

Daten: $n = 100$; $p = 0{,}1$; $\mu = n \cdot p = 100 \cdot 0{,}1 = 10$

$$\sigma = \sqrt{n \cdot p \cdot (1-p)} = \sqrt{10 \cdot 0{,}9} = \sqrt{9} = 3$$

Es ist ein zweiseitiger Hypothesentest durchzuführen, denn eine geringe Anzahl, wie auch eine hohe Anzahl von Erfolgen spricht gegen H_0.

Bei einem Signifikanzniveau von 5% sind folgende Intervalle zu betrachten:

$$\underbrace{\{\quad 2{,}5\% \quad\}}_{\text{Ablehnungsbereich für } H_0}\ \{\quad 95\% \quad\}\ \underbrace{\{\quad 2{,}5\% \quad\}}_{\text{Ablehnungsbereich für } H_0}$$

Linksseitiger Ablehnungsbereich:

$P(X \le k_1) \le 0{,}025 \Rightarrow k_1 \le 4$ denn $P(X \le 4) = 0{,}024$

Für den Annahmebereich gilt:

$P(5 \le X \le k_2) \ge 0{,}95$ denn das Signifikanzniveau ist $\alpha \le 0{,}05$

Zu bestimmen ist die obere Grenze des Annahmebereichs.

$P(X \le k_2) - P(X \le 4) \ge 0{,}95$

$\Leftrightarrow P(X \le k_2) - 0{,}024 \ge 0{,}95 \,|+0{,}024$

$\Leftrightarrow P(X \le k_2) \ge 0{,}974$

Diese Bedingung ist für $k_2 = 16$ erfüllt, denn $P(X \le 16) = 0{,}979$

Damit wird der Annahmebereich: $A = \{5;...;10;...;16\}$

und der Ablehnungsbereich: $\overline{A} = \{0;...;4\} \cup \{17;...;100\}$

Kontrolle des Signifikanzniveaus:

$$P(\overline{A}) = P(X \le 4) + P(X \ge 17) = P(X \le 4) + [1 - P(X \le 16)]$$
$$= 0{,}024 + [1 - 0{,}979] = 0{,}024 + 0{,}021 = 0{,}045 < 0{,}05$$

(C) Rudolf Brinkmann Original Word- Dokument ohne diesen Copyright- Vermerk erhalten Sie unter: http://www.matheaufgaben-du.de

A10 Auswertung

f) Der Fehler 1. Art beträgt 0,045. Mit einer Wahrscheinlichkeit von etwa 4,5% kann das Stichprobenergebnis im Ablehnungsbereich von H_0 liegen, so dass in diesem Fall die wahre Hypothese p = 0,1 zu Unrecht verworfen wird.

A10 Wahrscheinlichkeitsberechnung mit Hilfe der Tabelle für normalverteilte Zufallsvariablen.

g) Daten: $n = 100\,;\ p = 0{,}1;\ \mu = n \cdot p = 100 \cdot 0{,}1 = 10$

$$\sigma = \sqrt{n \cdot p \cdot (1-p)} = \sqrt{10 \cdot 0{,}9} = \sqrt{9} = 3$$

$P(X = 10) = P(9{,}5 \le X \le 10{,}5)$

Umgebungsradius: $r = 0{,}5 \Rightarrow z = \frac{r}{\sigma} = \frac{0{,}5}{3} \approx 0{,}17 \Rightarrow P(X = 10) \approx 0{,}135$

bezogen auf 0,132 aus d) ergibt das eine

Änderung auf $\frac{100\%}{0{,}132} \cdot 0{,}135 \approx \underline{\underline{102{,}3\%}}$ also 2,3% mehr

Der mit dieser Methode berechnete Wert ist etwa 2,3% zu groß.

A10 Wahrscheinlichkeitsberechnung mit Hilfe der Tabelle für normalverteilte Zufallsvariablen.

g) Daten: $n = 100\,;\ p = 0{,}1;\ \mu = n \cdot p = 100 \cdot 0{,}1 = 10$

$$\sigma = \sqrt{n \cdot p \cdot (1-p)} = \sqrt{10 \cdot 0{,}9} = \sqrt{9} = 3$$

$P(6 \le X \le 14) = P(5{,}5 \le X \le 14{,}5)$

Umgebungsradius: $r = 4{,}5 \Rightarrow z = \frac{r}{\sigma} = \frac{4{,}5}{3} \approx 1{,}5 \Rightarrow P(6 \le X \le 14) \approx 0{,}866$

bezogen auf 0,869 aus e) ergibt das eine

Änderung auf $\frac{100\%}{0{,}869} \cdot 0{,}866 \approx \underline{\underline{99{,}65\%}}$ also 0,35% weniger

Der mit dieser Methode berechnete Wert ist etwa 0,35% zu klein.

(C) Rudolf Brinkmann Original Word-Dokument ohne diesen Copyright-Vermerk erhalten Sie unter http://www.matheaufgaben-du.de

<table>
<tr><td>A10</td><td colspan="2">Wahrscheinlichkeitsberechnung mit Hilfe der Tabelle für normalverteilte Zufallsvariablen.</td></tr>
<tr><td></td><td>g)</td><td>

Daten: $n = 100\,;\, p = 0{,}1;\, \mu = n \cdot p = 100 \cdot 0{,}1 = 10$

$\sigma = \sqrt{n \cdot p \cdot (1-p)} = \sqrt{10 \cdot 0{,}9} = \sqrt{9} = 3$

Annahmebereich : $P(5 \le X \le 16)$ asymmetrische Umgebung.

$\{0;...;3\}\{4\}\{5;...;10;...;15\}\{16\}\{17;...;100\}$

$$P(5 \le X \le 16) = \frac{1}{2}\left[P(4 \le X \le 16) - P(5 \le X \le 15)\right] + P(5 \le X \le 15)$$
$$= \frac{1}{2} \cdot P(4 \le X \le 16) - \frac{1}{2} \cdot P(5 \le X \le 15) + P(5 \le X \le 15)$$
$$= \frac{1}{2} \cdot P(4 \le X \le 16) + \frac{1}{2} \cdot P(5 \le X \le 15)$$
$$= \frac{1}{2} \cdot \left[P(4 \le X \le 16) + P(5 \le X \le 15)\right]$$

$P(4 \le X \le 16) = P(3{,}5 \le X \le 16{,}5)$

Umgebungsradius: $r = 6{,}5 \Rightarrow z = \frac{r}{\sigma} = \frac{6{,}5}{3} \approx 2{,}17 \Rightarrow P(4 \le X \le 16) \approx 0{,}97$

$P(5 \le X \le 15) = P(4{,}5 \le X \le 15{,}5)$

Umgebungsradius: $r = 5{,}5 \Rightarrow z = \frac{r}{\sigma} = \frac{5{,}5}{3} \approx 1{,}83 \Rightarrow P(5 \le X \le 15) \approx 0{,}933$

$P(5 \le X \le 16) = \frac{1}{2}[0{,}970 + 0{,}933] \approx 0{,}95$

bezogen auf 0,955 aus f) ergibt das eine

Änderung auf $\frac{100\%}{0{,}955} \cdot 0{,}95 \approx \underline{\underline{99{,}5\%}}$ also 0,5% weniger

Der mit dieser Methode berechnete Wert ist um 0,5% zu klein.

Die Abweichung der Werte für die Normalverteilung von denen der Binomialverteilung ist trotz einer Standardabweichung von 3 sehr gering.

</td></tr>
</table>

(C) Rudolf Brinkmann Original Word- Dokumente ohne diesen Copyright- Vermerk erhalten Sie unter: http://www.matheaufgaben-du.de