

AbiturvorbereitungEine Bergwerksgeschichte, Entwicklung der Förderquote
Aufgabenblatt**Aufgabe 9**

9.	<p>Die jährliche Fördermenge (Förderquote) einer Erzkine wird durch folgende Funktionsgleichung beschrieben:</p> $M(t) = (a - b \cdot t) \cdot e^{\frac{1}{25} \cdot t}$ <p>Die Variable t steht für Zeit in Jahren und $M(t)$ für die Förderquote in 1000 Tonnen pro Jahr. Im Jahr 1900 wurde mit einer Förderquote von 6000 Tonnen begonnen. Im Jahr 1971 erreichte die Förderquote ihr Maximum.</p>
a)	Bestimmen Sie die Parameter a und b der Funktionsgleichung, wie lautet diese?
b)	In welchem Jahr wurde die Förderung eingestellt?
c)	Welche maximale Förderquote wurde 1971 erreicht?
d)	In welchem Jahr war der Förderquotenzuwachs am größten?
e)	Zeichnen Sie den Graphen von $M(t)$ in ein geeignetes Koordinatensystem und beschreiben Sie die Entwicklung der Förderquote über den gesamten Abbauzeitraum.
f)	Wie viel Erz wurde über den gesamten Abbauzeitraum gefördert?
g)	Wie hoch war die durchschnittliche Förderquote im Zeitraum von 1960 bis 1980?

E9	Ergebnisse
a)	$a = 6$ und $b = \frac{1}{16} \Rightarrow M(t) = \left(6 - \frac{1}{16}t\right) e^{\frac{1}{25}t}$
b)	Im Jahr 1996 wurde die Förderung eingestellt.
c)	Die maximale Förderquote betrug im Jahr 1971 etwa 26.743 Tonnen/Jahr.
d)	Die Zunahme der Förderquote war 1946 am größten.
e)	Siehe ausführliche Lösung
f)	In den verzeichneten 96 Jahren wurden insgesamt 1.626.333 Tonnen Bodenschätze abgebaut.
g)	Im Zeitraum von 1960 bis 1980 wurden durchschnittlich jährlich 26.048 Tonnen Erz abgebaut.

Ausführliche Lösungen

A9	<p>Parameter und Funktionsgleichung</p> <p>a)</p> $M(t) = (a - b \cdot t) \cdot e^{\frac{1}{25} \cdot t}$ <p>Förderbeginn: 1900 $\hat{=} t = 0$</p> <p>Förderquote im Jahr 1900 war 6000 Tonnen/Jahr $\hat{=} 6$</p> $M(0) = 6 \Leftrightarrow (a - b \cdot 0) \cdot e^{\frac{1}{25} \cdot 0} = 6 \Rightarrow a = 6$ $M(t) = (6 - b \cdot t) \cdot e^{\frac{1}{25} \cdot t}$ <p>Maximale Förderquote im Jahr 1971 $\hat{=} t = 71$</p> <p>Das bedeutet, bei $t = 71$ existiert ein relatives Maximum.</p> <p>$M'(71) = 0$ und $M''(71) < 0$</p> <p>$M'(t) = u'v + uv'$ mit $u = (6 - b \cdot t) \Rightarrow u' = -b$ und $v = e^{\frac{1}{25} \cdot t} \Rightarrow v' = \frac{1}{25} e^{\frac{1}{25} \cdot t}$ wird</p> $M'(t) = -b \cdot e^{\frac{1}{25} \cdot t} + (6 - b \cdot t) \cdot \frac{1}{25} e^{\frac{1}{25} \cdot t} = \left(\frac{6}{25} - b - \frac{1}{25} \cdot b \cdot t \right) \cdot e^{\frac{1}{25} \cdot t}$ $M'(71) = 0 \Leftrightarrow \left(\frac{6}{25} - b - \frac{1}{25} \cdot b \cdot 71 \right) \cdot e^{\frac{1}{25} \cdot 71} = 0$ $\Leftrightarrow \left(\frac{6}{25} - \frac{96}{25} b \right) = 0 \Leftrightarrow b = \frac{1}{16}$ <p>Damit wird: $M(t) = \left(6 - \frac{1}{16} t \right) e^{\frac{1}{25} \cdot t}$</p>
A9	<p>Einstellung der Förderung</p> <p>b) Einstellung der Förderung (Nullstelle)</p> $M(t) = 0 \Leftrightarrow \left(6 - \frac{1}{16} t \right) \cdot e^{\frac{1}{25} \cdot t} = 0$ $\Leftrightarrow \left(6 - \frac{1}{16} t \right) = 0 \Leftrightarrow \underline{\underline{t = 96}}$ <p>Im Jahr 1996 wurde die Förderung eingestellt.</p>
A9	<p>Maximale Förderquote</p> <p>c) Berechnung der maximalen Förderquote.</p> $M(t) = \left(6 - \frac{1}{16} t \right) \cdot e^{\frac{1}{25} \cdot t}$ $M(71) = \left(6 - \frac{71}{16} \right) \cdot e^{\frac{71}{25}} = \left(\frac{96}{16} - \frac{71}{16} \right) \cdot e^{\frac{71}{25}} = \frac{25}{16} \cdot e^{\frac{71}{25}} \approx \underline{\underline{26,743}}$ <p>Die maximale Förderquote betrug im Jahr 1971 etwa 26.743 Tonnen/Jahr.</p>

A9 Größter Förderzuwachs

d) Maximaler Zuwachs der Förderquote (Wendestelle).
 $M''(t) = 0$ und $M'''(t) \neq 0$

$$M(t) = \left(6 - \frac{1}{16}t\right) \cdot e^{\frac{1}{25}t}$$

$$M'(t) = u'v + uv' \text{ mit } u = 6 - \frac{1}{16}t \Rightarrow u' = -\frac{1}{16} \text{ und } v = e^{\frac{1}{25}t} \Rightarrow v' = \frac{1}{25} \cdot e^{\frac{1}{25}t}$$

$$\text{wird } M'(t) = -\frac{1}{16} \cdot e^{\frac{1}{25}t} + \frac{1}{25} \left(6 - \frac{1}{16}t\right) \cdot e^{\frac{1}{25}t}$$

$$= \left[-\frac{1}{16} + \frac{6}{25} - \frac{1}{400}t\right] \cdot e^{\frac{1}{25}t} = \frac{1}{400}(71-t) \cdot e^{\frac{1}{25}t}$$

$$M''(t) = u'v + uv' \text{ mit } u = \frac{1}{400}(71-t) \Rightarrow u' = -\frac{1}{400} \text{ und } v = e^{\frac{1}{25}t} \Rightarrow v' = \frac{1}{25} \cdot e^{\frac{1}{25}t}$$

$$\text{wird } M''(t) = -\frac{1}{400} \cdot e^{\frac{1}{25}t} + \frac{1}{400} \cdot \frac{1}{25} (71-t) \cdot e^{\frac{1}{25}t} = \frac{1}{10000}(46-t) \cdot e^{\frac{1}{25}t}$$

$$M'''(t) = u'v + uv' \text{ mit } u = \frac{1}{10000}(46-t) \Rightarrow u' = -\frac{1}{10000}$$

$$\text{und } v = e^{\frac{1}{25}t} \Rightarrow v' = \frac{1}{25} \cdot e^{\frac{1}{25}t} \text{ wird}$$

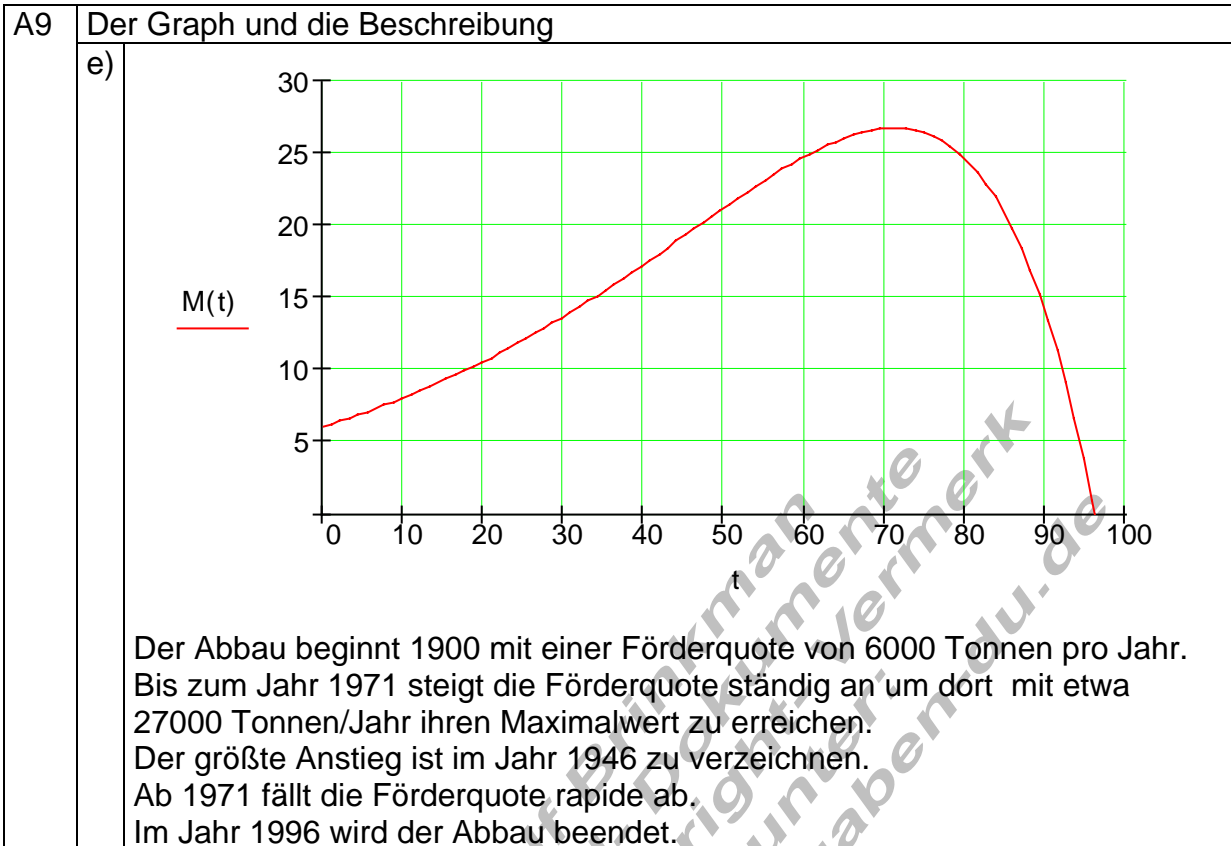
$$M'''(t) = -\frac{1}{10000} \cdot e^{\frac{1}{25}t} + \frac{1}{10000} \cdot \frac{1}{25} (46-t) \cdot e^{\frac{1}{25}t} = \frac{1}{250000}(21-t) \cdot e^{\frac{1}{25}t}$$

$$M''(t) = 0 \Leftrightarrow \frac{1}{10000}(46-t) \cdot e^{\frac{1}{25}t} = 0 \Leftrightarrow t = 46$$

$$M'''(46) = \frac{1}{250000}(21-46) \cdot e^{\frac{46}{25}} \neq 0 \Rightarrow \underline{t = 46} \text{ ist Wendestelle}$$

Die Zunahme der Förderquote war 1946 am größten.

A9 Wertetabelle								
e)	t	0	10	20	30	40	46	50
	M(t)	6	8,02	10,57	13,7	17,34	19,68	21,24
	t	60	70	71	80	90	96	
	M(t)	24,8	26,72	26,74	24,53	13,72	0	



A9	Gesamte Fördermenge
f)	$M(t) = \left(6 - \frac{1}{16}t\right) e^{\frac{1}{25}t}$ <p>Die gesamte Fördermenge bis zur Fördereinstellung im Jahr 1996 wird durch die Fläche unter dem Graphen dargestellt.</p> $M = \int_0^{96} M(t) dt = \int_0^{96} e^{\frac{1}{25}t} \cdot \left(6 - \frac{1}{16}t\right) dt \quad \text{lösbar durch partielle Integration.}$ $\int u' \cdot v dx = u \cdot v - \int u \cdot v' dx$ $u' = e^{\frac{1}{25}x} \Rightarrow u = \int e^{\frac{1}{25}x} dx = 25 \cdot e^{\frac{1}{25}x}$ $v = 6 - \frac{1}{16}x \Rightarrow v' = -\frac{1}{16}$ $\int M(t) dt = 25 \cdot e^{\frac{1}{25}t} \left(6 - \frac{1}{16}t\right) - \int 25 \cdot e^{\frac{1}{25}t} \left(-\frac{1}{16}\right) dt$ $= \left(150 - \frac{25}{16}t\right) e^{\frac{1}{25}t} + \frac{25}{16} \int e^{\frac{1}{25}t} dt$ $= \left(150 - \frac{25}{16}t\right) e^{\frac{1}{25}t} + \frac{625}{16} \cdot e^{\frac{1}{25}t} = \frac{25}{16} (121 - t) \cdot e^{\frac{1}{25}t}$ $M = \int_0^{96} M(t) dt = \frac{25}{16} \left[(121 - 96) \cdot e^{\frac{96}{25}} - (121 - 0) \cdot e^0 \right]$ $= \frac{25}{16} \left(25 \cdot e^{\frac{96}{25}} - 121 \right) \approx 1628,339$ <p>In den verzeichneten 96 Jahren wurden insgesamt 1.626.333 Tonnen Bodenschätze abgebaut.</p>

A9	Durchschnittliche Förderquote
g)	<p>Mittelwertbildung für den Zeitraum von 1960 bis 1980.</p> $\int M(t) dt = \frac{25}{16} (121 - t) \cdot e^{\frac{1}{25}t}$ $\text{Mittelwert} = \frac{1}{1980 - 1960} \int_{60}^{80} M(t) dt = \frac{1}{20} \cdot \frac{25}{16} \left[(121 - t) \cdot e^{\frac{1}{25}t} \right]_{60}^{80}$ $= \frac{5}{64} \left[(121 - 80) \cdot e^{\frac{80}{25}} - (121 - 60) \cdot e^{\frac{60}{25}} \right] = \frac{5}{64} \left[41 \cdot e^{\frac{80}{25}} - 61 \cdot e^{\frac{60}{25}} \right] \approx \underline{\underline{26,048}}$ <p>Im Zeitraum von 1960 bis 1980 wurden durchschnittlich jährlich 26.048 Tonnen Erz abgebaut.</p>