Abiturvorbereitung

Diskussion einer zusammengesetzten Funktion mit e- Funktion

Aufgabenblatt

Aufgabe 8

8. Gegeben ist folgende Funktion:

$$f(x)=\begin{cases} -0{,}199x^3+1{,}482x^2 & \text{für } 0\le x\le 6 \text{ genannt } g(x) \\ e^{-\frac{1}{2}(x-10)}+3 & \text{für } 6\le x \quad \text{genannt } h(x) \end{cases}$$

Es handelt sich um eine aus zwei Funktionen zusammengesetzte Funktion.
Beachten Sie bitte den jeweiligen Definitionsbereich.

Bei folgenden Berechnungen genügt eine Genauigkeit von 3 Kommastellen.

a)	Für welchen x- Wert hat die Funktion f (x) den größten Wert? Berechnen Sie diesen Wert. Wie nennt man diesen Punkt?
b)	Berechnen Sie den Punkt in dem die Änderungsrate der Funktionswerte von f(x) am größten ist. Wie nennt man diesen Punkt?
c)	Stellen Sie für [0 ; 12] eine Wertetabelle auf und zeichnen Sie den Graphen in ein geeignetes Koordinatensystem.
d)	Beschreiben Sie den Verlauf des Graphen und versuchen Sie einen Bezug zur Biologie herzustellen. (Stichworte: Bakterienentwicklung, Medikamentenkonzentration im Blut, Wirkung eines Dopingmittels, Zufuhr eines Mittels in mg/h usw.)
e)	Berechnen Sie die Fläche zwischen dem Graphen und der x- Achse im Intervall [0 ; 10]. Kennzeichnen Sie diese Fläche im Koordinatensystem. Versuchen Sie die Fläche aus Sicht zu einen biologischem Vorgang zu deuten.
f)	Berechnen Sie den Mittelwert im Intervall [0 ; 20]. Kennzeichnen Sie den Mittelwert im Koordinatensystem. Versuchen Sie eine biologische Deutung für diesen Wert zu finden.

E8 Ergebnisse

a)	$P_{max}(4{,}965 \mid 12{,}177)$ Der Punkt, der den größten Funktionswert kennzeichnet, heißt relatives Maximum.
b)	$P_w(2{,}482 \mid 6{,}087)$ Die Änderungsrate der Funktionswerte ist im Wendepunkt am größten.
c)	Siehe ausführliche Lösungen
d)	Siehe ausführliche Lösungen
e)	$W=W_1+W_2=42{,}228+24{,}778=\underline{\underline{67{,}006}}$ Die berechnete Fläche kann als Wirkungsfaktor gedeutet werden.
f)	$M=\frac{1}{20}(42{,}228+56{,}765)\approx\underline{\underline{4{,}95}}$

Ausführliche Lösungen

A8 Funktion und relatives Maximum

a) Es handelt sich um eine aus zwei Teilfunktionen zusammengesetzte Funktion.

$$f(x) = \begin{cases} -0{,}199x^3 + 1{,}482x^2 & \text{für } 0 \le x \le 6 \quad \text{genannt } g(x) \\ e^{-\frac{1}{2}(x-10)} + 3 & \text{für } 6 \le x < \infty \quad \text{genannt } h(x) \end{cases}$$

Der Punkt, der den größten Funktionswert kennzeichnet, heißt relatives Maximum. Das relative Maximum kann nur bei der Teilfunktion g(x) auftreten, da h(x) eine abklingende e- Funktion darstellt, die keine Extrempunkte besitzt.

$g'(x) = 0$ und $g''(x) < 0$ sind die Bedingungen für ein relatives Maximum.

$$g(x) = -0{,}199x^3 + 1{,}482x^2 \Rightarrow g'(x) = -0{,}597x^2 + 2{,}964x$$

$$g''(x) = -1{,}194x + 2{,}964$$

$$g'(x) = 0 \Leftrightarrow -0{,}597x^2 + 2{,}964x = 0$$

$$\Leftrightarrow x(-0{,}597x + 2{,}964) = 0 \Rightarrow x_1 = 0$$

$$-0{,}597x + 2{,}964 = 0 \Rightarrow x_2 \approx 4{,}965$$

$$g''(x_1) = g''(0) = 2{,}964 > 0 \Rightarrow \text{rel. Min bei } x_1 = 0$$

$$g''(x_2) = g''(4{,}965) = -1{,}194 \cdot 4{,}965 + 2{,}964 \approx -2{,}964 < 0$$

$$\Rightarrow \text{rel. Max bei } x_2 \approx 4{,}965$$

$$y_{max} = g(x_2) = g(4{,}965) = -0{,}199 \cdot 4{,}965^3 + 1{,}482 \cdot 4{,}965^2 \approx 12{,}177$$

$$\underline{\underline{P_{max}(4{,}965 \mid 12{,}177)}}$$

A8 Die Änderungsrate

b) Die Änderungsrate der Funktionswerte ist im Wendepunkt am größten. Da h(x) keinen Wendepunkt besitzt, muss dieser im Bereich von g(x) liegen.

$g''(x) = 0$ und $g'''(x) \ne 0$ sind die Bedingungen für einen Wendepunkt.

$$g''(x) = -1{,}194x + 2{,}964 \Rightarrow g'''(x) = -1{,}194 \ne 0 \text{ für alle } x$$

$$g''(x) = 0 \Leftrightarrow -1{,}194x + 2{,}964 = 0 \Leftrightarrow x \approx 2{,}482$$

Da $g'''(x) \ne 0$ ist, ist $x = x_w \approx 2{,}482$ eine Wendestelle.

$$y_w = g(x_w) = g(2{,}482) = -0{,}199 \cdot 2{,}482^3 + 1{,}482 \cdot 2{,}482^2 \approx 6{,}087$$

$$\underline{\underline{P_w(2{,}482 \mid 6{,}087)}}$$

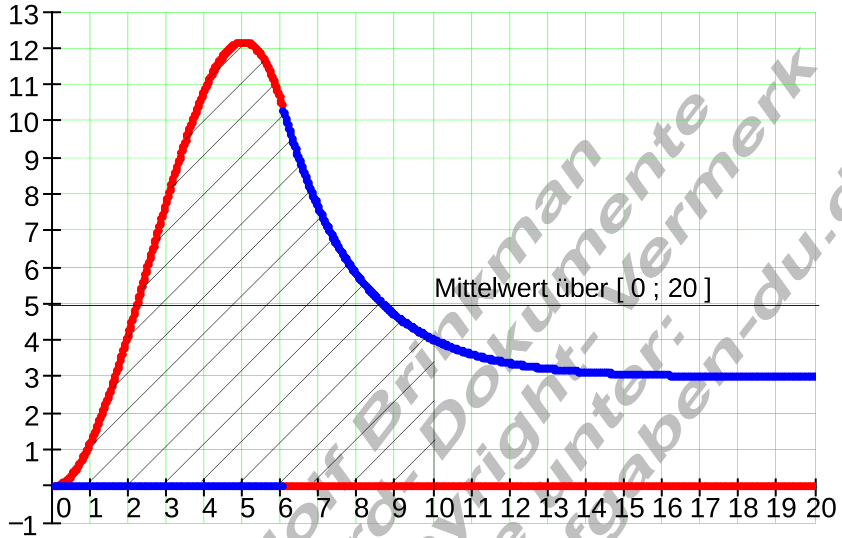
A8 Wertetabelle

c)

x	0	1	2	2,48	3	4	4,97	5
f(x)	0	1,28	4,34	6,09	7,96	10,98	12,18	12,17
x	6	7	8	9	10	11	12	
f(x)	10,37	7,48	5,72	4,65	4	3,61	3,37	

A8 Graph

c)



A8 Verlaufsbeschreibung:

d) Beispiel:

Konzentration eines Medikaments im Blut.

Die Konzentration beginnt bei Null, nimmt dann stark zu, um bei etwa 4,96 ihr Maximum zu erreichen. Danach nimmt sie wieder ab. Zuerst stärker, dann weniger um sich für große x- Werte auf den konstanten Wert 3 zu stabilisieren. Die größte Zunahme der Konzentration findet bei etwa 2,48 statt (Wendepunkt).

A8 Flächenberechnung

e)

$$W = \int_0^{10} f(x)\,dx = \int_0^6 g(x)\,dx + \int_6^{10} h(x)\,dx = W_1 + W_2$$

$$W_1 = \int_0^6 g(x)\,dx = \int_0^6 \left(-0{,}199x^3 + 1{,}482x^2\right)dx$$

$$= \left[-\frac{0{,}199}{4}x^4 + \frac{1{,}482}{3}x^3\right]_0^6 = -\frac{0{,}199}{4}6^4 + \frac{1{,}482}{3}6^3 - 0 \approx 42{,}228$$

$$W_2 = \int_6^{10} h(x)\,dx = \int_6^{10}\left(e^{-\frac{1}{2}\cdot(x-10)} + 3\right)dx = \int_6^{10} e^{-\frac{1}{2}\cdot(x-10)}\,dx + 3\cdot\int_6^{10} dx$$

$$3\cdot\int_6^{10} dx = \left[3x\right]_6^{10} = 3\cdot 10 - 3\cdot 6 = 30 - 18 = 12$$

$$\int_6^{10} e^{-\frac{1}{2}\cdot(x-10)}\,dx$$ Lösung durch einfache Substitution

$$u(x) = -\frac{1}{2}x + 5 \Rightarrow \frac{du}{dx} = -\frac{1}{2} \Rightarrow dx = -2du$$

$$ug: u(6) = -\frac{1}{2}\cdot 6 + 5 = -3 + 5 = 2 \qquad og: u(10) = -\frac{1}{2}\cdot 10 + 5 = -5 + 5 = 0$$

$$-2\cdot\int_2^0 e^u\,du = 2\cdot\int_0^2 e^u\,du = \left[2\cdot e^u\right]_0^2 = 2\cdot e^2 - 2\cdot e^0 = 2\cdot e^2 - 2$$

$$W_2 = \int_6^{10} e^{-\frac{1}{2}\cdot(x-10)}\,dx + 3\cdot\int_6^{10} dx = 2\cdot e^2 - 2 + 12 = 2\cdot e^2 + 10 \approx 24{,}778$$

$$W = W_1 + W_2 = 42{,}228 + 24{,}778 = \underline{\underline{67{,}006}}$$

Die berechnete Fläche kann als Wirkungsfaktor gedeutet werden.

A8	Mittelwertbildung
	f)

$$M = \frac{1}{20-0} \cdot \int_0^{20} f(x)\,dx = \frac{1}{20}\left[\int_0^6 g(x)\,dx + \int_6^{20} h(x)\,dx\right]$$

$\int_0^6 g(x)\,dx$ wurde unter e) bereits berechnet. Der Wert ist $W_1 \approx 42{,}228$

$$\int_6^{20} h(x)\,dx = \int_6^{20} e^{-\frac{1}{2}\cdot(x-10)}\,dx + 3 \cdot \int_6^{20} dx$$

$$3 \cdot \int_6^{20} dx = \left[3x\right]_6^{20} = 3 \cdot 20 - 3 \cdot 6 = 60 - 18 = 42$$

$\int_6^{20} e^{-\frac{1}{2}\cdot(x-10)}\,dx$ Lösung durch einfache Substitution

$$u(x) = -\frac{1}{2}x + 5 \Rightarrow \frac{du}{dx} = -\frac{1}{2} \Rightarrow dx = -2du$$

$$ug: u(6) = -\frac{1}{2}\cdot 6 + 5 = -3 + 5 = 2 \qquad og: u(20) = -\frac{1}{2}\cdot 20 + 5 = -10 + 5 = -5$$

$$-2 \cdot \int_2^{-5} e^u\,du = 2 \cdot \int_{-5}^{2} e^u\,du = \left[2 \cdot e^u\right]_{-5}^{2} = 2 \cdot e^2 - 2 \cdot e^{-5}$$

$$\int_6^{20} h(x)\,dx = 2 \cdot e^2 - 2 \cdot e^{-5} + 42 \approx 56{,}765$$

$$M = \frac{1}{20}\left(42{,}228 + 56{,}765\right) \approx \underline{\underline{4{,}95}}$$

Der Mittelwert könnte die mittlere Konzentration eines Medikamentes im Blut in den ersten 20 Stunden bedeuten.