Abiturvorbereitung
Medikamentenkonzentration im Blut
Aufgabenblatt

Aufgabe 5

5.	Durch $f(t) = 20 \cdot t \cdot e^{-\frac{1}{2}t}$ mit $t =$ Zeit in Stunden nach der Einnahme und $f(t) = \frac{mg}{Liter}$ wird die Konzentration eines Medikaments im Blut eines Patienten beschrieben. Die folgenden Betrachtungen sind nur für die Zeitspanne der ersten 12 Stunden nach der Einnahme des Medikaments durchzuführen.	
	a)	Nach welcher Zeit erreicht die Konzentration ihren höchsten Wert? Wie groß ist dieser höchste Wert?
	b)	Berechnen Sie den Wendepunkt und machen Sie eine Aussage über dessen Bedeutung im Zusammenhang mit der Aufgabenstellung.
	c)	Stellen Sie für die ersten 12 Stunden eine Wertetabelle auf und zeichnen Sie den Graphen in ein geeignetes Koordinatensystem.
	d)	Wie hoch ist die mittlere Konzentration des Medikaments innerhalb der ersten 12 Stunden?

E5	**Ergebnisse**	
	a)	$P_{max}\left(2 \mid 40 \cdot e^{-1} \approx 14,715\right)$ Die Konzentration erreicht nach 2 Stunden ihren höchsten Wert. Sie beträgt dann etwa 14,715 mg/Liter
	b)	$P_w\left(4 \mid 80 \cdot e^{-2} \approx 10,827\right)$ Nach 4 Stunden ist die momentane Abnahme der Konzentration des Medikaments im Blut am größten.
	c)	Siehe ausführliche Lösung
	d)	Die mittlere Konzentration des Medikaments innerhalb der ersten 12 Stunden beträgt etwa 6,551 mg/Liter.

Ausführliche Lösungen

A5 Berechnung des Extrempunktes

a)

$$f(t) = 20 \cdot t \cdot e^{-\frac{1}{2} \cdot t}$$

Höchster Wert: $f'(t) = 0$ und $f''(t) < 0$

$f'(t) = u'v + uv'$ mit $u = 20 \cdot t \Rightarrow u' = 20$ und $v = e^{-\frac{1}{2} \cdot t} \Rightarrow v' = -\frac{1}{2} \cdot e^{-\frac{1}{2} \cdot t}$

wird

$$f'(t) = 20 \cdot e^{-\frac{1}{2} \cdot t} - \frac{1}{2} \cdot 20 \cdot t \cdot e^{-\frac{1}{2} \cdot t} = (20 - 10 \cdot t) \cdot e^{-\frac{1}{2} \cdot t} = 10 \cdot (2 - t) \cdot e^{-\frac{1}{2} \cdot t}$$

$f''(t) = u'v + uv'$ mit $u = 20 - 10 \cdot t \Rightarrow u' = -10$ und $v = e^{-\frac{1}{2} \cdot t} \Rightarrow v' = -\frac{1}{2} \cdot e^{-\frac{1}{2} \cdot t}$

wird

$$f''(t) = -10 \cdot e^{-\frac{1}{2} \cdot t} - \frac{1}{2} \cdot (20 - 10 \cdot t) \cdot e^{-\frac{1}{2} \cdot t} = \left[-10 - \frac{1}{2} \cdot (20 - 10 \cdot t)\right] \cdot e^{-\frac{1}{2} \cdot t}$$

$$= (-10 - 10 + 5 \cdot t) \cdot e^{-\frac{1}{2} \cdot t} = (5 \cdot t - 20) \cdot e^{-\frac{1}{2} \cdot t} = 5 \cdot (t - 4) \cdot e^{-\frac{1}{2} \cdot t}$$

$f'(t) = 0 \Leftrightarrow 10 \cdot (2 - t) \cdot e^{-\frac{1}{2} \cdot t} = 0 \Rightarrow t = t_e = 2$ mögliche Extremstelle

$f''(t_e) = f''(2) = 5 \cdot (2 - 4) \cdot e^{-1} = -10 \cdot e^{-1} < 0 \Rightarrow$ rel. Max. bei $t_e = 2$

$f(t_e) = f(2) = 20 \cdot 2 \cdot e^{-1} = 40 \cdot e^{-1} \approx 14{,}715 \Rightarrow \underline{\underline{P_{max}\left(2 \mid 40 \cdot e^{-1} \approx 14{,}715\right)}}$

Die Konzentration erreicht nach 2 Stunden ihren höchsten Wert.
Sie beträgt dann etwa 14,715 mg/Liter.

A5 Der Wendepunkt und seine Bedeutung

b) Der Wendepunkt: $f''(t)=0$ und $f'''(t)\neq 0$

$$f''(t)=(5\cdot t-20)\cdot e^{-\frac{1}{2}\cdot t}$$

$f'''(t)=u'v+uv'$ mit $u=5\cdot t-20 \Rightarrow u'=5$ und $v=e^{-\frac{1}{2}\cdot t} \Rightarrow v'=-\frac{1}{2}\cdot e^{-\frac{1}{2}\cdot t}$ wird

$$f'''(t)=5\cdot e^{-\frac{1}{2}\cdot t}-\frac{1}{2}\cdot(5\cdot t-20)\cdot e^{-\frac{1}{2}\cdot t}=\left[5-\frac{1}{2}\cdot(5\cdot t-20)\right]\cdot e^{-\frac{1}{2}\cdot t}$$

$$=\left(5-\frac{5}{2}\cdot t+10\right)\cdot e^{-\frac{1}{2}\cdot t}=\left(15-\frac{5}{2}\cdot t\right)\cdot e^{-\frac{1}{2}\cdot t}$$

$f''(t)=0 \Leftrightarrow (5\cdot t-20)\cdot e^{-\frac{1}{2}\cdot t} \Rightarrow t=t_w=4$ mögliche Wendestelle

$$f'''(t_w)=f'''(4)=\left(15-\frac{5}{2}\cdot 4\right)\cdot e^{-\frac{1}{2}\cdot 4}=(15-10)\cdot e^{-2}=5\cdot e^{-2}\neq 0$$

$\Rightarrow t_w=4$ ist eine Wendestelle

$$f(t_w)=f(4)=20\cdot 4\cdot e^{-\frac{1}{2}\cdot 4}=80\cdot e^{-2}\approx 10{,}827$$

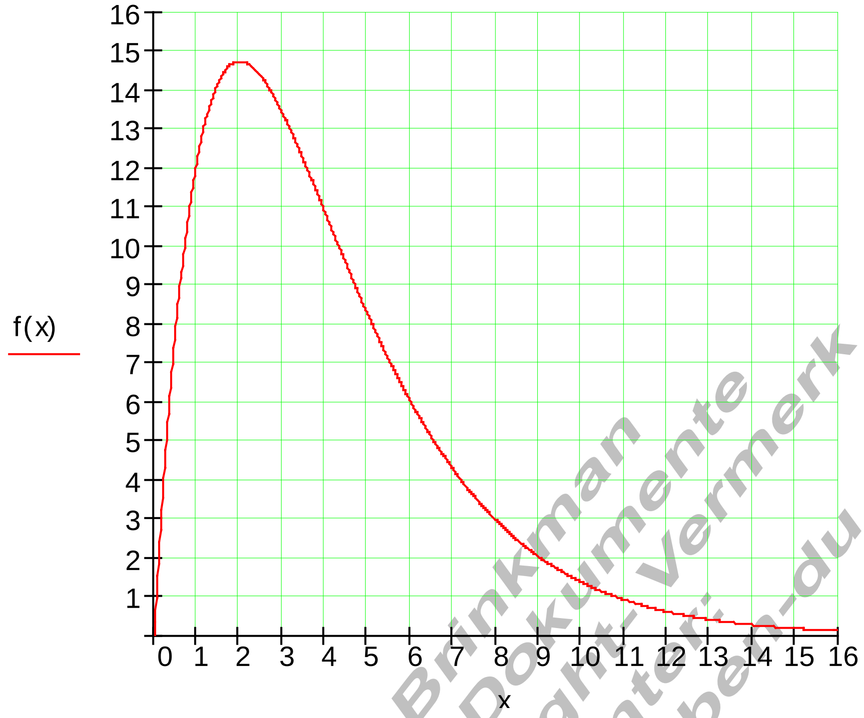
$$\underline{\underline{P_w\left(4\,|\,80\cdot e^{-2}\approx 10{,}827\right)}}$$

Nach 4 Stunden ist die momentane Abnahme der Konzentration des Medikaments im Blut am größten.
(Da das Maximum bei $t_{max}=2$ lag, muss $t_W=4$ im Abnahmebereich liegen).

A5 Die Wertetabelle

c)

t	0	1	2	3	4	5	6
f(t)	0	12,1	14,7	13,4	10,8	8,2	6
t	7	8	9	10	11	12	
f(t)	4,2	2,9	2	1,3	0,9	0,6	

A5	Der Graph	
	c)	

A5 Mittlere Konzentration innerhalb der ersten 12 Stunden

d)

$$\text{Mittelwert}: \frac{1}{12-0}\cdot\int_0^{12} f(t)\,dt = \frac{1}{12}\cdot\int_0^{12} 20\cdot t\cdot e^{-\frac{1}{2}\cdot t}\,dt = \frac{20}{12}\cdot\int_0^{12} t\cdot e^{-\frac{1}{2}\cdot t}\,dt = \frac{5}{3}\cdot\int_0^{12} t\cdot e^{-\frac{1}{2}\cdot t}\,dt$$

$$\int \underbrace{t}_{u}\cdot\underbrace{e^{-\frac{1}{2}\cdot t}}_{v'}\,dt = u\cdot v - \int u'\cdot v\,dt$$

$$u = t \Rightarrow u' = 1$$

$$v' = e^{-\frac{1}{2}\cdot t} \Rightarrow v = \int e^{-\frac{1}{2}\cdot t}\,dt \qquad \text{Lösung durch einfache Substitution}$$

$$u = -\frac{1}{2}t \Rightarrow \frac{du}{dt} = -\frac{1}{2} \Rightarrow dt = -2du$$

$$-2\cdot\int e^{u}\,du = -2\cdot e^{u} \Rightarrow v = \int e^{-\frac{1}{2}\cdot t}\,dt = -2\cdot e^{-\frac{1}{2}\cdot t}$$

$$\int t\cdot e^{-\frac{1}{2}\cdot t}\,dt = t\cdot\left(-2\cdot e^{-\frac{1}{2}\cdot t}\right) - \int 1\cdot\left(-2\cdot e^{-\frac{1}{2}\cdot t}\right)dt = -2\cdot t\cdot e^{-\frac{1}{2}\cdot t} + 2\cdot\int e^{-\frac{1}{2}\cdot t}\,dt$$

$$= -2\cdot t\cdot e^{-\frac{1}{2}\cdot t} + 2\cdot\left(-2\cdot e^{-\frac{1}{2}\cdot t}\right) = -2\cdot t\cdot e^{-\frac{1}{2}\cdot t} - 4\cdot e^{-\frac{1}{2}\cdot t} = -2\cdot(t+2)\cdot e^{-\frac{1}{2}\cdot t}$$

$$\text{Mittelwert}: \left[\frac{5}{3}\cdot(-2)\cdot(t+2)\cdot e^{-\frac{1}{2}\cdot t}\right]_0^{12} = \left[-\frac{10}{3}\cdot(t+2)\cdot e^{-\frac{1}{2}\cdot t}\right]_0^{12}$$

$$= -\frac{10}{3}\cdot(12+2)\cdot e^{-\frac{1}{2}\cdot 12} - \left[-\frac{10}{3}\cdot(0+2)\cdot e^{-\frac{1}{2}\cdot 0}\right] = -\frac{140}{3}\cdot e^{-6} - \left[-\frac{20}{3}\cdot e^{0}\right]$$

$$= -\frac{140}{3}\cdot e^{-6} + \frac{20}{3} \approx \underline{\underline{6{,}551}}$$

Die mittlere Konzentration des Medikaments innerhalb der ersten 12 Stunden beträgt etwa 6,551 mg/Liter.