Abiturvorbereitung

Bakterienkultur, Parameter bestimmen

Aufgabenblatt

Aufgabe 4

4.		In einem Laborversuch soll die Entwicklung einer Bakterienkultur mit folgender Exponentialfunktion modelliert werden: $f(x) = n_0 + a \cdot x \cdot e^{k \cdot x}$ $x =$ Zeit in Stunden, $f(x) =$ Anzahl der Bakterien
	a)	Bestimmen Sie geeignete Werte für n_0, a und k, wenn die Anzahl der Bakterien bei Versuchsbeginn 4 Millionen beträgt und nach x = 8 Stunden auf maximal 12 Millionen angewachsen ist. Stellen Sie die Funktionsgleichung auf.
	b)	Zeichnen Sie den Graphen in ein geeignetes Koordinatensystem. (I = [0 ; 50]).
	c)	Beschreiben Sie den Entwicklungsverlauf der Bakterienkultur.
	d)	Berechnen Sie den Wendepunkt. Interpretieren Sie das Ergebnis in Bezug auf den Laborversuch.
	e)	Berechnen Sie die Fläche zwischen dem Graphen und der x- Achse im Intervall[0 , 8]. Welche Bedeutung könnte die Fläche (Anzahl der Bakterien mal Zeit) in Zusammenhang mit dem Laborversuch haben?
	f)	Bestimmen Sie die Asymptote für f(x). Von welcher Bedeutung ist diese für den Laborversuch?

E4	**Ergebnisse**	
	a)	$f(x) = n_0 + a \cdot x \cdot e^{k \cdot x} \Rightarrow f(x) = 4 + e \cdot x \cdot e^{-\frac{1}{8} \cdot x}$
	b)	Zeichnung siehe ausführliche Lösung.
	c)	Siehe ausführliche Lösung.
	d)	Der Wendepunkt: $P_w\left(16 \mid 4 + 16 \cdot e^{-1} \approx 9{,}89\right)$
	e)	Die Fläche: $\int_0^8 f(x)dx = 64e - 96 \approx 77{,}97$
	f)	Die Asymptote ist die Parallele zur x- Achse im Abstand 4.

Ausführliche Lösungen

A4 Berechnung der Parameter und aufstellen der Funktionsgleichung

a) $f(x) = n_0 + a \cdot x \cdot e^{k \cdot x}$ x = Zeit in Stunden, $f(x)$ = Anzahl der Bakterien

Bei Versuchsbeginn (t = 0) sind 4 Mio. Bakterien vorhanden.

$f(0) = 4 \Leftrightarrow n_0 + a \cdot 0 \cdot e^{k \cdot 0} = 4 \Leftrightarrow n_0 = 4 \Rightarrow f(x) = 4 + a \cdot x \cdot e^{k \cdot x}$

Nach 8 Stunden ist die Anzahl auf maximal 12 Mio. angewachsen.

$f(8) = 12$ und $x = 8$ ist eine Extremstelle $\Rightarrow f'(8) = 0$

1. Ableitung von $f(x) = 4 + a \cdot x \cdot e^{k \cdot x}$ bilden:

$f'(x) = u'v + uv'$ mit $u = a \cdot x \Rightarrow u' = a$ und $v = e^{k \cdot x} \Rightarrow v' = k \cdot e^{k \cdot x}$ wird

$f'(x) = a \cdot e^{k \cdot x} + k \cdot a \cdot x \cdot e^{k \cdot x} = a \cdot (1 + k \cdot x) \cdot e^{k \cdot x}$

$f'(8) = 0 \Leftrightarrow a \cdot (1 + 8k) \cdot e^{8k} = 0$

$\Leftrightarrow 1 + 8k = 0 \Leftrightarrow k = -\frac{1}{8}$

$f(x) = 4 + a \cdot x \cdot e^{-\frac{1}{8} \cdot x}$

$f(8) = 12 \Leftrightarrow 4 + 8a \cdot e^{-1} = 12 \,|\, -4$

$\Leftrightarrow 8a \cdot e^{-1} = 8 \,|\, :8$

$\Leftrightarrow a \cdot e^{-1} = 1 \,|\, \cdot e$

$\Leftrightarrow a = e$

$$\underline{\underline{f(x) = 4 + e \cdot x \cdot e^{-\frac{1}{8} \cdot x}}}$$

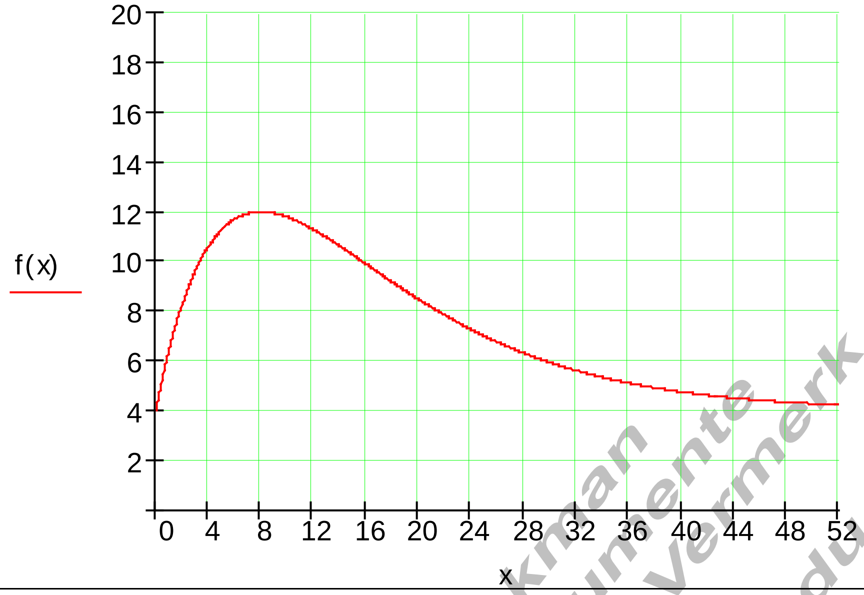
A4 Die Wertetabelle

b)

x	0	4	8	12	16	20	24
$f(x)$	4	10,6	12	11,3	9,9	8,5	7,2
x	28	32	36	40	44	48	50
$f(x)$	6,3	5,6	5,1	4,7	4,5	4,3	4,3

A4 Der Graph

b)



A4 Beschreibung des Entwicklungsverlaufs der Bakterienkultur

c) Bei Versuchsbeginn sind 4 Mio. Bakterien vorhanden.
Die Anzahl der Bakterien nimmt anfangs stark zu, um dann nach 8 Stunden ihren Maximalwert von 12 Mio. zu erreichen.
Danach verringert sich die Anzahl der Bakterien nach einer abklingenden e- Funktion.

A4 Die Ableitungen

d)

$$f(x) = 4 + e \cdot x \cdot e^{-\frac{1}{8}\cdot x}$$

$$f'(x) = u'v + uv' \text{ mit } u = e \cdot x \Rightarrow u' = e \text{ und } v = e^{-\frac{1}{8}\cdot x} \Rightarrow v' = -\frac{1}{8} \cdot e^{-\frac{1}{8}\cdot x}$$

$$\text{wird } f'(x) = e \cdot e^{-\frac{1}{8}\cdot x} - \frac{1}{8} \cdot e \cdot x \cdot e^{-\frac{1}{8}\cdot x} = \left(e - \frac{1}{8} \cdot e \cdot x \right) \cdot e^{-\frac{1}{8}\cdot x}$$

$$f''(x) = u'v + uv' \text{ mit } u = e - \frac{1}{8} e \cdot x \Rightarrow u' = -\frac{1}{8} e \text{ und } v = e^{-\frac{1}{8}\cdot x} \Rightarrow v' = -\frac{1}{8} \cdot e^{-\frac{1}{8}\cdot x}$$

$$\text{wird } f''(x) = -\frac{1}{8} e \cdot e^{-\frac{1}{8}\cdot x} - \frac{1}{8}\left(e - \frac{1}{8} \cdot e \cdot x \right) \cdot e^{-\frac{1}{8}\cdot x} = \left(-\frac{1}{4} \cdot e + \frac{1}{64} \cdot e \cdot x \right) \cdot e^{-\frac{1}{8}\cdot x}$$

$$f'''(x) = u'v + uv' \text{ mit } u = -\frac{1}{4} \cdot e + \frac{1}{64} \cdot e \cdot x \Rightarrow u' = \frac{1}{64} e$$

$$\text{und } v = e^{-\frac{1}{8}\cdot x} \Rightarrow v' = -\frac{1}{8} \cdot e^{-\frac{1}{8}\cdot x} \text{ wird}$$

$$f'''(x) = \frac{1}{64} e \cdot e^{-\frac{1}{8}\cdot x} - \frac{1}{8}\left(-\frac{1}{4} \cdot e + \frac{1}{64} \cdot e \cdot x \right) \cdot e^{-\frac{1}{8}\cdot x} = \left(\frac{3}{64} \cdot e - \frac{1}{512} \cdot e \cdot x \right) \cdot e^{-\frac{1}{8}\cdot x}$$

A4 Die Wendepunktberechnung

d) Bedingungen für einen Wendepunkt:

$f''(x)=0$ und $f'''(x)\neq 0$

$$f''(x)=0 \Leftrightarrow \left(-\frac{1}{4}\cdot e+\frac{1}{64}\cdot e\cdot x\right)\cdot e^{-\frac{1}{8}\cdot x}=0$$

$$\Leftrightarrow -\frac{1}{4}\cdot e+\frac{1}{64}\cdot e\cdot x=0 \,|+\frac{1}{4}\cdot e$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{64}\cdot e\cdot x=\frac{1}{4}\cdot e \,|:e$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{64}\cdot x=\frac{1}{4}\,|\cdot 64$$

$$\Leftrightarrow x=\frac{64}{4}=16 \;\text{(mögliche Wendestelle bei } x_w=16)$$

Überprüfung der Wendestelle:

$$f'''(x_w)=f'''(16)=\left(\frac{3}{64}\cdot e-\frac{16}{512}\cdot e\right)\cdot e^{-2}=e\cdot\left(\frac{3}{64}-\frac{2}{64}\right)\cdot e^{-2}=\frac{1}{64}\cdot e^{-1}\neq 0$$

$x_w=16$ ist eine Wendestelle.

$$y_w=f(x_w)=f(16)=4+16\cdot e\cdot e^{-2}=4+16\cdot e^{-1}\approx 9{,}89$$

$$\underline{\underline{P_w\left(16\,|\,4+16\cdot e^{-1}\approx 9{,}89\right)}}$$

In Bezug auf den Laborversuch bedeutet der Wendepunkt, dass nach 16 Stunden die momentane Abnahme der Anzahl der Bakterien am größten ist.

A4 Ansatz für die Flächenberechnung

e)

$$\int_0^8 f(x)\,dx=\int_0^8\left(4+e\cdot x\cdot e^{-\frac{1}{8}\cdot x}\right)dx$$

Zunächst wird das Integral in Teilintegrale aufgeteilt und ohne Grenzen berechnet, wobei die Konstanze C jeweils weggelassen wird.

$$\int\left(4+e\cdot x\cdot e^{-\frac{1}{8}\cdot x}\right)dx=4\cdot\underbrace{\int dx}_{\mathrm{I}}+e\cdot\underbrace{\int x\cdot e^{-\frac{1}{8}\cdot x}\,dx}_{\mathrm{II}}=4\cdot\mathrm{I}+e\cdot\mathrm{II}$$

$$\mathrm{I}:\int dx=x$$

A4 Berechnung

e)

$$II: \int \underbrace{x}_{u}\cdot \underbrace{e^{-\frac{1}{8}\cdot x}}_{v'}\,dx = u\cdot v - \int u'\cdot v\,dx$$

$$u = x \Rightarrow u' = 1$$

$$v' = e^{-\frac{1}{8}\cdot x} \Rightarrow v = \int e^{-\frac{1}{8}\cdot x}\,dx \ \ (\text{Lösung durch einfache Substitution})$$

$$u(x) = -\frac{1}{8}x \Rightarrow \frac{du}{dx} = -\frac{1}{8} \Rightarrow dx = -8du$$

$$v = \int e^{-\frac{1}{8}\cdot x}\,dx = -8\int e^{u}\,du = -8\cdot e^{u} = -8\cdot e^{-\frac{1}{8}x}$$

$$\int u'\cdot v\,dx = \int 1\cdot\left(-8\cdot e^{-\frac{1}{8}\cdot x}\right)dx = -8\cdot\int e^{-\frac{1}{8}\cdot x}\,dx = -8\cdot\left(-8\cdot e^{-\frac{1}{8}x}\right) = 64\cdot e^{-\frac{1}{8}x}$$

$$II: \int x\cdot e^{-\frac{1}{8}x} = u\cdot v - \int u'\cdot v\,dx = x\cdot\left(-8\cdot e^{-\frac{1}{8}x}\right) - 64\cdot e^{-\frac{1}{8}x} = -8(x+8)\cdot e^{-\frac{1}{8}x}$$

$$\int f(x)\,dx = 4\cdot I + e\cdot II = 4x - 8\cdot e(x+8)\cdot e^{-\frac{1}{8}x}$$

$$\int_0^8 f(x)\,dx = \left[4x - 8\cdot e(x+8)\cdot e^{-\frac{1}{8}x}\right]_0^8$$

$$= 32 - 128\cdot e\cdot e^{-1} - \left(-64\cdot e\cdot e^{0}\right) = \underline{\underline{64e - 96 \approx 77{,}97}}$$

Die Fläche zwischen dem Graphen und der x- Achse
(Anzahl der Bakterien mal Zeit)
kann als Wirkungsfaktor aufgefasst werden.

A4 Asymptote für f(x) und deren Bedeutung

f) Hilfestellung: $\lim\limits_{x\to\infty} x\cdot e^{-k\cdot x} = 0$ für $k > 0$

$$\lim_{x\to\infty} f(x) = \lim_{x\to\infty}\left(4 + e\cdot x\cdot e^{-\frac{1}{8}\cdot x}\right) = 4$$

Die Asymptote ist die Parallele zur x- Achse im Abstand 4.
In Bezug auf den Laborversuch bedeutet das:
Wird der Versuch über eine längere Zeit durchgeführt, so geht die Anzahl der Bakterien auf 4 Mio. zurück.