Abiturvorbereitung

Kurvendiskussion und Integration einer e- Funktion verknüpft mit 6x.
Aufgabe mit Ergebnissen und ausführlichen Lösungen

Aufgabe 2

2.	Gegeben ist die Funktion f(x) mit $f(x) = 6x \cdot e^{-x}$	
	a)	Berechnen Sie den Schnittpunkt mit der y- Achse
	b)	Gibt es einen Schnittpunkt mit der x- Achse? Begründen Sie ihre Antwort.
	c)	Untersuchen Sie die Funktion auf Extremwerte und Wendepunkte.
	d)	Zeichnen Sie den Graphen im Intervall [0 ; 6] 1LE = 1cm. Legen sie dazu eine Wertetabelle an (Abstand der Punkte 1 cm).
	e)	Berechnen Sie die Fläche zwischen dem Graphen und der x- Achse im Intervall [0 ; 5] und kennzeichnen Sie die Fläche.
	f)	Bestimmen Sie die Randwerte des Definitionsbereichs.

E2	**Ergebnisse**	
	a)	Schnittpunkt mit der y – Achse : $P_y(0\,|\,0)$
	b)	$f(x) = 6 \cdot x \cdot e^{-x} \quad \Rightarrow P_x(0\,|\,0)$ Satz vom Nullprodukt
	c)	relatives Maximum: $P_{Max}\left(1\,\middle|\,\frac{6}{e} \approx 2{,}207\right)$ Wendepunkt: $P_w\left(2\,\middle|\,\frac{12}{e^2} \approx 1{,}624\right)$
	d)	Wertetabelle und Graph siehe ausführliche Lösungen.
	e)	$A = 6 \cdot \int_0^5 x \cdot e^{-x}\,dx = -36 \cdot e^{-5} + 6 \approx 5{,}757$ FE
	f)	Randwerte des Definitionsbereichs. $\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty} 6x \cdot e^{-x} = -\infty \qquad \lim_{x\to\infty} f(x) = \lim_{x\to\infty} 6x \cdot e^{-x} = 0$

Ausführliche Lösungen

A2	Schnittpunkt mit der y- Achse	
	a)	$f(x)=6\cdot x\cdot e^{-x}$ für $x=0$ gilt: $f(0)=6\cdot 0\cdot e^{0}=0\Rightarrow \underline{\underline{P_y(0\,|\,0)}}$

A2	Schnittpunkt mit der x- Achse	
	b)	$f(x)=6\cdot x\cdot e^{-x}$ Ansatz: $f(x)=0\Leftrightarrow 6\cdot x\cdot e^{-x}=0\Rightarrow x_1=0\Rightarrow \underline{\underline{P_x(0\,|\,0)}}$ Nach dem Satz vom Nullprodukt, ist ein Produkt genau dann Null, wenn mindestens ein Faktor Null ist. Diese Bedingung ist für f(x) nur dann erfüllt, wenn die Variable x Null ist. Die e- Funktion wird im Endlichen nie Null.

A2	Berechnung der Ableitungen	
	c)	$f(x)=6\cdot x\cdot e^{-x}$ mit $u=6x\Rightarrow u'=6$ und $v=e^{-x}\Rightarrow v'=-e^{-x}$ wird $f'(x)=u'\cdot v+u\cdot v'=6\cdot e^{-x}-6x\cdot e^{-x}=(6-6x)\cdot e^{-x}$ mit $u=6-6x\Rightarrow u'=-6$ und $v=e^{-x}\Rightarrow v'=-e^{-x}$ wird $f''(x)=u'\cdot v+u\cdot v'=-6\cdot e^{-x}-(6-6x)\cdot e^{-x}$ $=\left[-6-(6-6x)\right]\cdot e^{-x}=\left[-6-6+6x\right]\cdot e^{-x}=(-12+6x)\cdot e^{-x}$ mit $u=-12+6x\Rightarrow u'=6$ und $v=e^{-x}\Rightarrow v'=-e^{-x}$ wird $f'''(x)=u'\cdot v+u\cdot v'=6\cdot e^{-x}-(-12+6x)\cdot e^{-x}$ $=\left[6-(-12+6x)\right]\cdot e^{-x}=\left[6+12-6x\right]\cdot e^{-x}=(18-6x)\cdot e^{-x}$

A2	Berechnung der Extrempunkte	
	c)	$f(x)=6\cdot x\cdot e^{-x}$ $f'(x)=(6-6x)\cdot e^{-x}$ $f''(x)=(-12+6x)\cdot e^{-x}$ $f'(x)=0\Leftrightarrow (6-6x)\cdot e^{-x}=0\Leftrightarrow x_1=1$ (waagerechte Tangente) $f''(x_1)=f''(1)=(-12+6\cdot 1)\cdot e^{-1}<0\Rightarrow$ rel. Max. bei $x_1=x_e=1$ $y_e=f(x_e)=f(1)=6\cdot 1\cdot e^{-1}=6\cdot e^{-1}=\frac{6}{e}\approx 2{,}207$ relatives Maximum (Hochpunkt) $\underline{\underline{P_{Max}\left(1\,\|\,\frac{6}{e}\approx 2{,}207\right)}}$

A2	Die Wendepunktberechnung	
	c)	$f(x)=6\cdot x\cdot e^{-x}$ $f''(x)=(-12+6x)\cdot e^{-x}$ $f'''(x)=(18-6x)\cdot e^{-x}$ $f''(x)=0\Leftrightarrow (-12+6x)\cdot e^{-x}\Leftrightarrow x_1=2$ $f'''(x_1)=f'''(2)=(18-6\cdot 2)\cdot e^{-2}=6\cdot e^{-2}\neq 0\Rightarrow x_1=x_w=2$ (Wendestelle) $y_w=f(x_w)=f(2)=6\cdot 2\cdot e^{-2}=12\cdot e^{-2}=\frac{12}{e^2}\approx 1{,}624$ Wendepunkt: $\underline{\underline{P_w\left(2\,\|\,\frac{12}{e^2}\approx 1{,}624\right)}}$

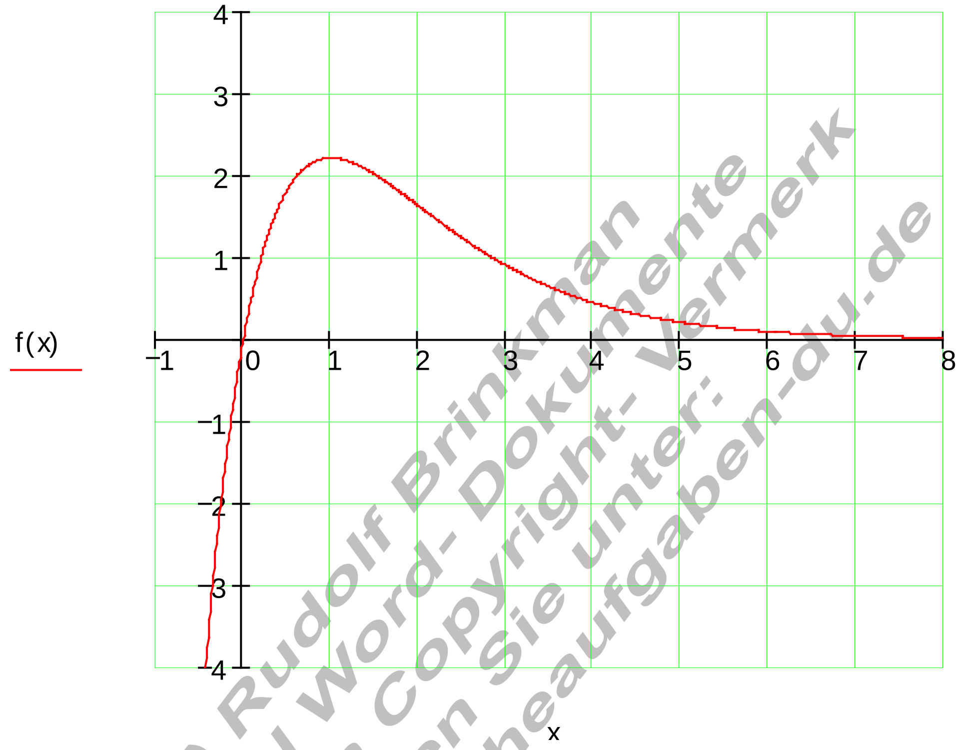
A2 Die Wertetabelle:

d)

x	0	1	2	3	4	5	6
$f(x)$	0	2,21	1,62	0,9	0,44	0,2	0,09

A2 Der Graph:

d)



A2 Ansatz und Nebenrechnung

e)

$f(x) = 6 \cdot x \cdot e^{-x}$ gesucht: $A = \int_0^5 f(x)\,dx = 6 \cdot \int_0^5 x \cdot e^{-x}\,dx$

Allgemeine Lösung von $\int x \cdot e^{-x}\,dx$ durch partielle Integration

$\int \underbrace{u}_{u} \cdot \underbrace{e^{-x}}_{v'}\,dx = u(x) \cdot v(x) - \int u'(x) \cdot v(x)\,dx$

mit $u(x) = x \Rightarrow u'(x) = 1$ und $v'(x) = e^{-x} \Rightarrow v(x) = \int e^{-x}\,dx$

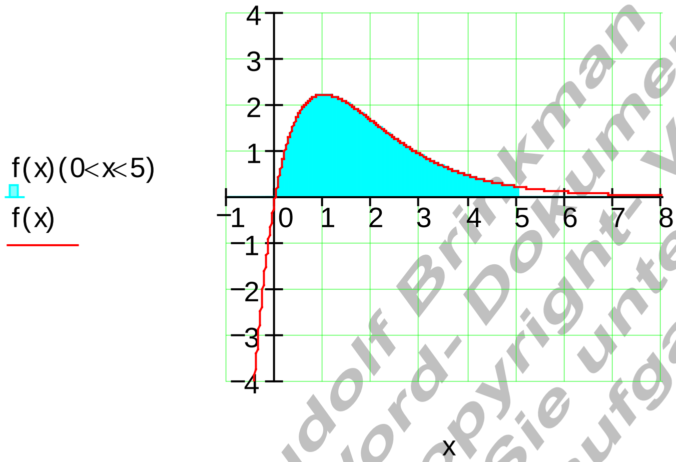
−−−−−−−−−−−−−− Nebenrechnung −−−−−−−−−−−−−

$v(x) = \int e^{-x}\,dx$ Lösung durch einfache Substitution:

$u(x) = -x \Rightarrow \frac{du}{dx} = -1 \Leftrightarrow dx = -du$

$\int e^{-x}\,dx = -\int e^{u}\,du = -e^{u} \Rightarrow v(x) = \int e^{-x}\,dx = -e^{-x}$

A2	Integral und Flächenberechnung
e)	$\int x\cdot e^{-x}\,dx = u(x)\cdot v(x)-\int u'(x)\cdot v(x)\,dx = x\cdot\left(-e^{-x}\right)-\int 1\cdot\left(-e^{-x}\right)dx$ $= -x\cdot e^{-x}+\underbrace{\int e^{-x}\,dx}_{-e^{-x}} = -x\cdot e^{-x}-e^{-x} = -(x+1)\cdot e^{-x} \Rightarrow 6\cdot\int x\cdot e^{-x}\,dx = -6(x+1)\cdot e^{-x}$ $A = 6\cdot\int_0^5 x\cdot e^{-x}\,dx = \left[-6(x+1)\cdot e^{-x}\right]_0^5 = -6(5+1)\cdot e^{-5}-\left[-6(0+1)\cdot e^{0}\right]$ $= -36\cdot e^{-5}+6\cdot e^{0} = -36\cdot e^{-5}+6 \approx \underline{\underline{5{,}757}}$

A2	Darstellung der Fläche
e)	 Der Flächeninhalt beträgt etwa 5,757 FE

A2	Randwerte des Definitionsbereichs (aus der Grafik abgelesen).
f)	$\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to-\infty} 6x\cdot e^{-x} = -\infty \qquad \lim\limits_{x\to\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to\infty} 6x\cdot e^{-x} = 0$