Abiturvorbereitung

Kurvendiskussion und Integration einer e- Funktion verknüpft mit (2x + 2).
Aufgabe mit Ergebnissen und ausführlichen Lösungen

Aufgabe 1

1.	Gegeben ist die Funktion f(x) mit $f(x)=(2x+2)\cdot e^{\frac{1}{2}x}$	
	a)	Berechnen Sie die Achsenschnittpunkte.
	b)	Untersuchen Sie die Funktion auf Extremwerte und Wendepunkte.
	c)	Zeichnen Sie den Graphen im Intervall [-8 ; 1] 1LE = 1cm. Legen sie dazu eine Wertetabelle an (Abstand der Punkte 1 cm).
	d)	Berechnen Sie die Fläche zwischen den Koordinatenachsen und kennzeichnen Sie die Fläche.
	e)	Bestimmen Sie die Randwerte des Definitionsbereichs.

E1	**Ergebnisse**	
	a)	Achsenschnittpunkte: $P_y(0\,\vert\,2);P_{x1}(-1\,\vert\,0)$
	b)	Relatives Minimum: $P_{Min}\left(-3\,\vert\,-4\cdot e^{-\frac{3}{2}}\approx-0,89\right)$ Wendepunkt: $P_W\left(-5\,\vert\,-8\cdot e^{-\frac{5}{2}}\approx-0,66\right)$
	c)	Wertetabelle und Graph siehe ausführliche Lösung.
	d)	Fläche zwischen den Koordinatenachsen: $A=4\left(2\cdot e^{-\frac{1}{2}}-1\right)\approx 0,852\,FE$
	e)	Randwerte des Definitionsbereichs $\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=\lim\limits_{x\to-\infty}(2x+2)\cdot e^{\frac{1}{2}x}=0$ $\lim\limits_{x\to\infty}f(x)=\lim\limits_{x\to\infty}(2x+2)\cdot e^{\frac{1}{2}x}=\infty$

Ausführliche Lösungen

A1 Berechnung der Achsenschnittpunkte

a)

$f(x) = (2x+2)\cdot e^{\frac{1}{2}x}$

Schnittpunkt mit der y – Achse:

$y_s = f(0) = 2\cdot e^0 = 2 \Rightarrow \underline{\underline{P_y(0|2)}}$

Schnittpunkt mit der x – Achse:

$f(x) = 0 \Leftrightarrow (2x+2)\cdot e^{\frac{1}{2}x} = 0 \Rightarrow 2x+2 = 0 \Rightarrow x_1 = -1 \Rightarrow \underline{\underline{P_{x1}(-1|0)}}$

Bemerkung: $e^{\frac{1}{2}x} \neq 0$ für alle $x \in \mathbb{R}$

A1 Berechnung der Ableitungen

b)

$f(x) = (2x+2)\cdot e^{\frac{1}{2}x}$

$f'(x) = u'\cdot v + u\cdot v'$ mit $u = 2x+2 \Rightarrow u' = 2$ und $v = e^{\frac{1}{2}x} \Rightarrow v' = \frac{1}{2}\cdot e^{\frac{1}{2}x}$

$f'(x) = 2\cdot e^{\frac{1}{2}x} + (2x+2)\cdot\frac{1}{2}\cdot e^{\frac{1}{2}x} = \left[2+\frac{1}{2}\cdot(2x+2)\right]\cdot e^{\frac{1}{2}x}$

$= (2+x+1)\cdot e^{\frac{1}{2}x} = \underline{\underline{(x+3)\cdot e^{\frac{1}{2}x}}}$

$f''(x) = u'\cdot v + u\cdot v'$ mit $u = x+3 \Rightarrow u' = 1$ und $v = e^{\frac{1}{2}x} \Rightarrow v' = \frac{1}{2}\cdot e^{\frac{1}{2}x}$

$f''(x) = 1\cdot e^{\frac{1}{2}x} + (x+3)\cdot\frac{1}{2}\cdot e^{\frac{1}{2}x} = \left[1+\frac{1}{2}\cdot(x+3)\right]\cdot e^{\frac{1}{2}x}$

$= \left(1+\frac{1}{2}x+\frac{3}{2}\right)\cdot e^{\frac{1}{2}x} = \left(\frac{1}{2}x+\frac{5}{2}\right)\cdot e^{\frac{1}{2}x} = \underline{\underline{\frac{1}{2}(x+5)\cdot e^{\frac{1}{2}x}}}$

$f'''(x) = u'\cdot v + u\cdot v'$ mit $u = \frac{1}{2}(x+5) \Rightarrow u' = \frac{1}{2}$ und $v = e^{\frac{1}{2}x} \Rightarrow v' = \frac{1}{2}\cdot e^{\frac{1}{2}x}$

$f'''(x) = \frac{1}{2}\cdot e^{\frac{1}{2}x} + \frac{1}{2}(x+5)\cdot\frac{1}{2}\cdot e^{\frac{1}{2}x} = \left[\frac{1}{2}+\frac{1}{4}\cdot(x+5)\right]\cdot e^{\frac{1}{2}x}$

$= \left[\frac{1}{2}+\frac{1}{4}\cdot x+\frac{5}{4}\right]\cdot e^{\frac{1}{2}x} = \left(\frac{1}{4}x+\frac{7}{4}\right)\cdot e^{\frac{1}{2}x} = \underline{\underline{\frac{1}{4}(x+7)\cdot e^{\frac{1}{2}x}}}$

A1	Berechnung der Extremwerte
b)	$f'(x) = 0 \Leftrightarrow (x+3)\cdot e^{\frac{1}{2}x} = 0 \Leftrightarrow x+3=0 \Leftrightarrow x_1 = -3$ $f''(x_1) = f''(-3) = \frac{1}{2}(-3+5)\cdot e^{-\frac{3}{2}} > 0 \Rightarrow$ rel Min bei $x_1 = x_{min} = -3$ $y_{Min} = f(x_{Min}) = f(-3) = [2\cdot(-3)+2]\cdot e^{-\frac{3}{2}} = -4\cdot e^{-\frac{3}{2}} \approx -0{,}89$ $\Rightarrow P_{Min}\left(-3 \mid -4\cdot e^{-\frac{3}{2}} \approx -0{,}89\right)$

A1	Wendepunktberechnung
b)	$f''(x) = 0 \Leftrightarrow \frac{1}{2}(x+5)\cdot e^{\frac{1}{2}x} = 0 \Leftrightarrow x+5=0 \Leftrightarrow x_1 = -5$ $f'''(x_1) = f'''(-5) = \frac{1}{4}(-5+7)\cdot e^{-\frac{3}{2}} \neq 0 \Rightarrow$ Wendepunkt bei $x_1 = x_W = -5$ $y_W = f(x_W) = f(-5) = [2\cdot(-5)+2]\cdot e^{-\frac{5}{2}} = -8\cdot e^{-\frac{5}{2}} \approx -0{,}66$ $\Rightarrow P_W\left(-5 \mid -8\cdot e^{-\frac{5}{2}} \approx -0{,}66\right)$

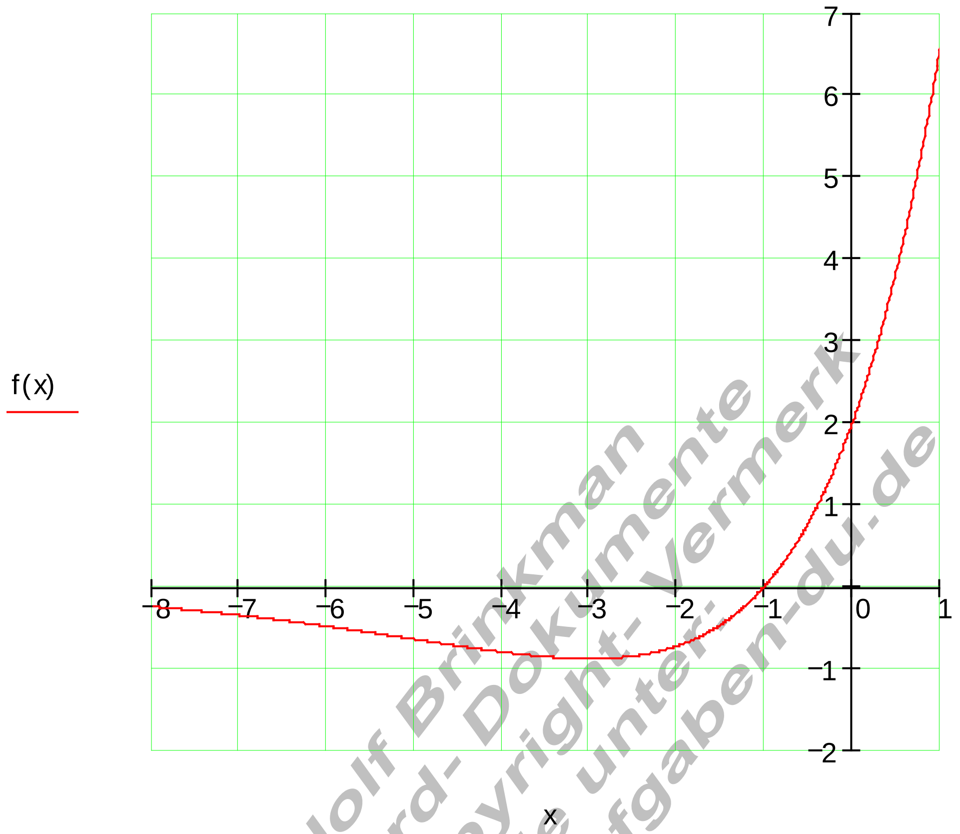
A1 Die Wertetabelle

c)

				P_W		P_{Min}		P_{x1}	P_y	
x	–8	–7	–6	–5	–4	–3	–2	–1	0	1
f(x)	–0,26	–0,36	–0,5	–0,66	–0,81	–0,89	–0,74	0	2	6,59

A1 Der Graph

c)



A1 Integration durch Substitution

d) $A = \int_{-1}^{0} f(x)\,dx$

Zuerst wird das Integral allgemein gelöst, dann werden die Grenzen eingesetzt.

$$\int f(x)\,dx = \int (2x+2)\cdot e^{\frac{1}{2}x}\,dx = 2\underbrace{\int x\cdot e^{\frac{1}{2}x}\,dx}_{I} + 2\underbrace{\int e^{\frac{1}{2}x}\,dx}_{II} = 2\cdot I + 2\cdot II$$

Beginne mit dem einfachsten Integral:

$$II: \int e^{\frac{1}{2}x}\,dx \text{ Substitution } u(x) = \frac{1}{2}x \Rightarrow \frac{du}{dx} = \frac{1}{2} \Rightarrow dx = 2du$$

$$\int e^{\frac{1}{2}x}\,dx = 2\int e^{u}\,du = 2\cdot e^{\frac{1}{2}x} \quad \text{Merke: } \boxed{\int e^{\frac{1}{2}x}\,dx = 2\cdot e^{\frac{1}{2}x}}$$

A1 Partielle Integration

d)

$$I: \int \underbrace{x}_{u} \cdot \underbrace{e^{\frac{1}{2}x}}_{v'} dx = u \cdot v - \int u' \cdot v \, dx \quad \text{(partielle Integration)}$$

$$\text{mit } u = x \Rightarrow u' = 1 \text{ und } v' = e^{\frac{1}{2}x} \Rightarrow v = \int e^{\frac{1}{2}x} dx = 2 \cdot e^{\frac{1}{2}x}$$

$$\int x \cdot e^{\frac{1}{2}x} dx = x \cdot 2 \cdot e^{\frac{1}{2}x} - \int 1 \cdot 2 \cdot e^{\frac{1}{2}x} dx = 2x \cdot e^{\frac{1}{2}x} - 2\int e^{\frac{1}{2}x} dx$$

$$= 2x \cdot e^{\frac{1}{2}x} - 2 \cdot 2 \cdot e^{\frac{1}{2}x} = 2x \cdot e^{\frac{1}{2}x} - 4 \cdot e^{\frac{1}{2}x}$$

$$\text{Merke: } \boxed{\int x \cdot e^{\frac{1}{2}x} dx = 2x \cdot e^{\frac{1}{2}x} - 4 \cdot e^{\frac{1}{2}x}}$$

A1 Integrale zusammenfügen

d)

$$\int f(x) dx = 2 \cdot I + 2 \cdot II = 4x \cdot e^{\frac{1}{2}x} - 8 \cdot e^{\frac{1}{2}x} + 4 \cdot e^{\frac{1}{2}x} = 4x \cdot e^{\frac{1}{2}x} - 4 \cdot e^{\frac{1}{2}x} = 4(x-1) \cdot e^{\frac{1}{2}x}$$

$$\text{Merke: } \boxed{\int f(x) dx = 4(x-1) \cdot e^{\frac{1}{2}x}}$$

Grenzen einsetzen:

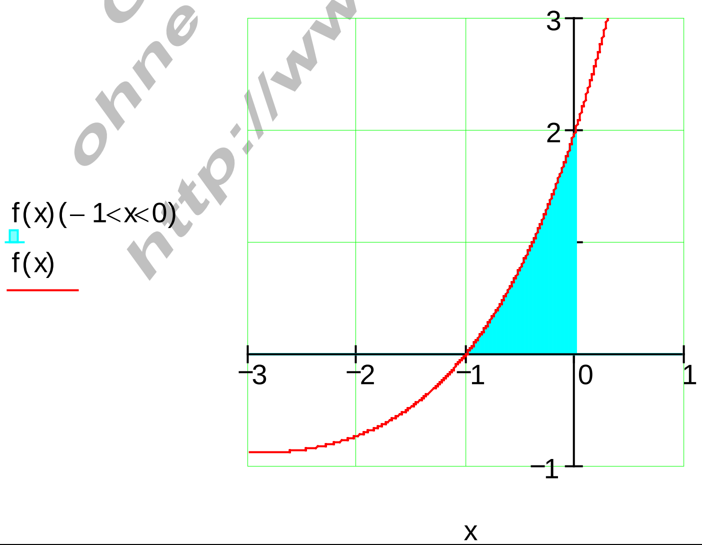
$$\int_{-1}^{0} f(x) dx = \left[4(x-1) \cdot e^{\frac{1}{2}x} \right]_{-1}^{0} = 4 \cdot (-1) \cdot e^{0} - \left[4(-1-1) \cdot e^{-\frac{1}{2}} \right]$$

$$= -4 + 8 \cdot e^{-\frac{1}{2}} = 4\left(2 \cdot e^{-\frac{1}{2}} - 1 \right) \approx 0{,}852$$

$$\text{Fläche: } A = 4\left(2 \cdot e^{-\frac{1}{2}} - 1 \right) \approx \underline{\underline{0{,}852\,\text{FE}}}$$

A1 Die Fläche

d)



A1	Randwerte des Definitionsbereichs (anschaulich aus der Grafik).	
	e)	$\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to-\infty} (2x+2)\cdot e^{\frac{1}{2}x} = 0$ $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to\infty} (2x+2)\cdot e^{\frac{1}{2}x} = \infty$